В. А. Зорич

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть I

Издание шестое, дополненное

Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов математических и физико-математических факультетов и специальностей высших учебных заведений

Москва
Издательство МЦНМО
2012

УДК 517
ББК 22.16
З 86

Рецензенты: Отдел теории функций комплексного переменного
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской Академии Наук.
Заведующий отделом академик *А. А. Гончар*.

Академик *В. И. Арнольд*.

Зорич В. А.

З 86 Математический анализ. Часть I. — 6-е изд, дополн. — М.: МЦНМО, 2012. — XVIII + 702 с. Библ.: 55 назв. Илл.: 65.

ISBN 978-5-94057-891-8
ISBN 978-5-94057-892-5 (часть I)

Университетский учебник для студентов физико-математических специальностей. Может быть полезен студентам факультетов и вузов с расширенной математической подготовкой, а также специалистам в области математики и ее приложений.

Предыдущее издание книги вышло в 2007 г.

ББК 22.16

ISBN 978-5-94057-891-8
ISBN 978-5-94057-892-5 (часть I)

«Полная строгость изложения соединена с доступностью и полнотой, а также воспитанием привычки иметь дело с реальными задачами естествознания.»

Из отзыва академика А. Н. Колмогорова
о первом издании учебника

Оглавление

[1] Приведенные в этом разделе книги допущены Минвузом СССР, рекомендованы Комитетом по высшей школе Миннауки России или Министерством образования Российской Федерации в качестве учебников для студентов, обучающихся по спе-

циальностям «Математика», «Прикладная математика», «Механика», «Прикладная математика и информатика».

ПРЕДИСЛОВИЕ К ШЕСТОМУ ИЗДАНИЮ

От своего имени и от имени будущих читателей я благодарю всех, кто нашел возможность, живя в разных странах, сообщить в издательство или мне лично о погрешностях (опечатках, ошибках, пропусках), замеченных в русском, английском, немецком или китайском изданиях этого учебника. Замечания учтены и соответствующая правка внесена в текст предлагаемого шестого русского издания.

Как выяснилось, книга пригодилась и физикам — очень этому рад. Во всяком случае я действительно стремился сопровождать формальную теорию содержательными примерами ее применения как внутри математики, так и вне нее.

Шестое издание содержит ряд дополнений, которые, возможно, будут полезны студентам и преподавателям. Во-первых, это некоторые материалы реальных лекций (например записи двух вводных обзорных лекций первого и третьего семестров) и, во-вторых, это математические сведения (порой актуальные, например связь многомерной геометрии и теории вероятностей), примыкающие к основному предмету учебника.

Москва, 2011 год *В. Зорич*

ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЯТОМУ И ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЯМ

В пятом издании исправлены замеченные погрешности и сделана локальная правка текста четвертого издания.

Москва, 2006 год *В. Зорич*

Эта часть I книги выходит вслед за выпущенной ранее тем же издательством более продвинутой частью II курса. Для единообразия и преемственности оформление текста приведено в соответствие с уже принятым в части II. Рисунки выполнены заново. Исправлены замеченные опечатки, добавлены некоторые задачи, расширен список дополнительной литературы. Более полные сведения о материале книги и некоторых особенностях курса в целом даны ниже в предисловии к первому изданию.

Москва, 2001 год *В. Зорич*

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В этом, втором издании книги, наряду с попыткой устранить опечатки первого[1)], сделаны отдельные изменения изложения (в основном это касается вариантов доказательств отдельных теорем) и добавлены некоторые новые задачи, как правило, неформального характера. В предисловии к первому изданию этого курса анализа уже дана его общая характеристика, указаны основные принципы и направленность изложения. Здесь я хотел бы сделать несколько практических замечаний, связанных с использованием книги в учебном процессе.

Любым учебником обычно пользуются как студент, так и преподаватель — каждый для своих целей. Сначала и тот, и другой заинтересованы иметь книгу, где, помимо формально необходимого минимума теории, имеются по возможности разнообразные содержательные примеры ее использования, пояснения, исторический и научный комментарии, демонстрируются взаимосвязи, указываются перспективы развития. Но в момент подготовки к экзамену студент желает видеть тот материал, который выносится на экзамен. Преподаватель точно так же, завершая подготовку курса, отбирает только тот материал, который может и должен быть изложен в отведенное курсу время.

В этой связи следует иметь в виду, что текст данного учебника, конечно, заметно шире того конспекта лекций, на базе которого он написан. Что составило эту разницу? Во-первых, к конспекту добавлен, по существу, целый задачник, состоящий, не столько из упражнений,

---

[1)] Не следует огорчаться: вместо исправленных опечаток не сохранившегося набора первого издания заведомо появится комплект новых опечаток, так оживляющих, по мнению Эйлера, чтение математического текста.

сколько из содержательных задач естествознания или собственно математики, примыкающих к соответствующим разделам теории, а иногда и существенно расширяющих их. Во-вторых, в книге, конечно, разобрано много больше примеров, демонстрирующих теорию в действии, чем это удается сделать на лекциях. Наконец, в-третьих, ряд глав, параграфов или отдельных пунктов сознательно написаны как дополнение к традиционному материалу. Об этом сказано в разделах «О введении» и «О вспомогательном материале» предисловия к первому изданию.

Напомню также, что в предисловии к первому изданию я желал предостеречь и студента, и начинающего преподавателя от чрезмерно долгого сквозного изучения вводных формальных глав. Это заметно откладывает собственно анализ и сильно смещает акценты.

Чтобы показать, что́ на деле остается в реальном лекционном курсе от этих формальных вводных глав, и чтобы в концентрированном виде изложить программу такого курса в целом, а также отметить возможные ее вариации в зависимости от контингента слушателей, я в конце книги привожу некоторые задачи коллоквиумов, а также экзаменационные вопросы последнего времени за первые два семестра, к которым относится эта часть I.

По экзаменационным вопросам профессионал, конечно, увидит и порядок изложения, и степень развития в нем фундаментальных понятий и методов, и привлечение порой материала второй части учебника, когда рассматриваемый в первой части вопрос уже доступен слушателям в более общем виде.

В заключение хотел бы поблагодарить знакомых и незнакомых мне коллег и студентов за отзывы и конструктивные замечания к первому изданию курса. Особенно интересно и полезно мне было прочитать рецензии А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда. Разные по объему, форме и стилю, они в профессиональном плане имели так ободряюще много общего.

Москва, 1997 год *В. Зорич*

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Создание Ньютоном и Лейбницем три столетия тому назад основ дифференциального и интегрального исчисления даже по нынешним масштабам представляется крупнейшим событием в истории науки вообще и математики в особенности.

Математический анализ (в широком смысле слова) и алгебра, переплетаясь, образовали теперь ту корневую систему, на которой держится разветвленное дерево современной математики и через которую происходит его основной живительный контакт с внематематической сферой. Именно по этой причине основы анализа включаются как необходимый элемент даже самых скромных представлений о так называемой высшей математике, и, вероятно, поэтому изложению основ анализа посвящено большое количество книг, адресованных различным кругам читателей.

Эта книга в первую очередь адресована математикам, желающим (как и должно) получить полноценные в логическом отношении доказательства фундаментальных теорем, но вместе с тем интересующимся также их внематематической жизнью.

Особенности настоящего курса, связанные с указанными обстоятельствами, сводятся в основном к следующему.

П о х а р а к т е р у и з л о ж е н и я. В пределах каждой большой темы изложение, как правило, индуктивное, идущее порой от постановки задачи и наводящих эвристических соображений по ее решению к основным понятиям и формализмам.

Подробное вначале, изложение становится все более сжатым по мере продвижения по курсу.

Упор сделан на эффективном аппарате гладкого анализа. При изложении теории я (в меру своего понимания) стремился выделить наиболее существенные методы и факты и избежать искушения незначительного усиления теорем ценой значительного усложнения доказательств.

Изложение геометрично всюду, где это представлялось ценным для раскрытия существа дела.

Основной текст снабжен довольно большим количеством примеров, а почти каждый параграф заканчивается набором задач, которые, надеюсь, существенно дополняют даже теоретическую часть основного текста. Следуя великолепному опыту Полиа и Сеге, я часто старался представить красивый математический или важный прикладной результат в виде серий доступных читателю задач.

Расположение материала диктовалось не только архитектурой математики в смысле Бурбаки, но и положением анализа как составной части единого математического или, лучше сказать, естественно-математического образования.

По содержанию. Курс издается в двух книгах (части I и II).

Настоящая первая часть содержит дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной и дифференциальное исчисление функций многих переменных.

В дифференциальном исчислении выделена роль дифференциала как линейного эталона для локального описания характера изменения переменной величины. Кроме многочисленных примеров использования дифференциального исчисления для исследования функциональных зависимостей (монотонность, экстремумы), показана роль языка анализа в записи простейших дифференциальных уравнений — математических моделей конкретных явлений и связанных с ними содержательных задач.

Рассмотрен ряд таких задач (например, движение тела переменной массы, ядерный реактор, атмосферное давление, движение в сопротивляющейся среде), решение которых приводит к важнейшим элементарным функциям. Полнее использован комплексный язык, в частности, выведена формула Эйлера и показано единство основных элементарных функций.

Интегральное исчисление сознательно изложено по возможности на наглядном материале в рамках интеграла Римана. Для большинства приложений этого вполне хватает[1]. Указаны различные приложения интеграла, в том числе приводящие к несобственному интегралу (например, работа выхода из поля тяготения и вторая космическая скорость) или к эллиптическим функциям (движение в поле тяжести при наличии связей, маятник).

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных довольно геометрично. В нем, например, рассмотрены такие важные и полезные следствия теоремы о неявной функции, как криволинейные координаты и локальное приведение к каноническому виду гладких отображений (теорема о ранге) и функций (лемма Морса), а также теория условного экстремума.

Результаты, относящиеся к теории непрерывных функций и дифференциальному исчислению, подытожены и изложены в общем инвариантном виде в двух главах, которые естественным образом примыкают к дифференциальному исчислению вещественнозначных функций нескольких переменных. Эти две главы открывают вторую часть курса. Вторая книга, в которой, кроме того, изложено интегральное исчисление функций многих переменных, доведенное до общей формулы Ньютона–Лейбница–Стокса, приобретает, таким образом, определенную целостность.

Более полные сведения о второй книге мы поместим в предисловии к ней, а здесь добавим только, что кроме уже перечисленного материала она содержит сведения о рядах функций (степенных рядах и рядах Фурье в том числе), об интегралах, зависящих от параметра (включая фундаментальное решение, свертку и преобразование Фурье), а также об асимптотических разложениях (они обычно мало представлены в учебной литературе).

Остановимся теперь на некоторых частных вопросах.

О введении. Вводного обзора предмета я не писал, поскольку большинство начинающих студентов уже имеют из школы первое представление о дифференциальном и интегральном исчислении и его приложениях, а на большее вступительный обзор вряд ли мог бы претендовать. Вместо него я в первых двух главах довожу до определенной ма-

[1] Более «сильные» интегралы, как известно, требуют более кропотливых и выбивающихся из основного русла теоретико-множественных рассмотрений, мало что прибавляя к эффективному аппарату анализа, который и должен быть освоен в первую очередь.

тематической завершенности представления бывшего школьника о множестве, функции, об использовании логической символики, а также о теории действительного числа.

Этот материал относится к формальным основаниям анализа и адресован в первую очередь студенту-математику, который в какой-то момент захочет проследить логическую структуру базисных понятий и принципов, используемых в классическом анализе. Собственно математический анализ в книге начинается с третьей главы, поэтому читатель, желающий по возможности скорее получить в руки эффективный аппарат и увидеть его приложения, при первом чтении вообще может начать с главы III, возвращаясь к более ранним страницам в случае, если что-то ему покажется неочевидным и вызовет вопрос, на который, надеюсь, я тоже обратил внимание и предусмотрительно дал ответ в первых главах.

О рубрикации. Материал обеих книг разбит на главы, имеющие сплошную нумерацию. Параграфы нумеруются в пределах каждой главы отдельно; подразделения параграфа нумеруются только в пределах этого параграфа. Теоремы, утверждения, леммы, определения и примеры для большей логической четкости выделяются, а для удобства ссылок нумеруются в пределах каждого параграфа.

О вспомогательном материале. Несколько глав книги написаны как естественное окаймление классического анализа. Это, с одной стороны, уже упоминавшиеся главы I, II, посвященные его формально-математическим основаниям, а с другой стороны, главы IX, X, XV второй части, дающие современный взгляд на теорию непрерывности, дифференциальное и интегральное исчисление, а также глава XIX, посвященная некоторым эффективным асимптотическим методам анализа.

Вопрос о том, какая часть материала этих глав включается в лекционный курс, зависит от контингента слушателей и решается лектором, но некоторые вводимые здесь фундаментальные понятия обычно присутствуют в любом изложении предмета математикам.

В заключение я хотел бы поблагодарить тех, чья дружеская и квалифицированная профессиональная помощь была мне дорога и полезна при работе над этой книгой.

Предлагаемый курс довольно тщательно и во многих аспектах согласовывался с последующими современными университетскими математическими курсами — такими, например, как дифференциальные уравнения, дифференциальная геометрия, теория функций комплексного переменного, функциональный анализ. В этом отношении мне были весьма полезны контакты и обсуждения с В. И. Арнольдом и, особенно многочисленные, с С. П. Новиковым в период совместной работы в экспериментальном потоке при отделении математики.

Много советов я получил от Н. В. Ефимова, заведующего кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ.

Я признателен также коллегам по кафедре и факультету за замечания к ротапринтному изданию моих лекций.

При работе над книгой ценными оказались предоставленные в мое распоряжение студенческие записи моих лекций последнего времени, за что я благодарен их владельцам.

Я глубоко признателен официальным рецензентам издательства Л. Д. Кудрявцеву, В. П. Петренко, С. Б. Стечкину за конструктивные замечания, значительная часть которых учтена в предлагаемом читателю тексте.

Москва, 1980 год *В. Зорич*

ГЛАВА I

НЕКОТОРЫЕ ОБЩЕМАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

§ 1. Логическая символика

1. Связки и скобки. Язык этой книги, как и большинства математических текстов, состоит из обычного языка и ряда специальных символов излагаемых теорий. Наряду с этими специальными символами, которые будут вводиться по мере надобности, мы используем распространенные символы математической логики $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ для обозначения соответственно отрицания «не» и связок «и», «или», «влечет», «равносильно»[1].

Возьмем, например, три представляющих и самостоятельный интерес высказывания:

L. «Если обозначения удобны для открытий ..., то поразительным образом сокращается работа мысли» (Г. Лейбниц[2]).

P. «Математика — это искусство называть разные вещи одинаковыми именами» (А. Пуанкаре[3]).

---

[1] В логике вместо символа $\wedge$ чаще используется символ &. Символ $\Rightarrow$ импликации логики чаще пишут в виде $\rightarrow$, а отношение равносильности — в виде $\longleftrightarrow$ или $\leftrightarrow$. Однако мы будем придерживаться указанной в тексте символики, чтобы не перегружать традиционный для анализа знак $\rightarrow$ предельного перехода.

[2] Г. В. Лейбниц (1646 – 1716) — выдающийся немецкий ученый, философ и математик, которому наряду с Ньютоном принадлежит честь открытия основ анализа бесконечно малых.

[3] А. Пуанкаре (1854 – 1912) — французский математик, блестящий ум которого преобразовал многие разделы математики и достиг ее фундаментальных приложений в математической физике.

G. «Великая книга природы написана языком математики» (Г. Галилей[1)]).

Тогда в соответствии с указанными обозначениями:

Запись	Означает
$L \Rightarrow P$	L влечет P
$L \Leftrightarrow P$	L равносильно P
$((L \Rightarrow P) \wedge (\neg P)) \Rightarrow (\neg L)$	Если P следует из L и P неверно, то L неверно
$\neg((L \Leftrightarrow G) \vee (P \Leftrightarrow G))$	G не равносильно ни L, ни P

Мы видим, что пользоваться только формальными обозначениями, избегая разговорного языка, — не всегда разумно.

Мы замечаем, кроме того, что в записи сложных высказываний, составленных из более простых, употребляются скобки, выполняющие ту же синтаксическую функцию, что и при записи алгебраических выражений. Как и в алгебре, для экономии скобок можно договориться о «порядке действий». Условимся с этой целью о следующем порядке приоритета символов:

$$\neg, \quad \wedge, \quad \vee, \quad \Rightarrow, \quad \Leftrightarrow.$$

При таком соглашении выражение $\neg A \wedge B \vee C \Rightarrow D$ следует расшифровать как $(((\neg A) \wedge B) \vee C) \Rightarrow D$, а соотношение $A \vee B \Rightarrow C$ — как $(A \vee B) \Rightarrow C$, но не как $A \vee (B \Rightarrow C)$.

Записи $A \Rightarrow B$, означающей, что A влечет B или, что то же самое, B следует из A, мы часто будем придавать другую словесную интерпретацию, говоря, что B есть *необходимый признак* или *необходимое условие* A и, в свою очередь, A — *достаточное условие* или *достаточный признак* B. Таким образом, соотношение $A \Leftrightarrow B$ можно прочитать любым из следующих способов:

A необходимо и достаточно для B;

A тогда и только тогда, когда B;

[1)] Г. Галилей (1564–1642) — итальянский ученый, крупнейший естествоиспытатель. Его труды легли в основу всех последующих физических представлений о пространстве и времени. Отец современной физической науки.

A, если и только если B;

A равносильно B.

Итак, запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что A влечет B и, одновременно, B влечет A.

Употребление союза *и* в выражении $A \wedge B$ пояснений не требует.

Следует, однако, обратить внимание на то, что в выражении $A \vee B$ союз *или* неразделительный, т. е. высказывание $A \vee B$ считается верным, если истинно хотя бы одно из высказываний A, B. Например, пусть x — такое действительное число, что $x^2 - 3x + 2 = 0$. Тогда можно написать, что имеет место следующее соотношение:

$$(x^2 - 3x + 2 = 0) \Leftrightarrow (x = 1) \vee (x = 2).$$

2. Замечания о доказательствах. Типичное математическое утверждение имеет вид $A \Rightarrow B$, где A — посылка, а B — заключение. Доказательство такого утверждения состоит в построении цепочки $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_n \Rightarrow B$ следствий, каждый элемент которой либо считается аксиомой, либо является уже доказанным утверждением[1)].

В доказательствах мы будем придерживаться классического правила вывода: если A истинно и $A \Rightarrow B$, то B тоже истинно.

При доказательстве от противного мы будем использовать также принцип исключенного третьего, в силу которого высказывание $A \vee \neg A$ (A или не A) считается истинным независимо от конкретного содержания высказывания A. Следовательно, мы одновременно принимаем, что $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$, т. е. повторное отрицание равносильно исходному высказыванию.

3. Некоторые специальные обозначения. Для удобства читателя и сокращения текста начало и конец доказательства условимся отмечать знаками ◀ и ▶ соответственно.

Условимся также, когда это будет удобно, вводить определения посредством специального символа := (равенство по определению), в котором двоеточие ставится со стороны определяемого объекта.

Например, запись

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f; P, \xi)$$

1) Запись $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ будет употребляться как сокращение для $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$.

определяет левую часть посредством правой части, смысл которой предполагается известным.

Аналогично вводятся сокращенные обозначения для уже определенных выражений. Например, запись

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i =: \sigma(f; P, \xi)$$

вводит обозначение $\sigma(f; P, \xi)$ для стоящей слева суммы специального вида.

4. Заключительные замечания. Отметим, что мы здесь говорили, по существу, только об обозначениях, не анализируя формализм логических выводов и не касаясь глубоких вопросов истинности, доказуемости, выводимости, составляющих предмет исследования математической логики.

Как же строить математический анализ, если мы не имеем формализации логики? Некоторое утешение тут может состоять в том, что мы всегда знаем или, лучше сказать, умеем больше, чем способны в данный момент формализовать. Пояснением смысла последней фразы может служить известная притча о том, что сороконожка даже ходить разучилась, когда ее попросили объяснить, как именно она управляется со всеми своими конечностями.

Опыт всех наук убеждает нас в том, что считавшееся ясным или простым и нерасчленяемым вчера может подвергнуться пересмотру или уточнению сегодня. Так было (и, без сомнения, еще будет) и с многими понятиями математического анализа, важнейшие теоремы и аппарат которого были открыты еще в XVII – XVIII веках, но приобрели современный формализованный, однозначно трактуемый и, вероятно, потому общедоступный вид лишь после создания теории пределов и необходимой для нее логически полноценной теории действительных чисел (XIX век).

Именно с этого уровня теории действительных чисел мы и начнем в главе II построение всего здания анализа.

Как уже отмечалось в предисловии, желающие быстрее ознакомиться с основными понятиями и эффективным аппаратом собственно дифференциального и интегрального исчисления могут начать сразу с главы III, возвращаясь к отдельным местам первых двух глав лишь по мере необходимости.

Упражнения

Будем отмечать истинные высказывания символом 1, а ложные — символом 0. Тогда каждому из высказываний $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$ можно сопоставить так называемую *таблицу истинности*, которая указывает его истинность в зависимости от истинности высказываний A, B. Эти таблицы являются формальным определением логических операций $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$. Вот они:

$\boxed{\neg A}$

A	0	1
$\neg A$	1	0

$\boxed{A \wedge B}$

$A \backslash B$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\boxed{A \vee B}$

$A \backslash B$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\boxed{A \Rightarrow B}$

$A \backslash B$	0	1
0	1	1
1	0	1

1. Проверьте, все ли в этих таблицах согласуется с вашим представлением о соответствующей логической операции. (Обратите, в частности, внимание на то, что если A ложно, то импликация $A \Rightarrow B$ всегда истинна.)

2. Покажите, что справедливы следующие простые, но очень важные и широко используемые в математических рассуждениях соотношения:

a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$;

b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$;

c) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$;

d) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$;

e) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$.

§ 2. Множества и элементарные операции над множествами

1. Понятие множества. С конца XIX – начала XX столетия наиболее универсальным языком математики стал язык теории множеств. Это проявилось даже в одном из определений математики как науки, изучающей различные структуры (отношения) на множествах[1)].

[1)] Б у р б а к и Н. Архитектура математики. В кн.: Б у р б а к и Н. Очерки по истории математики. М.: ИЛ, 1963.

«Под *множеством* мы понимаем объединение в одно целое определенных, вполне различимых объектов нашей интуиции или нашей мысли» — так описал понятие «множество» Георг Кантор[1)], основатель теории множеств.

Описание Кантора, разумеется, нельзя назвать определением, поскольку оно апеллирует к понятиям, быть может, более сложным (во всяком случае, не определенным ранее), чем само понятие множества. Цель этого описания — разъяснить понятие, связав его с другими.

Основные предпосылки канторовской (или, как условно говорят, «наивной») теории множеств сводятся к следующему:

1° множество может состоять из любых различимых объектов;

2° множество однозначно определяется набором составляющих его объектов;

3° любое свойство определяет множество объектов, которые этим свойством обладают.

Если x — объект, P — свойство, $P(x)$ — обозначение того, что x обладает свойством P, то через $\{x \mid P(x)\}$ обозначают весь класс объектов, обладающих свойством P. Объекты, составляющие класс или множество, называют *элементами* класса или множества.

Множество, состоящее из элементов $x_1, \ldots, x_n$, обычно обозначают как $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Там, где это не вызывает недоразумения, для сокращения записи мы позволяем себе обозначать одноэлементное множество $\{a\}$ просто через a.

Слова «класс», «семейство», «совокупность», «набор» в наивной теории множеств употребляют как синонимы термина «множество».

Следующие примеры демонстрируют применение этой терминологии:

множество букв «а» в слове «я»;

множество жен Адама;

набор из десяти цифр;

семейство бобовых;

множество песчинок на Земле;

совокупность точек плоскости, равноудаленных от двух данных ее точек;

[1)] Г. Кантор (1845 – 1918) — немецкий математик, создатель теории бесконечных множеств и родоначальник теоретико-множественного языка в математике.

семейство множеств;

множество всех множеств.

Различие в возможной степени определенности задания множества наводит на мысль, что множество — не такое уж простое и безобидное понятие.

И в самом деле, например, понятие множества всех множеств просто противоречиво.

◀ Действительно, пусть для множества M запись $P(M)$ означает, что M не содержит себя в качестве своего элемента.

Рассмотрим класс $K = \{M \mid P(M)\}$ множеств, обладающих свойством P.

Если K — множество, то либо верно, что $P(K)$, либо верно, что $\neg P(K)$. Однако эта альтернатива для K невозможна. Действительно, $P(K)$ невозможно, ибо из определения K тогда бы следовало, что K содержит K, т. е. что верно $\neg P(K)$; с другой стороны, $\neg P(K)$ тоже невозможно, поскольку это означает, что K содержит K, а это противоречит определению K как класса тех множеств, которые сами себя не содержат.

Следовательно, K — не множество. ▶

Это классический парадокс Рассела[1)], один из тех парадоксов, к которым приводит наивное представление о множестве.

В современной математической логике понятие множества подвергается (как мы видим, не без оснований) тщательному анализу. Однако в такой анализ мы углубляться не станем. Отметим только, что в существующих аксиоматических теориях множество определяется как математический объект, обладающий определенным набором свойств.

Описание этих свойств составляет аксиоматику. Ядром аксиоматики теории множеств является постулирование правил, по которым из множеств можно образовывать новые множества. В целом любая из существующих аксиоматик такова, что она, с одной стороны, избавляет от известных противоречий наивной теории, а с другой — обеспечивает свободу оперирования с конкретными множествами, возникающими в различных отделах математики, и в первую очередь именно в математическом анализе, понимаемом в широком смысле слова.

Ограничившись пока этими замечаниями относительно понятия

[1)] Б. Рассел (1872 – 1970) — английский логик, философ, социолог и общественный деятель.

множества, перейдем к описанию некоторых наиболее часто используемых в анализе свойств множеств.

Желающие подробнее ознакомиться с понятием множества могут просмотреть пункт 2 из § 4 настоящей главы или обратиться к специальной литературе.

2. Отношение включения. Как уже отмечалось, объекты, составляющие множество, принято называть *элементами* этого множества. Мы будем стремиться обозначать множества прописными буквами латинского алфавита, а элементы множества — соответствующими строчными буквами.

Высказывание «x есть элемент множества X» коротко обозначают символом

$$x \in X \qquad (\text{или } X \ni x),$$

а его отрицание — символом

$$x \notin X \qquad (\text{или } X \not\ni x).$$

В записи высказываний о множествах часто используются логические операторы $\exists$ («существует» или «найдется») и $\forall$ («любой» или «для любого»), называемые кванторами *существования* и *всеобщности* соответственно.

Например, запись $\forall x \ ((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B))$ означает, что для любого объекта x соотношения $x \in A$ и $x \in B$ равносильны. Поскольку множество вполне определяется своими элементами, указанное высказывание принято обозначать короткой записью

$$A = B,$$

читаемой «A равно B», обозначающей совпадение множеств A и B.

Таким образом, два множества *равны*, когда они состоят из одних и тех же элементов.

Отрицание равенства обычно записывают в виде $A \neq B$.

Если любой элемент множества A является элементом множества B, то пишут $A \subset B$ или $B \supset A$ и говорят, что множество A является *подмножеством* множества B, или что B содержит A, или что B включает в себя A. В связи с этим отношение $A \subset B$ между множествами A, B называется *отношением включения* (рис. 1).

Итак,

$$(A \subset B) := \forall x\ ((x \in A) \Rightarrow (x \in B)).$$

Если $A \subset B$ и $A \neq B$, то будем говорить, что включение $A \subset B$ *строгое* или что A — *собственное* подмножество B.

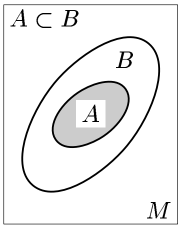


Рис. 1.

Используя приведенные определения, теперь можно заключить, что

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

Если M — множество, то любое свойство P выделяет в M подмножество

$$\{x \in M \mid P(x)\}$$

тех элементов M, которые обладают этим свойством.

Например, очевидно, что

$$M = \{x \in M \mid x \in M\}.$$

С другой стороны, если в качестве P взять свойство, которым не обладает ни один элемент множества M, например $P(x) := (x \neq x)$, то мы получим множество

$$\varnothing = \{x \in M \mid x \neq x\},$$

называемое *пустым* подмножеством множества M.

3. Простейшие операции над множествами. Пусть A и B — подмножества множества M.

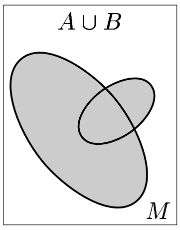


Рис. 2.

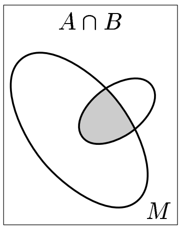


Рис. 3.

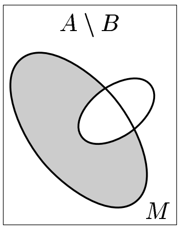


Рис. 4.

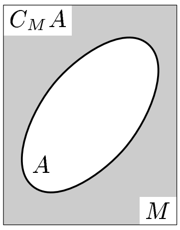


Рис. 5.

a. *Объединением* множеств A и B называется множество

$$A \cup B := \{x \in M \mid (x \in A) \vee (x \in B)\},$$

состоящее из тех и только тех элементов множества M, которые содержатся хотя бы в одном из множеств A, B (рис. 2).

b. *Пересечением* множеств A и B называется множество

$$A \cap B := \{x \in M \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\},$$

образованное теми и только теми элементами множества M, которые принадлежат одновременно множествам A и B (рис. 3).

c. *Разностью* между множеством A и множеством B называется множество

$$A \setminus B := \{x \in M \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\},$$

состоящее из тех элементов множества A, которые не содержатся в множестве B (рис. 4).

Разность между множеством M и содержащимся в нем подмножеством A обычно называют *дополнением* A в M и обозначают через $C_M A$ или CA, когда из контекста ясно, в каком множестве ищется дополнение к A (рис. 5).

Пример. В качестве иллюстрации взаимодействия введенных понятий проверим следующие соотношения (так называемые правила де Моргана[1]):

$$C_M(A \cup B) = C_M A \cap C_M B, \tag{1}$$

$$C_M(A \cap B) = C_M A \cup C_M B. \tag{2}$$

◀ Докажем, например, первое из этих равенств:

$$(x \in C_M(A \cup B)) \Rightarrow (x \notin (A \cup B)) \Rightarrow ((x \notin A) \wedge (x \notin B)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x \in C_M A) \wedge (x \in C_M B) \Rightarrow (x \in (C_M A \cap C_M B)).$$

Таким образом, установлено, что

$$C_M(A \cup B) \subset (C_M A \cap C_M B). \tag{3}$$

С другой стороны,

[1] А. де Морган (1806–1871) — шотландский математик.

$$\begin{aligned}(x \in (C_M A \cap C_M B)) \Rightarrow ((x \in C_M A) \wedge (x \in C_M B)) \Rightarrow \\ \Rightarrow ((x \notin A) \wedge (x \notin B)) \Rightarrow (x \notin (A \cup B)) \Rightarrow (x \in C_M(A \cup B)),\end{aligned}$$

т. е.

$$(C_M A \cap C_M B) \subset C_M(A \cup B). \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует (1). ►

d. *Прямое* (*декартово*) *произведение множеств.* Для любых двух множеств A, B можно образовать новое множество — пару $\{A, B\} = \{B, A\}$, элементами которого являются множества A и B и только они. Это множество состоит из двух элементов, если $A \neq B$, и из одного элемента, если $A = B$.

Указанное множество называют *неупорядоченной парой* множеств A, B, в отличие от упорядоченной пары (A, B), в которой элементы A, B наделены дополнительными признаками, выделяющими первый и второй элементы пары $\{A, B\}$. Равенство

$$(A, B) = (C, D)$$

упорядоченных пар по определению означает, что $A = C$ и $B = D$. В частности, если $A \neq B$, то $(A, B) \neq (B, A)$.

Пусть теперь X и Y — произвольные множества. Множество

$$X \times Y := \{(x, y) \mid (x \in X) \wedge (y \in Y)\},$$

образованное всеми упорядоченными парами (x, y), первый член которых есть элемент из X, а второй член — элемент из Y, называется *прямым* или *декартовым произведением множеств* X и Y (в таком порядке!).

Из определения прямого произведения и сделанных выше замечаний об упорядоченной паре явствует, что, вообще говоря, $X \times Y \neq Y \times X$. Равенство имеет место, лишь если $X = Y$. В последнем случае вместо $X \times X$ пишут коротко X^2.

Прямое произведение называют также декартовым произведением в честь Декарта[1)], который независимо от Ферма[2)] пришел через систему

[1)] Р. Декарт (1596 – 1650) — выдающийся французский философ, математик и физик, внесший фундаментальный вклад в теорию научного мышления и познания.

[2)] П. Ферма (1601 – 1665) — замечательный французский математик, юрист по специальности. Ферма стоял у истоков ряда областей современной математики: анализ, аналитическая геометрия, теория вероятностей, теория чисел.

координат к аналитическому языку геометрии. Известная всем система декартовых координат в плоскости превращает эту плоскость именно в прямое произведение двух числовых осей. На этом знакомом объекте наглядно проявляется зависимость декартова произведения от порядка сомножителей. Например, упорядоченным парам $(0,1)$ и $(1,0)$ отвечают различные точки плоскости.

В упорядоченной паре $z=(x_1,x_2)$, являющейся элементом прямого произведения $Z=X_1\times X_2$ множеств X_1 и X_2, элемент x_1 называется *первой проекцией пары* z и обозначается через $\mathrm{pr}_1\, z$, а элемент x_2 — *второй проекцией пары* z и обозначается через $\mathrm{pr}_2\, z$.

Проекции упорядоченной пары по аналогии с терминологией аналитической геометрии часто называют (первой и второй) *координатами пары*.

Упражнения

В задачах 1, 2, 3 через A, B, C обозначены подмножества некоторого множества M.

1. Проверьте соотношения

a) $(A\subset C)\wedge(B\subset C)\Leftrightarrow((A\cup B)\subset C)$;

b) $(C\subset A)\wedge(C\subset B)\Leftrightarrow(C\subset(A\cap B))$;

c) $C_M(C_M A)=A$;

d) $(A\subset C_M B)\Leftrightarrow(B\subset C_M A)$;

e) $(A\subset B)\Leftrightarrow(C_M A\supset C_M B)$.

2. Покажите, что

a) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=: A\cup B\cup C$;

b) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=: A\cap B\cap C$;

c) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

d) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

3. Проверьте взаимосвязь (двойственность) операций объединения и пересечения:

a) $C_M(A\cup B)=C_M A\cap C_M B$;

b) $C_M(A\cap B)=C_M A\cup C_M B$.

4. Проиллюстрируйте геометрически декартово произведение

a) двух отрезков (прямоугольник);

b) двух прямых (плоскость);

c) прямой и окружности (цилиндрическая поверхность);

d) прямой и круга (цилиндр);

e) двух окружностей (тор);

f) окружности и круга (полноторие).

5. Множество $\Delta = \{(x_1, x_2) \in X^2 \mid x_1 = x_2\}$ называется *диагональю декартова квадрата* X^2 множества X.

Проиллюстрируйте геометрически диагонали множеств, полученных в пунктах a), b), e) задачи 4.

6. Покажите, что

a) $(X \times Y = \varnothing) \Leftrightarrow (X = \varnothing) \vee (Y = \varnothing)$,

а если $X \times Y \neq \varnothing$, то

b) $(A \times B \subset X \times Y) \Leftrightarrow (A \subset X) \wedge (B \subset Y)$,

c) $(X \times Y) \cup (Z \times Y) = (X \cup Z) \times Y$,

d) $(X \times Y) \cap (X' \times Y') = (X \cap X') \times (Y \cap Y')$.

Здесь $\varnothing$ — символ пустого множества, т. е. множества, не содержащего элементов.

7. Сравнив соотношения задачи 3 с соотношениями a), b) из упражнения 2 к § 1, установите соответствие между логическими операциями $\neg$, $\wedge$, $\vee$ на высказываниях и операциями C, $\cap$, $\cup$ на множествах.

§ 3. Функция

1. Понятие функции (отображения). Перейдем теперь к описанию фундаментального не только для математики понятия функциональной зависимости.

Пусть X и Y — какие-то множества.

Говорят, что имеется *функция*, определенная на X со значениями в Y, если в силу некоторого закона f каждому элементу $x \in X$ соответствует элемент $y \in Y$.

В этом случае множество X называется *областью определения* функции; символ x его общего элемента — *аргументом функции* или *независимой переменной*; соответствующий конкретному значению $x_0 \in X$ аргумента x элемент $y_0 \in Y$ называют *значением функции на элементе* x_0 или значением функции при значении аргумента $x = x_0$ и обозначают через $f(x_0)$. При изменении аргумента $x \in X$ значения $y = f(x) \in Y$, вообще говоря, меняются в зависимости от значений x. По этой причине величину $y = f(x)$ часто называют *зависимой переменной*.

Множество

$$f(X) := \{y \in Y \mid \exists x\ ((x \in X) \wedge (y = f(x)))\}$$

всех значений функции, которые она принимает на элементах множества X, будем называть *множеством значений* или *областью значений функции*.

В зависимости от природы множеств X, Y термин «функция» в различных отделах математики имеет ряд полезных синонимов: *отображение*, *преобразование*, *морфизм*, *оператор*, *функционал*. Отображение — наиболее распространенный из них, и мы его тоже часто будем употреблять.

Для функции (отображения) приняты следующие обозначения:

$$f\colon X \to Y, \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

Когда из контекста ясно, каковы область определения и область значений функции, используют также обозначения $x \mapsto f(x)$ или $y = f(x)$, а чаще обозначают функцию вообще одним лишь символом f.

Две функции f_1, f_2 считаются *совпадающими* или *равными*, если они имеют одну и ту же область определения X и на любом элементе $x \in X$ значения $f_1(x)$, $f_2(x)$ этих функций совпадают. В этом случае пишут $f_1 = f_2$.

Если $A \subset X$, а $f\colon X \to Y$ — некоторая функция, то через $f|A$ или $f|_A$ обозначают функцию $\varphi\colon A \to Y$, совпадающую с f на множестве A. Точнее, $f|_A(x) := \varphi(x)$, если $x \in A$. Функция $f|_A$ называется *сужением* или *ограничением* функции f на множество A, а функция $f\colon X \to Y$ по отношению к функции $\varphi = f|_A\colon A \to Y$ называется *распространением* или *продолжением* функции φ на множество X.

Мы видим, что иногда приходится рассматривать функцию $\varphi\colon A \to Y$, определенную на подмножестве A некоторого множества X, причем область значений $\varphi(A)$ функции φ тоже может оказаться не совпадающим с Y подмножеством множества Y. В связи с этим для обозначения любого множества X, содержащего область определения функции, иногда используется термин *область отправления функции*, а любое множество Y, содержащее область значений функции, называют тогда *областью ее прибытия*.

Итак, задание функции (отображения) предполагает указание тройки (X, f, Y), где

X — отображаемое множество, или область определения функции;

Y — множество, в которое идет отображение, или область прибытия функции;

f — закон, по которому каждому элементу $x \in X$ сопоставляется определенный элемент $y \in Y$.

Наблюдаемая здесь несимметричность между X и Y отражает то, что отображение идет именно из X в Y.

Рассмотрим некоторые примеры функций.

Пример 1. Формулы $l = 2\pi r$ и $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ устанавливают функциональную зависимость длины окружности l и объема шара V от радиуса r. По смыслу каждая из этих формул задает свою функцию $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, определенную на множестве $\mathbb{R}_+$ положительных действительных чисел со значениями в том же множестве $\mathbb{R}_+$.

Пример 2. Пусть X — множество инерциальных систем координат, а $c\colon X \to \mathbb{R}$ — функция, состоящая в том, что каждой инерциальной системе координат $x \in X$ сопоставляется измеренное относительно нее значение $c(x)$ скорости света в вакууме. Функция $c\colon X \to \mathbb{R}$ постоянна, т. е. при любом $x \in X$ она имеет одно и то же значение c (это фундаментальный экспериментальный факт).

Пример 3. Отображение $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (прямого произведения $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ оси времени $\mathbb{R}_t$ и пространственной оси $\mathbb{R}_x$) на себя же, задаваемое формулами

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ t' &= t, \end{aligned}$$

есть классическое преобразование Галилея для перехода от одной инерциальной системы координат (x, t) к другой — (x', t'), движущейся относительно первой со скоростью v.

Той же цели служит отображение $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, задаваемое соотношениями

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \\ t' &= \frac{t - \left(\frac{v}{c^2}\right) x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Это — известное (одномерное) *преобразование Лоренца*[1], играющее фундаментальную роль в специальной теории относительности; c — скорость света.

Пример 4. *Проектирование* $\mathrm{pr}_1\colon X_1 \times X_2 \to X_1$, задаваемое соответствием $X_1 \times X_2 \ni (x_1, x_2) \xmapsto{\mathrm{pr}_1} x_1 \in X_1$, очевидно, является функцией. Аналогичным образом определяется вторая проекция $\mathrm{pr}_2\colon X_1 \times X_2 \to \to X_2$.

Пример 5. Пусть $\mathcal{P}(M)$ — множество всех подмножеств множества M. Каждому множеству $A \in \mathcal{P}(M)$ поставим в соответствие множество $C_M A \in \mathcal{P}(M)$, т. е. дополнение к A в M. Тогда получим отображение $C_M\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ множества $\mathcal{P}(M)$ в себя.

Пример 6. Пусть $E \subset M$. Вещественнозначную функцию $\chi_E : M \to \mathbb{R}$, определенную на множестве M условиями $(\chi_E(x) = 1,\ \text{если } x \in \in E) \wedge (\chi_E(x) = 0,\ \text{если } x \in C_M E)$, называют *характеристической функцией множества* E.

Пример 7. Пусть $M(X;Y)$ — множество отображений множества X в множество Y, а x_0 — фиксированный элемент из X. Любой функции $f \in M(X;Y)$ поставим в соответствие ее значение $f(x_0) \in Y$ на элементе x_0. Этим определяется функция $F\colon M(X;Y) \to Y$. В частности, если $Y = \mathbb{R}$, т. е. если Y есть множество действительных чисел, то каждой функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ функция $F\colon M(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ставит в соответствие число $F(f) = f(x_0)$. Таким образом, F есть функция, определенная на функциях. Для удобства такие функции называют *функционалами*.

Пример 8. Пусть Γ — множество кривых, лежащих на поверхности (например, земной) и соединяющих две ее фиксированные точки. Каждой кривой $\gamma \in \Gamma$ можно сопоставить ее длину. Тогда мы получим функцию $F\colon \Gamma \to \mathbb{R}$, которую часто приходится рассматривать с целью отыскания кратчайшей линии или, как говорят, *геодезической* линии между данными точками на поверхности.

Пример 9. Рассмотрим множество $M(\mathbb{R};\mathbb{R})$ всех вещественнозначных функций, определенных на всей числовой оси $\mathbb{R}$. Фиксировав число $a \in \mathbb{R}$, каждой функции $f \in M(\mathbb{R};\mathbb{R})$ поставим в соответствие

[1] Г. А. Лоренц (1853 – 1928) — выдающийся голландский физик-теоретик. Указанные преобразования Пуанкаре назвал в честь Лоренца, стимулировавшего исследование симметрий уравнений Максвелла. Они существенно использованы Эйнштейном в сформулированной им в 1905 году специальной теории относительности.

функцию $f_a \in M(\mathbb{R};\mathbb{R})$, связанную с ней соотношением $f_a(x) = (x + a)$. Функцию $f_a(x)$ обычно называют *сдвигом* на a функции $f(x)$. Возникающее при этом отображение $A\colon M(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to M(\mathbb{R};\mathbb{R})$ называется *оператором сдвига*. Итак, оператор A определен на функциях и значениями его также являются функции: $f_a = A(f)$.

Рассмотренный пример мог бы показаться искусственным, если бы мы на каждом шагу не видели реальные операторы. Так, любой радиоприемник есть оператор $f \overset{F}{\longmapsto} \widehat{f}$, преобразующий электромагнитные сигналы f в звуковые $\widehat{f}$; любой из наших органов чувств является оператором (преобразователем) со своими областью определения и областью значений.

Пример 10. Положение частицы в пространстве определяется упорядоченной тройкой чисел (x, y, z), называемой ее координатами в пространстве. Множество всех таких упорядоченных троек можно себе мыслить как прямое произведение $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ трех числовых осей $\mathbb{R}$.

При движении в каждый момент времени t частица находится в некоторой точке пространства $\mathbb{R}^3$ с координатами $(x(t), y(t), z(t))$. Таким образом, движение частицы можно интерпретировать как отображение $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, где $\mathbb{R}$ — ось времени, а $\mathbb{R}^3$ — трехмерное пространство.

Если система состоит из n частиц, то ее конфигурация задается положением каждой из частиц, т. е. упорядоченным набором $(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots; x_n, y_n, z_n)$ из $3n$ чисел. Множество всех таких наборов называется *конфигурационным пространством системы n частиц*. Следовательно, конфигурационное пространство системы n частиц можно интерпретировать как прямое произведение $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \ldots \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{3n}$ n экземпляров пространства $\mathbb{R}^3$.

Движению системы из n частиц отвечает отображение $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3n}$ оси времени в конфигурационное пространство системы.

Пример 11. Потенциальная энергия U механической системы связана с взаимным расположением частиц системы, т. е. определяется конфигурацией, которую имеет система. Пусть Q — множество реально возможных конфигураций системы. Это некоторое подмножество конфигурационного пространства системы. Каждому положению $q \in Q$ отвечает некоторое значение $U(q)$ потенциальной энергии системы. Таким образом, потенциальная энергия есть функция $U\colon Q \to \mathbb{R}$, определенная на подмножестве Q конфигурационного пространства со значениями в области $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Пример 12. Кинетическая энергия K системы n материальных частиц зависит от их скоростей. Полная механическая энергия системы $E = K + U$, т. е. сумма кинетической и потенциальной энергий, зависит, таким образом, как от конфигурации q системы, так и от набора v скоростей ее частиц. Как и конфигурация q частиц в пространстве, набор v, состоящий из n трехмерных векторов, может быть задан упорядоченным набором из $3n$ чисел. Упорядоченные пары (q, v), отвечающие состояниям нашей системы, образуют подмножество Φ в прямом произведении $\mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} = \mathbb{R}^{6n}$, называемом *фазовым пространством системы n частиц* (в отличие от конфигурационного пространства $\mathbb{R}^{3n}$).

Полная энергия системы является, таким образом, функцией $E\colon \Phi \to \mathbb{R}$, определенной на подмножестве Φ фазового пространства $\mathbb{R}^{6n}$ и принимающей значения в области $\mathbb{R}$ действительных чисел.

В частности, если система замкнута, т. е. на нее не действуют внешние силы, то по закону сохранения энергии в любой точке множества Φ состояний системы функция E будет иметь одно и то же значение $E_0 \in \mathbb{R}$.

2. Простейшая классификация отображений. Когда функцию $f\colon X \to Y$ называют отображением, значение $f(x) \in Y$, которое она принимает на элементе $x \in X$, обычно называют *образом* элемента x.

Образом множества $A \subset X$ при отображении $f\colon X \to Y$ называют множество

$$f(A) := \{y \in Y \mid \exists x\ ((x \in A) \land (y = f(x)))\}$$

тех элементов Y, которые являются образами элементов множества A.

Множество

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

тех элементов X, образы которых содержатся в B, называют *прообразом* (или *полным прообразом*) множества $B \subset Y$ (рис. 6).

Про отображение $f\colon X \to Y$ говорят, что оно

сюръективно (или есть отображение X *на* Y), если $f(X) = Y$;

инъективно (или есть *вложение, инъекция*), если для любых элементов x_1, x_2 множества X

$$(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2),$$

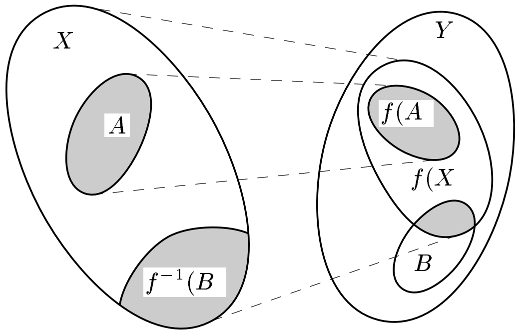


Рис. 6.

т. е. различные элементы имеют различные образы;

биективно (или *взаимно однозначно*), если оно сюръективно и инъективно одновременно.

Если отображение $f\colon X \to Y$ биективно, т. е. является взаимно однозначным соответствием между элементами множеств X и Y, то естественно возникает отображение

$$f^{-1}\colon Y \to X,$$

которое определяется следующим образом: если $f(x) = y$, то $f^{-1}(y) = x$, т. е. элементу $y \in Y$ ставится в соответствие тот элемент $x \in X$, образом которого при отображении f является y. В силу сюръективности f такой элемент $x \in X$ найдется, а ввиду инъективности f он единственный. Таким образом, отображение f^{-1} определено корректно. Это отображение называют *обратным* по отношению к исходному отображению f.

Из построения обратного отображения видно, что $f^{-1}\colon Y \to X$ само является биективным и что обратное к нему отображение $(f^{-1})^{-1}: X \to Y$ совпадает с $f\colon X \to Y$.

Таким образом, свойство двух отображений быть обратными является взаимным: если f^{-1} — обратное для f, то, в свою очередь, f — обратное для f^{-1}.

Заметим, что символ $f^{-1}(B)$ прообраза множества $B \subset Y$ ассоциируется с символом f^{-1} обратной функции, однако следует иметь в виду, что прообраз множества определен для любого отображения $f\colon X \to Y$, даже если оно не является биективным и, следовательно, не имеет обратного.

3. Композиция функций и взаимно обратные отображения. Богатым источником новых функций, с одной стороны, и способом расчленения сложных функций на более простые — с другой, является операция композиции отображений.

Если отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ таковы, что одно из них (в нашем случае g) определено на множестве значений другого (f), то можно построить новое отображение

$$g \circ f\colon X \to Z,$$

значения которого на элементах множества X определяются формулой

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Построенное составное отображение $g \circ f$ называют *композицией* отображения f и отображения g (в таком порядке!).

Рисунок 7 иллюстрирует конструкцию композиции отображений f и g.

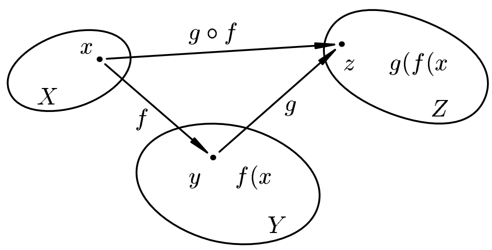


Рис. 7.

С композицией отображений вы уже неоднократно встречались как в геометрии, рассматривая композицию движений плоскости или пространства, так и в алгебре при исследовании «сложных» функций, полученных композицией простейших элементарных функций.

Операцию композиции иногда приходится проводить несколько раз подряд, и в этой связи полезно отметить, что она ассоциативна, т. е.

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

◄ Действительно,

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = \\ = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x). \end{aligned} \quad ►$$

Это обстоятельство, как и в случае сложения или умножения нескольких чисел, позволяет опускать скобки, предписывающие порядок спаривания.

Если в композиции $f_n \circ \ldots \circ f_1$ все члены одинаковы и равны f, то ее обозначают коротко f^n.

Хорошо известно, например, что корень квадратный из положительного числа a можно вычислить последовательными приближениями по формуле

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$

начиная с любого начального приближения $x_0 > 0$. Это не что иное, как последовательное вычисление $f^n(x_0)$, где $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. Такая процедура, когда вычисленное на предыдущем шаге значение функции на следующем шаге становится ее аргументом, называется *итерационным процессом.* Итерационные процессы широко используются в математике.

Отметим также, что даже в том случае, когда обе композиции $g \circ f$ и $f \circ g$ определены, вообще говоря,

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Действительно, возьмем, например, двухэлементное множество $\{a, b\}$ и отображения $f\colon \{a, b\} \to a$, $g\colon \{a, b\} \to b$. Тогда, очевидно, $g \circ f\colon \{a, b\} \to b$, в то время как $f \circ g\colon \{a, b\} \to a$.

Отображение $f\colon X \to X$, сопоставляющее каждому элементу множества X его самого, т. е. $x \overset{f}{\longmapsto} x$, будем обозначать через e_X и называть *тождественным отображением множества* X.

Лемма.

$$(g \circ f = e_X) \Rightarrow (g \text{ \textit{сюръективно}}) \wedge (f \text{ \textit{инъективно}}).$$

◀ Действительно, если $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ и $g \circ f = e_X\colon X \to X$, то

$$X = e_X(X) = (g \circ f)(X) = g(f(X)) \subset g(Y)$$

и, значит, g сюръективно.

Далее, если $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$, то

$$(x_1 \neq x_2) \Rightarrow (e_X(x_1) \neq e_X(x_2)) \Rightarrow ((g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)) \Rightarrow \\ \Rightarrow (g(f(x_1)) \neq g(f(x_2)) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2)),$$

следовательно, f инъективно. ►

Через операцию композиции отображений можно описать взаимно обратные отображения.

Утверждение. *Отображения* $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ *являются биективными и взаимно обратными в том и только в том случае, когда* $g \circ f = e_X$ *и* $f \circ g = e_Y$.

◄ В силу леммы одновременное выполнение условий $g \circ f = e_X$ и $f \circ g = e_Y$ гарантирует сюръективность и инъективность, т. е. биективность каждого из отображений f, g.

Эти же условия показывают, что $y = f(x)$ в том и только в том случае, когда $x = g(y)$. ►

Выше мы исходили из явного построения обратного отображения. Из доказанного утверждения следует, что мы могли бы дать менее наглядное, но зато более симметричное определение взаимно обратных отображений как таких, которые удовлетворяют двум условиям: $g \circ f = e_X$ и $f \circ g = e_Y$ (см. в этой связи задачу 6 в конце параграфа).

4. Функция как отношение. График функции. В заключение вернемся вновь к самому понятию функции. Отметим, что оно претерпело длительную и довольно сложную эволюцию.

Термин «функция» впервые появился в период 1673–1692 г. у Г. Лейбница (правда, в некотором более узком смысле). В смысле, близком к современному, этот термин установился к 1698 г. в переписке Иоганна Бернулли[1)] с Лейбницем.

Описание функции, почти совпадающее с приведенным в начале параграфа, встречается уже у Эйлера (середина XVIII столетия). К началу XIX века оно появляется уже в учебниках математики С. Лакруа,[2)] переведенных на русский язык. Активным сторонником такого понимания функции был Н. И. Лобачевский[3)]. Более того, Н. И. Лобачевский

[1)] И. Бернулли (1667 – 1748) — один из ранних представителей знаменитого семейства швейцарских ученых Бернулли; аналитик, геометр, механик. Стоял у истоков вариационного исчисления. Дал первое систематическое изложение дифференциального и интегрального исчисления.

[2)] С. Ф. Лакруа (1765 – 1843) — французский математик и педагог (профессор Нормальной и Политехнической школ, член Парижской академии наук).

[3)] Н. И. Лобачевский (1792 – 1856) — великий русский ученый, которому, наряду с великим немецким естествоиспытателем К. Ф. Гауссом (1777 – 1855) и выдающимся указал, что «обширный взгляд теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа одни с другими в связи понимать как бы *данными вместе*»[3]. Это и есть идея точного определения понятия функции, которое мы теперь собираемся изложить.

Приведенное в начале параграфа описание понятия функции представляется весьма динамичным и отражающим суть дела. Однако с точки зрения современных канонов оно не может быть названо определением, ибо использует эквивалентное функции понятие соответствия. Для сведения читателя мы укажем здесь, каким образом дается определение функции на языке теории множеств. (Интересно, что понятие отношения, к которому мы сейчас обратимся, и у Лейбница предшествовало понятию функции.)

a. Отношение. *Отношением* $\mathcal{R}$ называют любое множество упорядоченных пар (x, y).

Множество X первых элементов упорядоченных пар, составляющих $\mathcal{R}$, называют *областью определения отношения* $\mathcal{R}$, а множество Y вторых элементов этих пар — *областью значений отношения* $\mathcal{R}$.

Таким образом, отношение $\mathcal{R}$ можно интерпретировать как подмножество $\mathcal{R}$ прямого произведения $X \times Y$. Если $X \subset X'$ и $Y \subset Y'$, то, разумеется, $\mathcal{R} \subset X \times Y \subset X' \times Y'$, поэтому одно и то же отношение может задаваться как подмножество различных множеств.

Любое множество, содержащее область определения отношения, называют *областью отправления* этого отношения. Множество, содержащее область значений отношения, называют *областью прибытия* отношения.

Вместо того чтобы писать $(x, y) \in \mathcal{R}$, часто пишут $x\,\mathcal{R}\,y$ и говорят, что *x связано с y отношением $\mathcal{R}$*.

Если $\mathcal{R} \subset X^2$, то говорят, что *отношение $\mathcal{R}$ задано на X*.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 13. Диагональ

$$\Delta = \{(a, b) \in X^2 \mid a = b\}$$

есть подмножество X^2, задающее отношение равенства между элементами множества X. Действительно, $a \Delta b$ означает, что $(a, b) \in \Delta$, т. е. $a = b$.

венгерским математиком Я. Бойяи (1802 – 1860), принадлежит честь открытия неевклидовой геометрии, носящей его имя.

[3] Лобачевский Н. И. Полное собр. соч. Т. 5. М. – Л.: Гостехиздат, 1951. С. 44.

Пример 14. Пусть X — множество прямых в плоскости.

Две прямые $a \in X$ и $b \in X$ будем считать находящимися в отношении $\mathcal{R}$ и будем писать $a\,\mathcal{R}\,b$, если прямая b параллельна прямой a. Ясно, что тем самым в X^2 выделяется множество $\mathcal{R}$ пар (a, b) таких, что $a\,\mathcal{R}$ b. Из курса геометрии известно, что отношение параллельности между прямыми обладает следующими свойствами:

$a\,\mathcal{R}\,a$ (рефлексивность);

$a\,\mathcal{R}\,b \Rightarrow b\,\mathcal{R}\,a$ (симметричность);

$(a\,\mathcal{R}\,b) \wedge (b\,\mathcal{R}\,c) \Rightarrow a\,\mathcal{R}\,c$ (транзитивность).

Любое отношение $\mathcal{R}$, обладающее перечисленными тремя свойствами, т. е. рефлексивное[1)], симметричное и транзитивное, принято называть *отношением эквивалентности*. Отношение эквивалентности обозначается специальным символом $\sim$, который в этом случае ставится вместо буквы $\mathcal{R}$, обозначающей отношение. Итак, в случае отношения эквивалентности будем писать $a \sim b$ вместо $a\,\mathcal{R}\,b$ и говорить, что a *эквивалентно* b.

Пример 15. Пусть M — некоторое множество, а $X = \mathcal{P}(M)$ — совокупность всех его подмножеств. Для двух произвольных элементов a и b множества $X = \mathcal{P}(M)$, т. е. для двух подмножеств a и b множества M, всегда выполнена одна из следующих трех возможностей: a содержится в b; b содержится в a; a не является подмножеством b и b не является подмножеством a.

Рассмотрим в качестве отношения $\mathcal{R}$ в X^2 отношение включения для подмножеств X, т. е. положим по определению

$$a\,\mathcal{R}\,b := (a \subset b).$$

Это отношение, очевидно, обладает следующими свойствами:

$a\,\mathcal{R}\,a$ (рефлексивность);

$(a\,\mathcal{R}\,b) \wedge (b\,\mathcal{R}\,c) \Rightarrow a\,\mathcal{R}\,c$ (транзитивность);

$(a\,\mathcal{R}\,b) \wedge (b\,\mathcal{R}\,a) \Rightarrow a\,\Delta\,b$, т. е. $a = b$ (антисимметричность).

Отношение между парами элементов некоторого множества X, обладающее указанными тремя свойствами, принято называть отношением

[1)] Полезно для полноты отметить, что отношение $\mathcal{R}$ называется *рефлексивным*, если его область определения и область значений совпадают и для любого элемента a из области определения отношения $\mathcal{R}$ выполнено $a\,\mathcal{R}\,a$.

частичного порядка на множестве X. Для отношения частичного порядка вместо $a \mathcal{R} b$ часто пишут $a \preccurlyeq b$ и говорят, что b *следует за* a.

Если кроме отмеченных двух свойств, определяющих отношение частичного порядка, выполнено условие, что

$$\forall a \, \forall b \, ((a \mathcal{R} b) \vee (b \mathcal{R} a)),$$

т. е. любые два элемента множества X сравнимы, то отношение $\mathcal{R}$ называется *отношением порядка*, а множество X с определенным на нем отношением порядка называется *линейно упорядоченным*.

Происхождение этого термина связано с наглядным образом числовой прямой $\mathbb{R}$, на которой действует отношение $a \leqslant b$ между любой парой вещественных чисел.

b. Функция и график функции. Отношение $\mathcal{R}$ называется *функциональным*, если

$$(x \mathcal{R} y_1) \wedge (x \mathcal{R} y_2) \Rightarrow (y_1 = y_2).$$

Функциональное отношение называют *функцией*.

В частности, если X и Y — два не обязательно различных множества, то определенное на X отношение $\mathcal{R} \subset X \times Y$ между элементами x из X и y из Y *функционально*, если для любого $x \in X$ существует и притом единственный элемент $y \in Y$, находящийся с x в рассматриваемом отношении, т. е. такой, для которого $x \mathcal{R} y$.

Такое функциональное отношение $\mathcal{R} \subset X \times Y$ и есть *отображение из X в Y*, или *функция из X в Y*.

Функции мы чаще всего будем обозначать символом f. Если f — функция, то вместо $x \, f \, y$ мы по-прежнему будем писать $y = f(x)$ или $x \overset{f}{\longmapsto} y$, называя $y = f(x)$ *значением* функции f на элементе x или *образом* элемента x при отображении f.

Сопоставление по «закону» f элементу $x \in X$ «соответствующего» элемента $y \in Y$, о чем говорилось в исходном описании понятия функции, как видим, состоит в том, что для каждого $x \in X$ указывается тот единственный элемент $y \in Y$, что $x \, f \, y$, т. е. $(x, y) \in f \subset X \times Y$.

Графиком функции $f \colon X \to Y$, понимаемой в смысле исходного описания, называют подмножество Γ прямого произведения $X \times Y$, элементы которого имеют вид $(x, f(x))$. Итак,

$$\Gamma := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}.$$

В новом описании понятия функции, когда мы ее задаем как подмножество $f \subset X \times Y$, конечно, уже нет разницы между функцией и ее графиком.

Мы указали на принципиальную возможность формального теоретико-множественного определения функции, сводящуюся по существу к отождествлению функции и ее графика. Однако мы не собираемся в дальнейшем ограничиваться только такой формой задания функции. Функциональное отношение иногда удобно задать в аналитической форме, иногда таблицей значений, иногда словесным описанием процесса (алгоритма), позволяющего по данному $x \in X$ находить соответствующий элемент $y \in Y$. При каждом таком способе задания функции имеет смысл вопрос о ее задании с помощью графика, что формулируют так: построить график функции. Задание числовых функций хорошим графическим изображением часто бывает полезно тем, что делает наглядным основные качественные особенности функциональной зависимости. Для расчетов графики тоже можно использовать (номограммы), но, как правило, в тех случаях, когда расчет не требует высокой точности. Для точных расчетов используют табличное задание функции, а чаще — алгоритмическое, реализуемое в вычислительных машинах.

Упражнения

1. *Композиция* $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ *отношений* $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1 := \{(x, z) \mid \exists y \ (x \, \mathcal{R}_1 \, y) \wedge (y \, \mathcal{R}_2 \, z)\}.$$

В частности, если $\mathcal{R}_1 \subset X \times Y$ и $\mathcal{R}_2 \subset Y \times Z$, то $\mathcal{R} = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1 \subset X \times Z$, причем

$$x \, \mathcal{R} \, z := \exists y \ ((y \in Y) \wedge (x \, \mathcal{R}_1 \, y) \wedge (y \, \mathcal{R}_2 \, z)).$$

a) Пусть Δ_X — диагональ множества X^2, а Δ_Y — диагональ множества Y^2. Покажите, что если отношения $\mathcal{R}_1 \subset X \times Y$ и $\mathcal{R}_2 \subset Y \times X$ таковы, что $(\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1 = \Delta_X) \wedge (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 = \Delta_Y)$, то оба они функциональны и задают взаимно обратные отображения множеств X, Y.

b) Пусть $\mathcal{R} \subset X^2$. Покажите, что условие транзитивности отношения $\mathcal{R}$ равносильно тому, что $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$.

c) Отношение $\mathcal{R}' \subset Y \times X$ называется *транспонированным* отношением $\mathcal{R} \subset X \times Y$, если $(y \, \mathcal{R}' \, x) \Leftrightarrow (x \, \mathcal{R} \, y)$.

Покажите, что антисимметричность отношения $\mathcal{R} \subset X^2$ равносильна условию $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}' \subset \Delta_X$.

d) Проверьте, что любые два элемента множества X связаны (в том или ином порядке) отношением $\mathcal{R} \subset X^2$, если и только если $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}' = X^2$.

2. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение. Прообраз $f^{-1}(y) \subset X$ элемента $y \in \in Y$ называется *слоем* над y.

a) Укажите слои для отображений

$$\mathrm{pr}_1\colon X_1 \times X_2 \to X_1, \quad \mathrm{pr}_2\colon X_1 \times X_2 \to X_2.$$

b) Элемент $x_1 \in X$ будем считать связанным с элементом $x_2 \in X$ отношением $\mathcal{R} \subset X^2$ и писать $x_1 \,\mathcal{R}\, x_2$, если $f(x_1) = f(x_2)$, т. е. если x_1 и x_2 лежат в одном слое.

Проверьте, что $\mathcal{R}$ есть отношение эквивалентности.

c) Покажите, что слои отображения $f\colon X \to Y$ не пересекаются, а объединением слоев является все множество X.

d) Проверьте, что любое отношение эквивалентности между элементами множества позволяет представить это множество в виде объединения непересекающихся классов эквивалентных элементов.

3. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение из X в Y. Покажите, что

если A и B — подмножества X, то

a) $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B)) \not\Rightarrow (A \subset B)$,

b) $(A \neq \varnothing) \Rightarrow (f(A) \neq \varnothing)$,

c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,

d) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

если A' и B' — подмножества Y, то

e) $(A' \subset B') \Rightarrow (f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B'))$,

f) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$,

g) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$;

если $Y \supset A' \supset B'$, то

h) $f^{-1}(A' \setminus B') = f^{-1}(A') \setminus f^{-1}(B')$,

i) $f^{-1}(C_Y A') = C_X f^{-1}(A')$;

для любого множества $A \subset X$ и любого множества $B' \subset Y$

j) $f^{-1}(f(A)) \supset A$,

k) $f(f^{-1}(B')) \subset B'$.

4. Покажите, что отображение $f\colon X \to Y$

a) сюръективно, если и только если для любого множества $B' \subset Y$ справедливо $f(f^{-1}(B')) = B'$;

b) биективно, если и только если для любого множества $A \subset X$ и любого множества $B' \subset Y$ справедливо

$$\big(f^{-1}(f(A)) = A\big) \wedge \big(f(f^{-1}(B')) = B'\big).$$

5. Проверьте эквивалентность следующих утверждений относительно отображения $f\colon X \to Y$:

a) f инъективно;

b) $f^{-1}(f(A)) = A$ для любого множества $A \subset X$;

c) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ для любой пары A, B подмножеств X;

d) $f(A) \cap f(B) = \varnothing \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$;

e) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$, если $X \supset A \supset B$.

6. a) Если отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ таковы, что $g \circ f = e_X$, где e_X — тождественное отображение множества X, то g называется *левым обратным отображением* для f, а f — *правым обратным* для g. Покажите, что, в отличие от единственного обратного отображения, может существовать много односторонних обратных отображений.

Рассмотрите, например, отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$, где X — одноэлементное, а Y — двухэлементное множества, или отображения последовательностей

$$(x_1, \dots, x_n, \dots) \xmapsto{f_a} (a, x_1, \dots, x_n, \dots),$$
$$(y_2, \dots, y_n, \dots) \xleftarrow{g} (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots).$$

b) Пусть $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — биективные отображения. Покажите, что отображение $g \circ f\colon X \to Z$ биективно и что $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

c) Покажите, что для любых отображений $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ и любого множества $C \subset Z$ справедливо равенство

$$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)).$$

d) Проверьте, что отображение $F\colon X \times Y \to Y \times X$, задаваемое соответствием $(x, y) \mapsto (y, x)$, биективно. Опишите взаимосвязь графиков взаимно обратных отображений $f\colon X \to Y$ и $f^{-1}\colon Y \to X$.

7. a) Покажите, что при любом отображении $f\colon X \to Y$ отображение $F\colon X \to X \times Y$, определяемое соответствием $x \xmapsto{F} (x, f(x))$, является инъективным.

b) Пусть частица движется равномерно по окружности Y; пусть X — ось времени и $x \xmapsto{f} y$ — соответствие между моментом времени $x \in X$ и положением $y = f(x) \in Y$ частицы. Изобразите график функции $f\colon X \to Y$ в $X \times Y$.

8. a) Для каждого из разобранных в § 3 примеров 1 – 12 выясните, является ли указанное в нем отображение сюръективным, инъективным, биективным или оно не принадлежит ни одному из указанных классов.

b) Закон Ома $I = V/R$ связывает силу тока I в проводнике с напряжением V на концах проводника и сопротивлением R проводника. Укажите, отображение $O\colon X \to Y$ каких множеств соответствует закону Ома. Подмножеством какого множества является отношение, отвечающее закону Ома?

c) Найдите преобразования G^{-1}, L^{-1}, обратные к преобразованиям Галилея и Лоренца.

9. a) Множество $S \subset X$ называется *устойчивым* относительно отображения $f\colon X \to X$, если $f(S) \subset S$. Опишите множества, устойчивые относительно сдвига плоскости на данный лежащий в ней вектор.

b) Множество $I \subset X$ называется *инвариантным* относительно отображения $f\colon X \to X$, если $f(I) = I$. Опишите множества, инвариантные относительно поворота плоскости вокруг фиксированной точки.

c) Точка $p \in X$ называется *неподвижной* точкой отображения $f : X \to X$, если $f(p) = p$. Проверьте, что любая композиция сдвига, вращения и гомотетии плоскости имеет неподвижную точку, если коэффициент гомотетии меньше единицы.

d) Считая преобразования Галилея и преобразования Лоренца отображениями плоскости на себя, при которых точка с координатами (x, t) переходит в точку с координатами (x', t'), найдите инвариантные множества этих преобразований.

10. Рассмотрим установившийся поток жидкости (т. е. скорость в каждой точке потока не меняется со временем). За время t частица, находящаяся в точке x потока, переместится в некоторую новую точку $f_t(x)$ пространства. Возникающее отображение $x \mapsto f_t(x)$ точек пространства, занимаемого потоком, зависит от времени t и называется *преобразованием за время* t. Покажите, что $f_{t_2} \circ f_{t_1} = f_{t_1} \circ f_{t_2} = f_{t_1+t_2}$ и $f_t \circ f_{-t} = f_0 = e_X$.

§ 4. Некоторые дополнения

1. Мощность множества (кардинальные числа). Говорят, что множество X *равномощно* множеству Y, если существует биективное отображение X на Y, т. е. каждому элементу $x \in X$ сопоставляется элемент $y \in Y$, причем различным элементам множества X отвечают различные элементы множества Y и каждый элемент $y \in Y$ сопоставлен некоторому элементу множества X.

Описательно говоря, каждый элемент $x \in X$ сидит на своем месте $y \in Y$, все элементы X сидят и свободных мест $y \in Y$ нет.

Ясно, что введенное отношение $X \mathcal{R} Y$ является *отношением эквивалентности*, поэтому мы будем, как и договаривались, писать в этом случае $X \sim Y$ вместо $X \mathcal{R} Y$.

Отношение равномощности разбивает совокупность всех множеств на классы эквивалентных между собой множеств. Множества одного класса эквивалентности имеют одинаковое количество элементов (равномощны), а разных — разное.

Класс, которому принадлежит множество X, называется *мощностью множества* X, а также *кардиналом* или *кардинальным числом множества* X и обозначается символом $\operatorname{card} X$. Если $X \sim Y$, то пишут

$\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$.

Смысл этой конструкции в том, что она позволяет сравнивать количества элементов множеств, не прибегая к промежуточному счету, т. е. к измерению количества путем сравнения с натуральным рядом чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Последнее, как мы вскоре увидим, иногда принципиально невозможно.

Говорят, что кардинальное число множества X *не больше* кардинального числа множества Y, и пишут $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y$, если X равномощно некоторому подмножеству множества Y.

Итак,

$$(\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y) := (\exists\, Z \subset Y \mid \operatorname{card} X = \operatorname{card} Z).$$

Если $X \subset Y$, то ясно, что $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y$. Однако, оказывается, соотношение $X \subset Y$ не мешает неравенству $\operatorname{card} Y \leqslant \operatorname{card} X$, даже если X есть собственное подмножество Y.

Например, соответствие $x \mapsto \frac{x}{1-|x|}$ есть биективное отображение промежутка $-1 < x < 1$ числовой оси $\mathbb{R}$ на всю эту ось.

Возможность для множества быть равномощным своей части является характерным признаком бесконечных множеств, который Дедекинд[1)] даже предложил считать определением бесконечного множества. Таким образом, множество называется *конечным* (по Дедекинду), если оно не равномощно никакому своему собственному подмножеству; в противном случае оно называется *бесконечным.*

Подобно тому, как отношение неравенства упорядочивает действительные числа на числовой прямой, введенное отношение неравенства упорядочивает мощности или кардинальные числа множеств. А именно, можно доказать, что справедливы следующие свойства построенного отношения:

1° $(\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y) \wedge (\operatorname{card} Y \leqslant \operatorname{card} Z) \Rightarrow (\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Z)$ (очевидно);

2° $(\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y) \wedge (\operatorname{card} Y \leqslant \operatorname{card} X) \Rightarrow (\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y)$ (теорема Шрёдера – Бернштейна[2)]);

[1)] Р. Дедекинд (1831 – 1916) — немецкий математик-алгебраист, принявший активное участие в развитии теории действительного числа. Впервые предложил аксиоматику множества натуральных чисел, называемую обычно аксиоматикой Пеано — по имени Дж. Пеано (1858 – 1932), итальянского математика, сформулировавшего ее несколько позже.

[2)] Ф. Бернштейн (1878 – 1956) — немецкий математик, ученик Г. Кантора; Э. Шрёдер (1841 – 1902) — немецкий математик.

3° $\forall X\ \forall Y\ (\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y) \vee (\operatorname{card} Y \leqslant \operatorname{card} X)$ (теорема Кантора).

Таким образом, класс кардинальных чисел оказывается линейно упорядоченным.

Говорят, что мощность множества X *меньше* мощности множества Y, и пишут $\operatorname{card} X < \operatorname{card} Y$, если $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y$ и в то же время $\operatorname{card} X \neq \operatorname{card} Y$. Итак, $(\operatorname{card} X < \operatorname{card} Y) := (\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y) \wedge \wedge (\operatorname{card} X \neq \operatorname{card} Y)$.

Пусть, как и прежде, $\varnothing$ — знак пустого множества, а $\mathcal{P}(X)$ — символ множества всех подмножеств множества X. Имеет место следующая открытая Кантором

Теорема. $\operatorname{card} X < \operatorname{card} \mathcal{P}(X)$.

◄ Для пустого множества $\varnothing$ утверждение очевидно, поэтому в дальнейшем можно считать, что $X \neq \varnothing$.

Поскольку $\mathcal{P}(X)$ содержит все одноэлементные подмножества X, $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} \mathcal{P}(X)$.

Для доказательства теоремы теперь достаточно установить, что $\operatorname{card} X \neq \neq \operatorname{card} \mathcal{P}(X)$, если $X \neq \varnothing$.

Пусть, вопреки утверждению, существует биективное отображение $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$. Рассмотрим множество $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ тех элементов $x \in X$, которые не содержатся в сопоставленном им множестве $f(x) \in \mathcal{P}(X)$. Поскольку $A \in \mathcal{P}(X)$, то найдется элемент $a \in X$ такой, что $f(a) = A$. Для элемента $a \in X$ невозможно ни соотношение $a \in A$ (по определению A), ни соотношение $a \notin A$ (опять-таки по определению A). Мы вступаем в противоречие с законом исключенного третьего. ►

Эта теорема, в частности, показывает, что если бесконечные множества существуют, то и «бесконечности» бывают разные.

2. Об аксиоматике теории множеств. Цель настоящего пункта — дать интересующемуся читателю представление о системе аксиом, описывающих свойства математического объекта, называемого *множеством*, и продемонстрировать простейшие следствия этих аксиом.

1° А к с и о м а о б ъ е м н о с т и. *Множества A и B равны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же элементы.*

Это означает, что мы отвлекаемся от всех прочих свойств объекта «множество», кроме свойства иметь данные элементы. На практике это означает, что если мы желаем установить, что $A = B$, то мы должны проверить, что $\forall x\ ((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B))$.

2° Аксиома выделения. *Любому множеству A и свойству P отвечает множество B, элементы которого суть те и только те элементы множества A, которые обладают свойством P.*

Короче, утверждается, что если A — множество, то и $B = \{x \in A \mid P(x)\}$ — тоже множество.

Эта аксиома очень часто используется в математических конструкциях, когда мы выделяем из множеств подмножества, состоящие из элементов, обладающих тем или иным свойством.

Например, из аксиомы выделения следует, что существует пустое подмножество $\varnothing_X = \{x \in X \mid x \neq x\}$ в любом множестве X, а с учетом аксиомы объемности заключаем, что для любых множеств X и Y выполнено $\varnothing_X = \varnothing_Y$, т. е. пустое множество единственно. Его обозначают символом $\varnothing$.

Из аксиомы выделения следует также, что если A и B — множества, то $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ — тоже множество. В частности, если M — множество и A — его подмножество, то $C_M A$ — тоже множество.

3° Аксиома объединения. *Для любого множества M множеств существует множество $\bigcup M$, называемое объединением множества M, состоящее из тех и только тех элементов, которые содержатся в элементах множества M.*

Если вместо слов «множество множеств» сказать «семейство множеств», то аксиома объединения приобретает несколько более привычное звучание: существует множество, состоящее из элементов множеств семейства. Таким образом, объединение множества есть множество, причем $x \in \bigcup M \Leftrightarrow \exists X\, ((X \in M) \wedge (x \in X))$.

Аксиома объединения с учетом аксиомы выделения позволяет определить *пересечение множества M* (семейства множеств) как множество

$$\bigcap M := \{x \in \bigcup M \mid \forall X\, ((X \in M) \Rightarrow (x \in X))\}.$$

4° Аксиома пары. *Для любых множеств X и Y существует множество Z такое, что X и Y являются его единственными элементами.*

Множество Z обозначается через $\{X, Y\}$ и называется *неупорядоченной парой* множеств X и Y. Множество Z состоит из одного элемента, если $X = Y$.

Как мы уже отмечали, *упорядоченная* пара (X, Y) множеств отличается от неупорядоченной наличием какого-либо признака у одного из множеств пары. Например, $(X, Y) := \{\{X, X\}, \{X, Y\}\}$.

Итак, неупорядоченная пара позволяет ввести упорядоченную пару, а упорядоченная пара позволяет ввести прямое произведение множеств, если воспользоваться аксиомой выделения и следующей важной аксиомой.

5° Аксиома множества подмножеств. *Для любого множества X существует множество $\mathcal{P}(X)$, состоящее из тех и только тех элементов, которые являются подмножествами множества X.*

Короче говоря, существует множество всех подмножеств данного множества.

Теперь можно проверить, что упорядоченные пары (x, y), где $x \in X$, а $y \in Y$, действительно образуют множество

$$X \times Y := \{p \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)) \mid p = (x, y) \wedge (x \in X) \wedge (y \in Y)\}.$$

Аксиомы $1° - 5°$ ограничивают возможность формирования новых множеств. Так, в множестве $\mathcal{P}(X)$ по теореме Кантора (о том, что $\operatorname{card} X < \operatorname{card} \mathcal{P}(X)$) имеется элемент, не принадлежащий X, поэтому *«множества» всех множеств* не существует. А ведь именно на этом «множестве» держится парадокс Рассела.

Для того чтобы сформулировать следующую аксиому, введем понятие *последователя* X^+ множества X. Положим по определению $X^+ = X \cup \{X\}$. Короче, к X добавлено одноэлементное множество $\{X\}$.

Далее, множество назовем *индуктивным*, если оно содержит в качестве элемента пустое множество и последователь любого своего элемента.

$6°$ Аксиома бесконечности. *Индуктивные множества существуют.*

Аксиома бесконечности позволяет с учетом аксиом $1° - 4°$ создать эталонную модель множества $\mathbb{N}_0$ натуральных чисел (по фон Нейману[1)]), определив $\mathbb{N}_0$ как пересечение индуктивных множеств, т. е. как наименьшее индуктивное множество. Элементами $\mathbb{N}_0$ являются множества

$$\varnothing, \quad \varnothing^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}, \quad \{\varnothing\}^+ = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\}, \quad \ldots,$$

которые и являются моделью того, что мы обозначаем символами $0, 1, 2, \ldots$ и называем натуральными числами.

$7°$ Аксиома подстановки. *Пусть $\mathcal{F}(x, y)$ — такое высказывание (точнее, формула), что при любом x_0 из множества X существует и притом единственный объект y_0 такой, что $\mathcal{F}(x_0, y_0)$ истинно. Тогда объекты y, для каждого из которых существует элемент $x \in X$ такой, что $\mathcal{F}(x, y)$ истинно, образуют множество.*

Этой аксиомой при построении анализа мы пользоваться не будем.

Аксиомы $1° - 7°$ составляют аксиоматику теории множеств, известную как аксиоматика Цермело – Френкеля[2)].

К ней обычно добавляется еще одна, независимая от аксиом $1° - 7°$ и часто используемая в анализе

[1)] Дж. фон Нейман (1903 – 1957) — американский математик. Работы по функциональному анализу, математическим основаниям квантовой механики, топологическим группам, теории игр, математической логике. Руководил созданием первых ЭВМ.

[2)] Э. Цермело (1871 – 1953) — немецкий математик; А. Френкель (1891 – 1965) — немецкий, затем израильский математик.

8° Аксиома выбора. *Для любого семейства непустых множеств существует множество C такое, что, каково бы ни было множество X данного семейства, множество $X \cap C$ состоит из одного элемента.*

Иными словами, из каждого множества семейства можно выбрать в точности по одному представителю так, что выбранные элементы составят множество C.

Аксиома выбора, известная в математике как аксиома Цермело, вызвала горячие дискуссии специалистов.

3. Замечания о структуре математических высказываний и записи их на языке теории множеств. В языке теории множеств имеются два базисных или, как говорят, атомарных типа математических высказываний: утверждение $x \in A$ о том, что объект x есть элемент множества A, и утверждение $A = B$ о том, что множества A и B совпадают. (Впрочем, с учетом аксиомы объемности второе утверждение является комбинацией утверждений первого типа: $(x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)$.)

Сложное высказывание или сложная логическая формула строятся из атомарных посредством логических операторов — связок $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ и кванторов $\forall$, $\exists$ с использованием скобок ( ). При этом формирование сколь угодно сложного высказывания и его записи сводится к выполнению следующих элементарных логических операций:

a) образование нового высказывания путем постановки отрицания перед некоторым высказыванием и заключение результата в скобки;

b) образование нового высказывания путем постановки необходимой связки $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ между двумя высказываниями и заключение результата в скобки;

c) образование высказывания «для любого объекта x выполнено свойство P» (что записывают в виде $\forall x\ P(x)$) или высказывания «найдется объект x, обладающий свойством P» (что записывают в виде $\exists\, x\ P(x)$).

Например, громоздкая запись

$$\exists\, x\ (P(x) \wedge (\forall y\ ((P(y)) \Rightarrow (y = x))))$$

означает, что найдется объект x, обладающий свойством P и такой, что если y — любой объект, обладающий свойством P, то $y = x$. Короче: существует и притом единственный объект x, обладающий свойством P. Обычно это высказывание обозначают в виде $\exists!\, x\ P(x)$, и мы будем использовать такое сокращение.

Для упрощения записи высказывания, как уже отмечалось, стараются опустить столько скобок, сколько это возможно без потери однозначного толкования записи. С этой целью кроме указанного ранее приоритета операторов $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ считают, что наиболее жестко символы в формуле связываются знаками $\in$, $=$, затем $\exists$, $\forall$ и потом связками $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$.

С учетом такого соглашения теперь можно было бы написать

$$\exists!\, x\ P(x) := \exists\, x\ (P(x) \wedge \forall y\ (P(y) \Rightarrow y = x)).$$

Условимся также о следующих широко используемых сокращениях:

$$\begin{aligned}
(\forall x \in X)\ P &:= \forall x\ (x \in X \Rightarrow P(x)),\\
(\exists\, x \in X)\ P &:= \exists\, x\ (x \in X \wedge P(x)),\\
(\forall x > a)\ P &:= \forall x\ (x \in \mathbb{R} \wedge x > a \Rightarrow P(x)),\\
(\exists\, x > a)\ P &:= \exists\, x\ (x \in \mathbb{R} \wedge x > a \wedge P(x)).
\end{aligned}$$

Здесь $\mathbb{R}$, как всегда, есть символ множества действительных чисел.

С учетом этих сокращений и правил a), b), c) построения сложного высказывания, например, можно будет дать однозначно трактуемую запись

$$\Bigl(\lim_{x\to a} f(x)=A\Bigr) := \forall \varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ \ (0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon)$$

того, что число A является пределом функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в точке $a \in \mathbb{R}$.

Быть может, наиболее важным из всего сказанного в этом параграфе являются для нас следующие правила построения отрицания к высказыванию, содержащему кванторы.

Отрицание к высказыванию «для некоторого x истинно $P(x)$» означает, что «для любого x неверно $P(x)$», а отрицание к высказыванию «для любого x истинно $P(x)$» означает, что «найдется x, что неверно $P(x)$».

Итак,

$$\begin{aligned}
\neg\exists\, x\ \ P(x) &\Leftrightarrow \forall x\ \ \neg P(x),\\
\neg\forall x\ \ P(x) &\Leftrightarrow \exists\, x\ \ \neg P(x).
\end{aligned}$$

Напомним также (см. упражнения к § 1), что

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q,$$

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q,$$

$$\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q.$$

На основании сказанного можно заключить, что, например,

$$\neg((\forall x > a)\ P) \Leftrightarrow (\exists\, x > a)\ \neg P.$$

Написать в правой части последнего соотношения $(\exists\, x \leqslant a)\ \neg P$ было бы, конечно, ошибочно.

В самом деле,

$$\begin{aligned}\neg((\forall x > a)\ P) := \neg(\forall x\ (x \in \mathbb{R} \wedge x > a \Rightarrow P(x))) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists\, x\ \neg(x \in \mathbb{R} \wedge x > a \Rightarrow P(x)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists\, x\ ((x \in \mathbb{R} \wedge x > a) \wedge \neg P(x)) =: (\exists\, x > a)\ \neg P.\end{aligned}$$

Если учесть указанную выше структуру произвольного высказывания, то теперь с использованием построенных отрицаний простейших высказываний можно было бы построить отрицание любого конкретного высказывания.

Например,

$$\neg\left(\lim_{x\to a} f(x) = A\right) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \ \forall \delta > 0\ \ \exists x \in \\ \in \mathbb{R}\ \ (0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - A| \geqslant \varepsilon).$$

Практическая важность правильного построения отрицания связана, в частности, с методом доказательства от противного, когда истинность некоторого утверждения P извлекают из того, что утверждение $\neg P$ ложно.

Упражнения

1. a) Установите равномощность отрезка $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ и интервала $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ числовой прямой $\mathbb{R}$ как с помощью теоремы Шрёдера–Бернштейна, так и непосредственным предъявлением нужной биекции.

b) Разберите следующее доказательство теоремы Шрёдера–Бернштейна:

$$(\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y) \wedge (\operatorname{card} Y \leqslant \operatorname{card} X) \Rightarrow (\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y).$$

◀ Достаточно доказать, что если множества X, Y, Z таковы, что $X \supset Y \supset \supset Z$ и $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Z$, то $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$. Пусть $f\colon X \to Z$ — биективное отображение. Тогда биекция $g\colon X \to Y$ может быть задана, например, следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } x \in f^n(X) \setminus f^n(Y) \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}, \\ x \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $f^n = f \circ \ldots \circ f$ — n-я итерация отображения f, а $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. ▶

2. a) Исходя из определения пары, проверьте, что данное в пункте 2 определение прямого произведения $X \times Y$ множеств X, Y корректно, т. е. множество $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y))$ содержит все упорядоченные пары (x, y), в которых $x \in X$ и $y \in Y$.

b) Покажите, что всевозможные отображения $f\colon X \to Y$ одного фиксированного множества X в другое фиксированное множество Y сами образуют множество $M(X, Y)$.

c) Проверьте, что если $\mathcal{R}$ — множество упорядоченных пар (т. е. отношение), то первые элементы пар, принадлежащих множеству $\mathcal{R}$ (как и вторые), сами образуют множество.

3. a) Используя аксиомы объемности, пары, выделения, объединения и бесконечности, проверьте, что для элементов множества $\mathbb{N}_0$ натуральных чисел по фон Нейману справедливы следующие утверждения:

1° $x = y \Rightarrow x^+ = y^+$;

2° $(\forall x \in \mathbb{N}_0)\ (x^+ \neq \varnothing)$;

3° $x^+ = y^+ \Rightarrow x = y$;

4° $(\forall x \in \mathbb{N}_0)\ (x \neq \varnothing \Rightarrow (\exists\, y \in \mathbb{N}_0)\ (x = y^+))$.

b) Используя то, что $\mathbb{N}_0$ — индуктивное множество, покажите, что для любых его элементов x и y (а они в свою очередь являются множествами) справедливы следующие соотношения:

1° $\operatorname{card} x \leqslant \operatorname{card} x^+$;

2° $\operatorname{card} \varnothing < \operatorname{card} x^+$;

3° $\operatorname{card} x < \operatorname{card} y \Leftrightarrow \operatorname{card} x^+ < \operatorname{card} y^+$;

4° $\operatorname{card} x < \operatorname{card} x^+$;

5° $\operatorname{card} x < \operatorname{card} y \Rightarrow \operatorname{card} x^+ \leqslant \operatorname{card} y$;

6° $x = y \Leftrightarrow \operatorname{card} x = \operatorname{card} y$;

7° $(x \subset y) \vee (x \supset y)$.

c) Покажите, что в любом подмножестве X множества $\mathbb{N}_0$ найдется такой (наименьший) элемент x_m, что $(\forall x \in X)\ (\operatorname{card} x_m \leqslant \operatorname{card} x)$. (В случае затруднений к этой задаче можно вернуться после прочтения главы II.)

4. Мы будем иметь дело только с множествами. Поскольку множество, состоящее из различных элементов, само может быть элементом другого множества, логики все множества обычно обозначают строчными буквами. В настоящей задаче это очень удобно.

a) Проверьте, что запись

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \Leftrightarrow \exists w\ (z \in w \wedge w \in x))$$

выражает аксиому объединения, по которой существует множество y — объединение множества x.

b) Укажите, какие аксиомы теории множеств представлены записями

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Leftrightarrow x = y),$$

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall v\ (v \in z \Leftrightarrow (v = x \vee v = y)),$$

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \Leftrightarrow \forall u\ (u \in z \Rightarrow u \in x)),$$

$$\exists x\ (\forall y\ (\neg\exists z\ (z \in y) \Rightarrow y \in x) \wedge \forall w\ (w \in x \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall u\ (\forall v\ (v \in u \Leftrightarrow (v = w \vee v \in w)) \Rightarrow u \in x))).$$

c) Проверьте, что формула

$$\forall z\ (z \in f \Rightarrow (\exists x_1\ \exists y_1\ (x_1 \in x \wedge y_1 \in y \wedge z = (x_1, y_1)))) \wedge \\ \wedge \forall x_1\ (x_1 \in x \Rightarrow \exists y_1\ \exists z\ (y_1 \in y \wedge z = (x_1, y_1) \wedge z \in f)) \wedge \\ \wedge \forall x_1\ \forall y_1\ \forall y_2\ (\exists z_1\ \exists z_2\ (z_1 \in f \wedge z_2 \in f \wedge z_1 = (x_1, y_1) \wedge \\ \wedge z_2 = (x_1, y_2)) \Rightarrow y_1 = y_2)$$

последовательно накладывает на множество f три ограничения: f есть подмножество $x \times y$; проекция f на x совпадает с x; каждому элементу x_1 из x отвечает ровно один элемент y_1 из y такой, что $(x_1, y_1) \in f$.

Таким образом, перед нами определение отображения $f\colon x \to y$.

Этот пример еще раз показывает, что формальная запись высказывания отнюдь не всегда бывает более короткой и прозрачной в сравнении с его записью на разговорном языке. Учитывая это обстоятельство, мы будем в дальнейшем использовать логическую символику лишь в той мере, в какой она будет нам представляться полезной для достижения большей компактности или ясности изложения.

5. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение. Запишите логическое отрицание каждого из следующих высказываний:

a) f сюръективно;

b) f инъективно;

c) f биективно.

6. Пусть X и Y — множества и $f \subset X \times Y$. Запишите, что значит, что множество f не является функцией.

ГЛАВА II

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ (ВЕЩЕСТВЕННЫЕ) ЧИСЛА

Математические теории, как правило, находят свой выход в том, что позволяют перерабатывать один набор чисел (исходные данные) в другой набор чисел, составляющий промежуточную или окончательную цель вычислений. По этой причине особое место в математике и ее приложениях занимают числовые функции. Они (точнее, так называемые дифференцируемые числовые функции) составляют главный объект исследования классического анализа. Но сколь-нибудь полное с точки зрения современной математики описание свойств этих функций, как вы уже могли почувствовать в школе и в чем вскоре убедитесь, невозможно без точного определения множества вещественных чисел, на котором эти функции действуют.

Число в математике, как время в физике, известно каждому, но непонятно лишь специалистам. Это одна из основных математических абстракций, которой, по-видимому, еще предстоит существенная эволюция и рассказу о которой может быть посвящен самостоятельный насыщенный курс. Здесь же мы имеем в виду только свести воедино то, что читателю в основном известно о действительных числах из средней школы, выделив в виде аксиом фундаментальные и независимые свойства чисел. При этом наша цель состоит в том, чтобы дать точное, пригодное для последующего математического использования определение вещественных чисел и обратить особое внимание на их свойство полноты, или непрерывности, являющееся зародышем предельного перехода — основной неарифметической операции анализа.

§ 1. Аксиоматика и некоторые общие свойства множества действительных чисел

1. Определение множества действительных чисел

Определение 1. Множество $\mathbb{R}$ называется множеством *действительных (вещественных) чисел*, а его элементы — *действительными (вещественными) числами*, если выполнен следующий комплекс условий, называемый аксиоматикой вещественных чисел:

(I) Аксиомы сложения

Определено отображение (операция сложения)

$$+\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов x, y из $\mathbb{R}$ некоторый элемент $x + y \in \mathbb{R}$, называемый суммой x и y. При этом выполнены следующие условия:

1_+. *Существует нейтральный элемент 0 (называемый в случае сложения нулем) такой, что для любого $x \in \mathbb{R}$*

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

2_+. *Для любого элемента $x \in \mathbb{R}$ имеется элемент $-x \in \mathbb{R}$, называемый противоположным к x, такой, что*

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

3_+. *Операция + ассоциативна, т. е. для любых элементов x, y, z из $\mathbb{R}$ выполнено*

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

4_+. *Операция + коммутативна, т. е. для любых элементов x, y из $\mathbb{R}$ выполнено*

$$x + y = y + x.$$

Если на каком-то множестве G определена операция, удовлетворяющая аксиомам 1_+, 2_+, 3_+, то говорят, что на G задана структура группы или что G есть *группа*. Если операцию называют сложением, то группу называют *аддитивной*. Если, кроме того, известно, что операция коммутативна, т. е. выполнено условие 4_+, то группу называют *коммутативной* или *абелевой*[1)].

[1)] Н. Х. Абель (1802 – 1829) — замечательный норвежский математик, доказавший неразрешимость в радикалах алгебраических уравнений, степени выше четвертой.

Итак, аксиомы $1_+ - 4_+$ говорят, что $\mathbb{R}$ есть аддитивная абелева группа.

(II) Аксиомы умножения

Определено отображение (операция умножения)

$$\bullet\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов x, y из $\mathbb{R}$ некоторый элемент $x \cdot y \in \mathbb{R}$, называемый ***произведением*** *x и y, причем так, что выполнены следующие условия*:

$1_\bullet$. *Существует нейтральный элемент $1 \in \mathbb{R} \setminus 0$ (называемый в случае умножения* ***единицей***) *такой, что $\forall x \in \mathbb{R}$*

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

$2_\bullet$. *Для любого элемента $x \in \mathbb{R} \setminus 0$ имеется элемент $x^{-1} \in \mathbb{R}$, называемый* ***обратным***, *такой, что*

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

$3_\bullet$. *Операция $\bullet$ ассоциативна, т. е. для любых x, y, z из $\mathbb{R}$*

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

$4_\bullet$. *Операция $\bullet$ коммутативна, т. е. для любых x, y из $\mathbb{R}$*

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

Заметим, что по отношению к операции умножения множество $\mathbb{R} \setminus 0$, как можно проверить, является (*мультипликативной*) группой.

(I, II) Связь сложения и умножения

Умножение дистрибутивно по отношению к сложению, т. е. $\forall\, x$, y, $z \in \mathbb{R}$

$$(x + y)z = xz + yz.$$

Отметим, что ввиду коммутативности умножения последнее равенство сохранится, если в обеих его частях поменять порядок множителей.

Если на каком-то множестве G действуют две операции, удовлетворяющие всем перечисленным аксиомам, то G называется *алгебраическим полем* или просто *полем.*

(III) Аксиомы порядка

Между элементами $\mathbb{R}$ *имеется отношение* $\leqslant$, *т. е. для элементов* x, y *из* $\mathbb{R}$ *установлено, выполняется ли* $x \leqslant y$ *или нет. При этом должны удовлетворяться следующие условия*:

$0_{\leqslant}$. $\forall x \in \mathbb{R}\ (x \leqslant x)$.

$1_{\leqslant}$. $(x \leqslant y) \land (y \leqslant x) \Rightarrow (x = y)$.

$2_{\leqslant}$. $(x \leqslant y) \land (y \leqslant z) \Rightarrow (x \leqslant z)$.

$3_{\leqslant}$. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ (x \leqslant y) \lor (y \leqslant x)$.

Отношение $\leqslant$ в $\mathbb{R}$ называется отношением *неравенства.*

Множество, между некоторыми элементами которого имеется отношение, удовлетворяющее аксиомам $0_{\leqslant}$, $1_{\leqslant}$, $2_{\leqslant}$, как известно, называют *частично упорядоченным,* а если, сверх того, выполнена аксиома $3_{\leqslant}$, т. е. любые два элемента множества сравнимы, то множество называется *линейно упорядоченным.*

Таким образом, множество действительных чисел линейно упорядочено отношением неравенства между его элементами.

(I, III) Связь сложения и порядка в $\mathbb{R}$

Если x, y, z — *элементы* $\mathbb{R}$, *то*

$$(x \leqslant y) \Rightarrow (x + z \leqslant y + z).$$

(II, III) Связь умножения и порядка в $\mathbb{R}$

Если x, y — *элементы* $\mathbb{R}$, *то*

$$(0 \leqslant x) \land (0 \leqslant y) \Rightarrow (0 \leqslant x \cdot y).$$

(IV) Аксиома полноты (непрерывности)

Если X *и* Y — *непустые подмножества* $\mathbb{R}$, *обладающие тем свойством, что для любых элементов* $x \in X$ *и* $y \in Y$ *выполнено* $x \leqslant y$, *то существует такое* $c \in \mathbb{R}$, *что* $x \leqslant c \leqslant y$ *для любых элементов* $x \in X$ *и* $y \in Y$.

Этим завершается список аксиом, выполнение которых на каком бы то ни было множестве $\mathbb{R}$ позволяет считать это множество конкретной реализацией или, как говорят, *моделью действительных чисел.*

Это определение формально не предполагает никакой предварительной информации о числах, и из него, «включив математическую мысль», опять-таки формально мы должны получить уже в качестве теорем остальные свойства действительных чисел. По поводу этого аксиоматического формализма хотелось бы сделать несколько неформальных замечаний.

Представьте себе, что вы не прошли стадию от складывания яблок, кубиков или других именованных величин к сложению абстрактных натуральных чисел; что вы не занимались измерением отрезков и не пришли к рациональным числам; что вам неизвестно великое открытие древних о том, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной и потому ее длина не может быть рациональным числом, т. е. нужны иррациональные числа; что у вас нет возникающего в процессе измерений понятия «больше» («меньше»); что вы не иллюстрируете себе порядок, например, образом числовой прямой. Если бы всего этого предварительно не было, то перечисленный набор аксиом не только не воспринимался бы как определенный итог духовного развития, но, скорее, показался бы по меньшей мере странным и во всяком случае произвольным плодом фантазии.

Относительно любой абстрактной системы аксиом сразу же возникают по крайней мере два вопроса.

Во-первых, совместимы ли эти аксиомы, т. е. существует ли множество, удовлетворяющее всем перечисленным условиям. Это вопрос о *непротиворечивости аксиоматики.*

Во-вторых, однозначно ли данная система аксиом определяет математический объект, т. е., как сказали бы логики, *категорична* ли система аксиом. Однозначность здесь надо понимать следующим образом. Если лица A и B, независимо, построили свои модели, к примеру, числовых систем $\mathbb{R}_A$ и $\mathbb{R}_B$, удовлетворяющие аксиоматике, то между множествами $\mathbb{R}_A$, $\mathbb{R}_B$ можно установить биективное соответствие, пусть $f\colon \mathbb{R}_A \to \mathbb{R}_B$, сохраняющее арифметические операции и отношение порядка, т. е.

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$
$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y),$$
$$x \leqslant y \Leftrightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

С математической точки зрения $\mathbb{R}_A$ и $\mathbb{R}_B$ в таком случае являются всего-навсего различными (совершенно равноправными) реализациями (моделями) действительных чисел (например, $\mathbb{R}_A$ — бесконечные десятичные дроби, а $\mathbb{R}_B$ — точки на числовой прямой). Такие реализации называются *изоморфными*, а отображение f — *изоморфизмом*. Результаты математической деятельности относятся, таким образом, не к индивидуальной реализации, а к каждой модели из класса изоморфных моделей данной аксиоматики.

Мы не будем здесь обсуждать поставленные выше вопросы и ограничимся только информативными ответами на них.

Положительный ответ на вопрос о непротиворечивости аксиоматики всегда носит условный характер. В отношении чисел он выглядит так: исходя из принятой нами аксиоматики теории множеств (см. гл. I, § 4, п. 2), можно построить множество натуральных, затем множество рациональных и, наконец, множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел, удовлетворяющее всем перечисленным свойствам.

Вопрос о категоричности системы аксиом действительных чисел имеет положительный ответ. Желающие получат его самостоятельно, решив задачи 23, 24, помещенные в конце следующего параграфа.

2. Некоторые общие алгебраические свойства действительных чисел. Покажем на примерах, как известные свойства чисел получаются из приведенных аксиом.

a. Следствия аксиом сложения

1° *В множестве действительных чисел имеется только один нуль.*

◄ Если 0_1 и 0_2 — нули в $\mathbb{R}$, то по определению нуля

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2. \quad ►$$

2° *В множестве действительных чисел у каждого элемента имеется единственный противоположный элемент.*

◄ Если x_1 и x_2 — элементы, противоположные $x \in \mathbb{R}$, то

$$x_1 = x_1 + 0 = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 = 0 + x_2 = x_2. \quad ►$$

Здесь мы использовали последовательно определение нуля, определение противоположного элемента, ассоциативность сложения, снова определение противоположного элемента и, наконец, снова определение нуля.

3° *Уравнение*

$$a + x = b$$

в $\mathbb{R}$ имеет и притом единственное решение

$$x = b + (-a).$$

◀ Это вытекает из существования и единственности у каждого элемента $a \in \mathbb{R}$ противоположного ему элемента:

$$(a + x = b) \Leftrightarrow ((x + a) + (-a) = b + (-a)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x + (a + (-a)) = b + (-a)) \Leftrightarrow (x + 0 = b + (-a)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x = b + (-a)). \quad ▶$$

Выражение $b + (-a)$ записывают также в виде $b - a$. Этой более короткой и привычной записи мы, как правило, и будем придерживаться.

b. Следствия аксиом умножения

1° *В множестве действительных чисел имеется только одна единица.*

2° *Для каждого числа $x \neq 0$ имеется только один обратный элемент x^{-1}.*

3° *Уравнение $a \cdot x = b$ при $a \in \mathbb{R} \setminus 0$ имеет и притом единственное решение $x = b \cdot a^{-1}$.*

Доказательства этих утверждений, разумеется, повторяют доказательства соответствующих утверждений для сложения (с точностью до замены символа и названия операции), поэтому мы их опустим.

c. Следствия аксиомы связи сложения и умножения. Привлекая дополнительно аксиому (I, II), связывающую сложение и умножение, получаем дальнейшие следствия.

1° *Для любого $x \in \mathbb{R}$*

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0.$$

◀ $(x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0) \Rightarrow (x \cdot 0 = x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) = 0)$. ▶

Отсюда, между прочим, видно, что если $x \in \mathbb{R} \setminus 0$, то $x^{-1} \in \mathbb{R} \setminus 0$.

2° $(x \cdot y = 0) \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$.

◀ Если, например, $y \neq 0$, то из единственности решения уравнения $x \cdot y = 0$ относительно x находим $x = 0 \cdot y^{-1} = 0$. ▶

3° *Для любого $x \in \mathbb{R}$*

$$-x = (-1) \cdot x.$$

◀ $x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$, и утверждение следует из единственности противоположного элемента. ▶

4° *Для любого числа* $x \in \mathbb{R}$

$$(-1)(-x) = x.$$

◀ Следует из 3° и единственности элемента x, противоположного $-x$. ▶

5° *Для любого числа* $x \in \mathbb{R}$

$$(-x)(-x) = x \cdot x.$$

◀ $(-x)(-x) = ((-1) \cdot x)(-x) = (x \cdot (-1))(-x) = x((-1)(-x)) = x \cdot x$. Мы последовательно воспользовались двумя предыдущими утверждениями, а также коммутативностью и ассоциативностью умножения. ▶

d. Следствия аксиом порядка. Отметим сначала, что отношение $x \leqslant y$ (читается «x меньше или равно y») записывают также в виде $y \geqslant x$ («y больше или равно x»); отношение $x \leqslant y$ при $x \neq y$ записывают в виде $x < y$ (читается «x меньше y») или в виде $y > x$ («y больше x») и называют *строгим неравенством.*

1° *Для любых* $x, y \in \mathbb{R}$ *всегда имеет место в точности одно из соотношений*:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

◀ Это следует из приведенного определения строгого неравенства и аксиом $1_\leqslant$ и $3_\leqslant$. ▶

2° *Для любых чисел* x, y, z *из* $\mathbb{R}$

$$(x < y) \wedge (y \leqslant z) \Rightarrow (x < z),$$

$$(x \leqslant y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z).$$

◀ Приведем для примера доказательство последнего утверждения.

По аксиоме $2_\leqslant$ транзитивности отношения неравенства имеем

$$(x \leqslant y) \wedge (y < z) \Leftrightarrow (x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z) \wedge (y \neq z) \Rightarrow (x \leqslant z).$$

Осталось проверить, что $x \neq z$. Но в противном случае

$$(x \leqslant y) \wedge (y < z) \Leftrightarrow (z \leqslant y) \wedge (y < z) \Leftrightarrow (z \leqslant y) \wedge (y \leqslant z) \wedge (y \neq z).$$

В силу аксиомы $1_\leqslant$ отсюда следует

$$(y = z) \wedge (y \neq z)$$

— противоречие. ▶

e. Следствия аксиом связи порядка со сложением и умножением. Если в дополнение к аксиомам сложения, умножения и порядка использовать аксиомы (I, III), (II, III), связывающие порядок с арифметическими операциями, то можно получить, например, следующие утверждения:

1° *Для любых чисел* x, y, z, w *из* $\mathbb{R}$

$$
\begin{gathered}
(x < y) \Rightarrow (x + z) < (y + z), \\
(0 < x) \Rightarrow (-x < 0), \\
(x \leqslant y) \wedge (z \leqslant w) \Rightarrow (x + z \leqslant y + w), \\
(x \leqslant y) \wedge (z < w) \Rightarrow (x + z < y + w).
\end{gathered}
$$

◀ Проверим первое из этих утверждений.

По определению строгого неравенства и аксиоме (I, III) имеем

$$(x < y) \Rightarrow (x \leqslant y) \Rightarrow (x + z) \leqslant (y + z).$$

Остается проверить, что $x + z \neq y + z$. В самом деле,

$$((x + z) = (y + z)) \Rightarrow (x = (y + z) - z = y + (z - z) = y),$$

что несовместимо с условием $x < y$. ▶

2° *Если* x, y, z — *числа из* $\mathbb{R}$, *то*

$$
\begin{gathered}
(0 < x) \wedge (0 < y) \Rightarrow (0 < xy), \\
(x < 0) \wedge (y < 0) \Rightarrow (0 < xy), \\
(x < 0) \wedge (0 < y) \Rightarrow (xy < 0), \\
(x < y) \wedge (0 < z) \Rightarrow (xz < yz), \\
(x < y) \wedge (z < 0) \Rightarrow (yz < xz).
\end{gathered}
$$

◀ Проверим первое из этих утверждений. По определению строгого неравенства и аксиоме (II, III)

$$(0 < x) \wedge (0 < y) \Rightarrow (0 \leqslant x) \wedge (0 \leqslant y) \Rightarrow (0 \leqslant xy).$$

Кроме того, $0 \neq xy$, поскольку, как уже было показано,

$$(x \cdot y = 0) \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0).$$

Проверим еще, например, и третье утверждение:

$$\begin{aligned}(x < 0) \wedge (0 < y) \Rightarrow (0 < -x) \wedge (0 < y) \Rightarrow \\ \Rightarrow (0 < (-x) \cdot y) \Rightarrow (0 < ((-1) \cdot x)y) \Rightarrow \\ \Rightarrow (0 < (-1) \cdot (xy)) \Rightarrow (0 < -(xy)) \Rightarrow (xy < 0). \quad \blacktriangleright\end{aligned}$$

Читателю предоставляется возможность доказать самостоятельно остальные соотношения, а также проверить, что если в одной из скобок левой части наших утверждений стоит нестрогое неравенство, то следствием его также будет нестрогое неравенство в правой части.

3° $0 < 1$.

◀ $1 \in \mathbb{R} \setminus 0$, т. е. $0 \neq 1$.

Если предположить, что $1 < 0$, то по только что доказанному

$$(1 < 0) \wedge (1 < 0) \Rightarrow (0 < 1 \cdot 1) \Rightarrow (0 < 1).$$

Но мы знаем, что для любой пары чисел $x, y \in \mathbb{R}$ реализуется и притом только одна из возможностей: $x < y$, $x = y$, $x > y$. Поскольку $0 \neq 1$, а предположение $1 < 0$ ведет к несовместимому с ним соотношению $0 < 1$, то остается единственная возможность, указанная в утверждении. ▶

4° $(0 < x) \Rightarrow (0 < x^{-1})$ и $(0 < x) \wedge (x < y) \Rightarrow (0 < y^{-1}) \wedge (y^{-1} < x^{-1})$.

◀ Проверим первое из этих утверждений.

Прежде всего, $x^{-1} \neq 0$. Предположив, что $x^{-1} < 0$, получим

$$(x^{-1} < 0) \wedge (0 < x) \Rightarrow (x \cdot x^{-1} < 0) \Rightarrow (1 < 0).$$

Это противоречие завершает доказательство. ▶

Напомним, что числа, которые больше нуля, называются *положительными*, а числа меньшие нуля — *отрицательными*.

Таким образом, мы доказали, например, что единица — положительное число, что произведение положительного и отрицательного чисел есть число отрицательное, а величина, обратная положительному числу, также положительна.

3. Аксиома полноты и существование верхней (нижней) грани числового множества

Определение 2. Говорят, что множество $X \subset \mathbb{R}$ *ограничено сверху* (*снизу*), если существует число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $x \leqslant c$ (соответственно, $c \leqslant x$) для любого $x \in X$.

Число c в этом случае называют *верхней* (соответственно, *нижней*) *границей* множества X или также *мажорантой* (*минорантой*) множества X.

Определение 3. Множество, ограниченное и сверху и снизу, называется *ограниченным.*

Определение 4. Элемент $a \in X$ называется *наибольшим* или *максимальным* (*наименьшим* или *минимальным*) элементом множества $X \subset \mathbb{R}$, если $x \leqslant a$ (соответственно, $a \leqslant x$) для любого элемента $x \in X$.

Введем обозначения и заодно приведем формальную запись определения максимального и минимального элементов соответственно:

$$(a = \max X) := (a \in X \wedge \forall x \in X\ (x \leqslant a)),$$
$$(a = \min X) := (a \in X \wedge \forall x \in X\ (a \leqslant x)).$$

Наряду с обозначениями $\max X$ (читается «максимум X») и $\min X$ (читается «минимум X»), в том же смысле используются соответственно символы $\max\limits_{x\in X} x$ и $\min\limits_{x\in X} x$.

Из аксиомы $1_{\leqslant}$ порядка сразу следует, что если в числовом множестве есть максимальный (минимальный) элемент, то он только один.

Однако не во всяком, даже ограниченном, множестве имеется максимальный (минимальный) элемент.

Например, множество $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 1\}$ имеет минимальный элемент, но, как легко проверить, не имеет максимального элемента.

Определение 5. Наименьшее из чисел, ограничивающих множество $X \subset \mathbb{R}$ сверху, называется *верхней гранью* (или *точной верхней границей*) множества X и обозначается $\sup X$ (читается «супремум X») или $\sup\limits_{x\in X} x$.

Это основное определение настоящего пункта. Итак,

$$(s = \sup X) := \forall x \in X\ ((x \leqslant s) \wedge (\forall s' < s\ \ \exists x' \in X\ (s' < x'))).$$

В первой скобке, стоящей справа от определяемого понятия, написано, что s ограничивает X сверху; вторая скобка говорит, что s — минимальное из чисел, обладающих этим свойством. Точнее, вторая скобка утверждает, что любое число, меньшее s, уже не является верхней границей X.

Аналогично вводится понятие *нижней грани* (*точной нижней границы*) множества X как наибольшей из нижних границ множества X.

Определение 6.

$$(i = \inf X) := \forall x \in X \ ((i \leqslant x) \wedge (\forall i' > i \ \exists x' \in X \ (x' < i'))).$$

Наряду с обозначением $\inf X$ (читается «инфимум X») для нижней грани X употребляется также обозначение $\inf\limits_{x \in X} x$.

Таким образом, даны следующие определения:

$$\sup X := \min \{c \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X \ (x \leqslant c)\},$$

$$\inf X := \max \{c \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X \ (c \leqslant x)\}.$$

Но выше мы говорили, что не всякое множество обладает минимальным или максимальным элементом, поэтому принятые определения верхней и нижней граней числового множества нуждаются в аргументации, которую доставляет следующая

Лемма (принцип верхней грани)**.** *Всякое непустое ограниченное сверху подмножество множества вещественных чисел имеет и притом единственную верхнюю грань.*

◀ Поскольку единственность минимального элемента числового множества нам уже известна, необходимо лишь убедиться в существовании верхней грани.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — данное подмножество, а $Y = \{y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X \ (x \leqslant y)\}$ — множество верхних границ X. По условию, $X \neq \varnothing$ и $Y \neq \varnothing$. Тогда в силу аксиомы полноты существует число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall x \in X \ \forall y \in Y \ (x \leqslant c \leqslant y)$. Число c, таким образом, является мажорантой X и минорантой Y. Как мажоранта X, число c является элементом Y, но как миноранта Y, число c является минимальным элементом множества Y. Итак, $c = \min Y = \sup X$. ▶

Конечно, аналогично доказывается существование и единственность нижней грани у ограниченного снизу числового множества, т. е. имеет место

Лемма. (X *не пусто и ограничено снизу*) $\Rightarrow$ ($\exists!\ \inf X$).

На доказательстве мы не останавливаемся.

Теперь вернемся к множеству $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 1\}$. В силу доказанной леммы оно должно иметь верхнюю грань. По самому определению множества X и определению верхней грани очевидно, что $\sup X \leqslant 1$.

Для того чтобы доказать, что $\sup X = 1$, таким образом, необходимо проверить, что для любого числа $q < 1$ найдется число $x \in X$ такое, что $q < x$, т. е., попросту, что между q и 1 есть еще числа. Это, конечно, легко доказать и независимо (например, показав, что $q < 2^{-1}(q+1) < 1$), но мы сейчас этого делать не станем, поскольку в следующем параграфе подобные вопросы будут обсуждаться последовательно и подробно.

Что же касается нижней грани, то она всегда совпадает с минимальным элементом множества, если множество таковым обладает. Так что уже из этого соображения в рассматриваемом примере имеем $\inf X = 0$.

Другие, более содержательные примеры использования введенных здесь понятий встретятся уже в следующем параграфе.

§ 2. Важнейшие классы действительных чисел и вычислительные аспекты операций с действительными числами

1. Натуральные числа и принцип математической индукции

a. Определение множества натуральных чисел. Числа вида 1, $1+1$, $(1+1)+1$ и т. д. обозначают соответственно символами 1, 2, 3 и т. д. и называют *натуральными* числами.

Принять такое определение может только тот, кто и без него имеет полное представление о натуральных числах, включая их запись, например, в десятичной системе счисления.

Продолжение какого-то процесса далеко не всегда бывает однозначным, поэтому вездесущее «и так далее» на самом деле требует уточнения, которое доставляет фундаментальный принцип математической индукции.

Определение 1. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *индуктивным*, если вместе с каждым числом $x \in X$ ему принадлежит также число $x+1$.

Например, $\mathbb{R}$ является индуктивным множеством; множество положительных чисел также является индуктивным множеством.

Пересечение $X = \bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ любого семейства индуктивных множеств X_α, если оно непусто, является индуктивным множеством.

Действительно,

$$\left(x \in X = \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha\right) \Rightarrow (\forall \alpha \in A \ (x \in X_\alpha)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall \alpha \in A \ ((x+1) \in X_\alpha)) \Rightarrow \left((x+1) \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = X\right).$$

Теперь примем следующее

Определение 2. Множеством *натуральных чисел* называется наименьшее индуктивное множество, содержащее 1, т. е. пересечение всех индуктивных множеств, содержащих число 1.

Множество натуральных чисел обозначают символом $\mathbb{N}$; его элементы называются *натуральными числами.*

С теоретико-множественной точки зрения, быть может, разумнее натуральные числа начинать с 0, т. е. вводить множество натуральных чисел как наименьшее индуктивное множество, содержащее 0, однако нам удобнее начинать нумерацию числом 1.

Следующий фундаментальный и широко используемый принцип является прямым следствием определения множества натуральных чисел.

b. Принцип математической индукции

Если подмножество E множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ таково, что $1 \in E$ и вместе с числом $x \in E$ множеству E принадлежит число $x + 1$, то $E = \mathbb{N}$.

Итак,

$$(E \subset \mathbb{N}) \wedge (1 \in E) \wedge (\forall x \in E(x \in E \Rightarrow (x+1) \in E)) \Rightarrow E = \mathbb{N}.$$

Проиллюстрируем этот принцип в действии, доказав с его помощью несколько полезных и постоянно в дальнейшем используемых свойств натуральных чисел.

1° *Сумма и произведение натуральных чисел являются натуральными числами.*

◀ Пусть $m, n \in \mathbb{N}$; покажем, что $(m+n) \in \mathbb{N}$. Обозначим через E множество тех натуральных чисел n, для которых $(m+n) \in \mathbb{N}$ при любом $m \in \mathbb{N}$. Тогда $1 \in E$, поскольку $(m \in \mathbb{N}) \Rightarrow ((m+1) \in \mathbb{N})$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Если $n \in E$, т. е. $(m+n) \in \mathbb{N}$, то и $(n+1) \in E$, так как $(m+(n+1)) = ((m+n)+1) \in \mathbb{N}$. По принципу индукции $E = \mathbb{N}$, и мы доказали, что сложение не выводит за пределы $\mathbb{N}$.

Аналогично, обозначив через E множество тех натуральных чисел n, для которых $(m \cdot n) \in \mathbb{N}$ при любом $m \in \mathbb{N}$, находим, что $1 \in E$, так как $m \cdot 1 = m$, и если $n \in E$, т. е. $m \cdot n \in \mathbb{N}$, то $m \cdot (n+1) = mn + m$ есть сумма натуральных чисел, которая по доказанному принадлежит $\mathbb{N}$. Таким образом, $(n \in E) \Rightarrow ((n+1) \in E)$ и по принципу индукции $E = \mathbb{N}$. ▶

2° Покажем, что $(n \in \mathbb{N}) \wedge (n \neq 1) \Rightarrow ((n-1) \in \mathbb{N})$.

◀ Рассмотрим множество E натуральных чисел вида $n-1$, где n — натуральное число, отличное от 1, и покажем, что $E = \mathbb{N}$.

Поскольку $1 \in \mathbb{N}$, то $2 := (1+1) \in \mathbb{N}$, а значит, $1 = (2-1) \in E$.

Если $m \in E$, то $m = n-1$, где $n \in \mathbb{N}$; тогда $m+1 = (n+1)-1$ и, поскольку $(n+1) \in \mathbb{N}$, имеем $(m+1) \in E$. По принципу индукции заключаем: $E = \mathbb{N}$. ▶

3° *Для любого $n \in \mathbb{N}$ в множестве $\{x \in \mathbb{N} \mid n < x\}$ есть минимальный элемент, причем*

$$\min \{x \in \mathbb{N} \mid n < x\} = n+1.$$

◀ Покажем, что множество E тех $n \in \mathbb{N}$, для которых утверждение справедливо, совпадает с $\mathbb{N}$.

Сначала проверим, что $1 \in E$, т. е.

$$\min \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x\} = 2.$$

Это утверждение тоже будем проверять по принципу индукции. Пусть

$$M = \{x \in \mathbb{N} \mid (x = 1) \vee (2 \leqslant x)\}.$$

По определению M имеем $1 \in M$. Далее, если $x \in M$, то либо $x = 1$ и тогда $x+1 = 2 \in M$, либо $2 \leqslant x$, тогда $2 \leqslant (x+1)$ и снова $(x+1) \in M$. Таким образом, $M = \mathbb{N}$ и, значит, если $(x \neq 1) \wedge (x \in \mathbb{N})$, то $2 \leqslant x$, т. е. действительно $\min \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x\} = 2$. Итак, $1 \in E$.

Покажем теперь, что если $n \in E$, то и $(n+1) \in E$.

Заметим сначала, что, если $x \in \{x \in \mathbb{N} \mid n+1 < x\}$, то

$$(x-1) = y \in \{y \in \mathbb{N} \mid n < y\},$$

ибо по доказанному все натуральные числа не меньше 1, поэтому $(n+1 < x) \Rightarrow (1 < x) \Rightarrow (x \neq 1)$, а тогда в силу утверждения 2° $(x-1) = y \in \mathbb{N}$.

Пусть теперь $n \in E$, т.е. $\min\{y \in \mathbb{N} \mid n < y\} = n+1$. Тогда $x - 1 \geqslant y \geqslant n+1$ и $x \geqslant n+2$. Значит,

$$(x \in \{x \in \mathbb{N} \mid n+1 < x\}) \Rightarrow (x \geqslant n+2)$$

и, следовательно, $\min\{x \in \mathbb{N} \mid n+1 < x\} = n+2$, т.е. $(n+1) \in E$.

По принципу индукции $E = \mathbb{N}$, и утверждение 3° доказано. ►

В качестве прямых следствий доказанных утверждений 2° и 3° получаем следующие свойства 4°, 5°, 6° натуральных чисел:

4° $(m \in \mathbb{N}) \wedge (n \in \mathbb{N}) \wedge (n < m) \Rightarrow (n+1 \leqslant m)$.

5° *Число* $(n+1) \in \mathbb{N}$ *непосредственно следует в* $\mathbb{N}$ *за натуральным числом* n, *т.е. нет натуральных чисел* x, *удовлетворяющих условию* $n < x < n+1$, *если* $n \in \mathbb{N}$.

6° *Если* $n \in \mathbb{N}$ *и* $n \neq 1$, *то число* $(n-1) \in \mathbb{N}$ *и* $(n-1)$ *непосредственно предшествует числу* n *в* $\mathbb{N}$, *т.е. нет натуральных чисел* x, *удовлетворяющих условию* $n-1 < x < n$, *если* $n \in \mathbb{N}$.

7° Покажем теперь, что *в любом непустом подмножестве множества натуральных чисел имеется минимальный элемент.*

◄ Пусть $M \subset \mathbb{N}$. Если $1 \in M$, то $\min M = 1$, поскольку $\forall n \in \mathbb{N}$ $(1 \leqslant n)$.

Пусть теперь $1 \notin M$, т.е. $1 \in E = \mathbb{N} \setminus M$. В множестве E должно найтись такое натуральное число $n \in E$, что все натуральные числа, не превосходящие n, лежат в E, а $(n+1) \in M$. Если бы такого n не было, то множество $E \subset \mathbb{N}$, содержащее единицу, вместе с $n \in E$ содержало бы и $(n+1)$ и по принципу индукции совпадало бы с $\mathbb{N}$. Последнее невозможно, поскольку $\mathbb{N} \setminus E = M \neq \varnothing$.

Найденное число $(n+1) \in M$ и будет минимальным в M, поскольку между n и $n+1$, как мы видели, уже нет натуральных чисел. ►

2. Рациональные и иррациональные числа

a. Целые числа

Определение 3. Объединение множества натуральных чисел, множества чисел, противоположных натуральным числам, и нуля называется множеством *целых чисел* и обозначается символом $\mathbb{Z}$.

Поскольку, как уже было доказано, сложение и умножение натуральных чисел не выводят за пределы $\mathbb{N}$, то эти же операции над целыми числами не выводят за пределы множества $\mathbb{Z}$.

◀ Действительно, если $m, n \in \mathbb{Z}$, то либо одно из этих чисел равно нулю и тогда сумма $m + n$ равна другому числу, т. е. $(m + n) \in \mathbb{Z}$, а произведение $m \cdot n = 0 \in \mathbb{Z}$, либо оба числа отличны от нуля. В последнем случае либо $m, n \in \mathbb{N}$ и тогда $(m + n) \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ и $(m \cdot n) \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, либо $(-m), (-n) \in \mathbb{N}$ и тогда $m \cdot n = ((-1)m)((-1)n) \in \mathbb{N}$, либо $(-m), n \in \mathbb{N}$ и тогда $(-m \cdot n) \in \mathbb{N}$, т. е. $m \cdot n \in \mathbb{Z}$, либо, наконец, $m, -n \in \mathbb{N}$ и тогда $(-m \cdot n) \in \mathbb{N}$ и снова $m \cdot n \in \mathbb{Z}$. ▶

Таким образом, $\mathbb{Z}$ есть абелева группа по отношению к операции сложения. По отношению к операции умножения множество $\mathbb{Z}$ и даже $\mathbb{Z} \setminus 0$ не является группой, поскольку числа, обратные целым, не лежат в $\mathbb{Z}$ (кроме числа, обратного единице и минус единице).

◀ Действительно, если $m \in \mathbb{Z}$ и $m \neq 0$, 1, то, считая сначала $m \in \mathbb{N}$, имеем $0 < 1 < m$ и, поскольку $m \cdot m^{-1} = 1 > 0$, должно быть $0 < m^{-1} < 1$ (см. в предыдущем параграфе следствия аксиом порядка). Таким образом, $m^{-1} \notin \mathbb{Z}$. Случай, когда m — отрицательное целое число, отличное от -1, непосредственно сводится к уже разобранному. ▶

В том случае, когда для чисел $m, n \in \mathbb{Z}$ число $k = m \cdot n^{-1} \in \mathbb{Z}$, т. е. когда $m = k \cdot n$, где $k \in \mathbb{Z}$, говорят, что целое число m *делится* на целое число n или *кратно* n, или что n есть *делитель* m.

Делимость целых чисел путем надлежащих изменений знаков, т. е. домножением на -1, если в этом есть необходимость, немедленно приводится к делимости соответствующих натуральных чисел, в рамках которых она и изучается в арифметике.

Напомним без доказательства так называемую основную теорему арифметики, которой при рассмотрении некоторых примеров мы будем пользоваться.

Число $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 1$, называется *простым*, если в $\mathbb{N}$ у него нет делителей, отличных от 1 и p.

Основная теорема арифметики. *Каждое натуральное число допускает и притом единственное (с точностью до порядка сомножителей) представление в виде произведения*

$$n = p_1 \ldots p_k,$$

где $p_1, \ldots, p_k$ — простые числа.

Числа m, $n \in \mathbb{Z}$ называются *взаимно простыми*, если у них нет общих делителей, отличных от 1 и -1.

Из приведенной теоремы, в частности, видно, что если произведение $m \cdot n$ взаимно простых чисел m, n делится на простое число p, то одно из чисел m, n также делится на p.

b. Рациональные числа

Определение 4. Числа вида $m \cdot n^{-1}$, где m, $n \in \mathbb{Z}$, называются *рациональными.*

Множество рациональных чисел обозначается знаком $\mathbb{Q}$.

Таким образом, упорядоченная пара (m, n) целых чисел определяет рациональное число $q = m \cdot n^{-1}$, если $n \neq 0$.

Число $q = m \cdot n^{-1}$ записывают также в виде отношения[1)] m и n или так называемой рациональной дроби $\frac{m}{n}$.

Правила действий с рациональными числами, относящиеся к такой форме их представления дробями, изучавшиеся в школе, немедленно вытекают из определения рационального числа и аксиом действительных чисел. В частности, «от умножения числителя и знаменателя дроби на одно и то же отличное от нуля целое число величина дроби не изменяется», т. е. дроби $\frac{mk}{nk}$ и $\frac{m}{n}$ представляют одно и то же рациональное число. В самом деле, поскольку $(nk)(k^{-1}n^{-1}) = 1$, т. е. $(n \cdot k)^{-1} = k^{-1} \cdot n^{-1}$, то $(mk)(nk)^{-1} = (mk)(k^{-1}n^{-1}) = m \cdot n^{-1}$.

Таким образом, различные упорядоченные пары (m, n) и (mk, nk) задают одно и то же рациональное число. Следовательно, после соответствующих сокращений любое рациональное число можно задать упорядоченной парой взаимно простых целых чисел.

[1)] Обозначение $\mathbb{Q}$ — по начальной букве англ. quotient — отношение (от лат. quota — часть, приходящаяся на единицу чего-либо, и quot — сколько).

С другой стороны, если пары (m_1, n_1) и (m_2, n_2) задают одно и то же рациональное число, т. е. $m_1 \cdot n_1^{-1} = m_2 \cdot n_2^{-1}$, то $m_1 n_2 = m_2 n_1$, и если, например, m_1 и n_1 взаимно просты, то в силу упомянутого следствия основной теоремы арифметики $n_2 \cdot n_1^{-1} = m_2 \cdot m_1^{-1} = k \in \mathbb{Z}$.

Мы показали, таким образом, что две упорядоченные пары (m_1, n_1), (m_2, n_2) задают одно и то же рациональное число тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т. е. существует число $k \in \mathbb{Z}$ такое, что, например, $m_2 = km_1$ и $n_2 = kn_1$.

c. Иррациональные числа

Определение 5. Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются *иррациональными.*

Классическим примером иррационального действительного числа является $\sqrt{2}$, т. е. число $s \in \mathbb{R}$ такое, что $s > 0$ и $s^2 = 2$. Иррациональность $\sqrt{2}$ в силу теоремы Пифагора эквивалентна утверждению о несоизмеримости диагонали и стороны квадрата.

Итак, проверим, во-первых, что *существует положительное действительное число $s \in \mathbb{R}$, квадрат которого равен двум*, и, во-вторых, что $s \notin \mathbb{Q}$.

◄ Пусть X и Y — множества положительных действительных чисел такие, что $\forall x \in X\ (x^2 < 2)$, $\forall y \in Y\ (2 < y^2)$. Поскольку $1 \in X$, а $2 \in Y$, то X и Y — непустые множества.

Далее, поскольку для положительных x и y $(x < y) \Leftrightarrow (x^2 < y^2)$, то любой элемент $x \in X$ меньше любого элемента $y \in Y$. По аксиоме полноты существует число $s \in \mathbb{R}$ такое, что $x \leqslant s \leqslant y$ для $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$.

Покажем, что $s^2 = 2$.

Если бы было $s^2 < 2$, то, например, квадрат числа $s + \frac{2 - s^2}{3s}$, большего чем s, был бы меньше 2. Действительно, ведь $1 \in X$, поэтому $1^2 \leqslant s^2 < 2$ и $0 < \Delta = 2 - s^2 < 1$. Значит,

$$\left(s + \frac{\Delta}{3s}\right)^2 = s^2 + 2 \cdot \frac{\Delta}{3} + \left(\frac{\Delta}{3s}\right)^2 < s^2 + 3 \cdot \frac{\Delta}{3} = s^2 + \Delta = 2.$$

Следовательно, $\left(s + \frac{\Delta}{3s}\right) \in X$, что несовместимо с неравенством $x \leqslant s$ для любого элемента $x \in X$.

Если бы было $2 < s^2$, то, например, квадрат числа $s - \frac{s^2-2}{3s}$, меньшего чем s, был бы больше 2. Действительно, ведь $2 \in Y$, поэтому $2 < s^2 \leqslant 2^2$ или $0 < \Delta = s^2 - 2 < 3$ и $0 < \frac{\Delta}{3} < 1$. Отсюда

$$\left(s - \frac{\Delta}{3s}\right)^2 = s^2 - 2 \cdot \frac{\Delta}{3} + \left(\frac{\Delta}{3s}\right)^2 > s^2 - 3 \cdot \frac{\Delta}{3} = s^2 - \Delta = 2.$$

и мы вступаем в противоречие с тем, что s ограничивает множество Y снизу.

Таким образом, реализуется только одна оставшаяся возможность: $s^2 = 2$.

Покажем, наконец, что $s \notin \mathbb{Q}$. Предположим, что $s \in \mathbb{Q}$, и пусть $\frac{m}{n}$ — несократимое представление s. Тогда $m^2 = 2 \cdot n^2$, следовательно, m^2, а значит, и m делится на 2. Но если $m = 2k$, то $2k^2 = n^2$ и по той же причине n должно делиться на 2, что противоречит несократимости дроби $\frac{m}{n}$. ►

Сейчас мы трудились над тем, чтобы доказать существование иррациональных чисел. Вскоре мы увидим, что в некотором смысле почти все действительные числа иррациональны. Будет показано, что мощность множества иррациональных чисел больше мощности множества всех рациональных чисел и совпадает с мощностью множества всех действительных чисел.

Среди иррациональных чисел выделяют еще так называемые алгебраические иррациональности и трансцендентные числа.

Вещественное число называется *алгебраическим*, если оно является корнем некоторого алгебраического уравнения

$$a_0x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

с рациональными (или, что эквивалентно, с целыми) коэффициентами.

В противном случае число называется *трансцендентным*.

Мы увидим, что мощность множества алгебраических чисел такая же, как мощность множества рациональных чисел, а мощность множества трансцендентных чисел такая же, как мощность всех действительных чисел; поэтому на первый взгляд кажутся парадоксальными и неестественными трудности в предъявлении конкретного трансцендентного числа, точнее, в доказательстве его трансцендентности.

Так, например, только в 1882 г. было доказано, что классическое геометрическое число π является трансцендентным[1)], а одна из знаменитых проблем Гильберта[2)] состояла в том, чтобы доказать трансцендентность числа α^β, где α — алгебраическое, $(\alpha > 0) \wedge (\alpha \neq 1)$, а β — алгебраическое иррациональное число (например, $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{2}$).

3. Принцип Архимеда. Переходим к важному как в теоретическом отношении, так и в плане конкретного использования чисел при измерениях и вычислениях принципу Архимеда[3)]. Мы докажем его, опираясь на аксиому полноты (точнее, на эквивалентную ей лемму о верхней грани). При другой аксиоматике множества действительных чисел этот фундаментальный принцип часто включают в список аксиом.

Заметим, что утверждения, которые мы до сих пор доказывали о натуральных и целых числах, совершенно не использовали аксиому полноты. Как будет видно из дальнейшего, принцип Архимеда, в сущности, отражает свойства натуральных и целых чисел, связанные с аксиомой полноты. С этих свойств мы и начнем.

1° *В любом непустом ограниченном сверху подмножестве множества натуральных чисел имеется максимальный элемент.*

◀ Если $E \subset \mathbb{N}$ — рассматриваемое множество, то по лемме о верхней грани $\exists!\, \sup E = s \in \mathbb{R}$. По определению верхней грани, в E найдется натуральное число $n \in E$, удовлетворяющее условию $s - 1 < n \leqslant s$. Тогда $n = \max E$, поскольку все натуральные числа, которые больше n, не меньше $n + 1$, а $n + 1 > s$. ▶

---

1) π — число, равное в евклидовой геометрии отношению длины окружности к ее диаметру. Отсюда общепринятое с XVIII века после Эйлера обозначение этого числа начальной буквой греческого слова περιφέρεια — периферия (окружность). Трансцендентность π доказана немецким математиком Ф. Линдеманом (1852 – 1939). Из трансцендентности π, в частности, вытекает невозможность построения циркулем и линейкой отрезка длины π (задача о спрямлении окружности), как и неразрешимость этими средствами древней задачи о квадратуре круга.

2) Д. Гильберт (1862 – 1943) — выдающийся немецкий математик, сформулировавший в 1900 г. на Международном конгрессе математиков в Париже двадцать три относящиеся к различным областям математики проблемы, получившие впоследствии название «проблем Гильберта». Вопрос, о котором идет речь в тексте (седьмая проблема Гильберта), был положительно решен в 1934 г. советским математиком А. О. Гельфондом (1906 – 1968) и немецким математиком Т. Шнайдером (1911 – 1989).

3) Архимед (287 – 212 гг. до н. э.) — гениальный греческий ученый, про которого один из основоположников анализа Лейбниц в свое время сказал: «Изучая труды Архимеда, перестаешь удивляться успехам современных математиков».

Следствия. 2° *Множество натуральных чисел не ограничено сверху.*

◀ В противном случае существовало бы максимальное натуральное число. Но $n < n + 1$. ▶

3° *В любом непустом ограниченном сверху подмножестве множества целых чисел имеется максимальный элемент.*

◀ Можно дословно повторить доказательство утверждения 1°, заменяя $\mathbb{N}$ на $\mathbb{Z}$. ▶

4° *В любом непустом ограниченном снизу подмножестве множества целых чисел имеется минимальный элемент.*

◀ Можно, например, повторить доказательство утверждения 1°, заменяя $\mathbb{N}$ на $\mathbb{Z}$ и используя вместо леммы о верхней грани лемму о существовании нижней грани у ограниченного снизу числового множества.

Можно также перейти к противоположным числам («поменять знаки») и воспользоваться уже доказанным в 3°. ▶

5° *Множество целых чисел не ограничено ни сверху, ни снизу.*

◀ Вытекает из 3° и 4° или прямо из 2°. ▶

Теперь сформулируем

6° Принцип Архимеда. *Если фиксировать произвольное положительное число h, то для любого действительного числа x найдется и притом единственное целое число k такое, что $(k-1)h \leqslant x < kh$.*

◀ Поскольку $\mathbb{Z}$ не ограничено сверху, множество $\left\{n \in \mathbb{Z} \mid \frac{x}{h} < n\right\}$ — непустое ограниченное снизу подмножество множества целых чисел. Тогда (см. 4°) в нем есть минимальный элемент k, т. е. $(k-1) \leqslant x/h < k$. Поскольку $h > 0$, эти неравенства эквивалентны приведенным в формулировке принципа Архимеда. Единственность $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющего двум последним неравенствам, следует из единственности минимального элемента числового множества (см. § 1, п. 3). ▶

Некоторые следствия:

7° *Для любого положительного числа ε существует натуральное число n такое, что $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.*

◀ По принципу Архимеда найдется $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $1 < \varepsilon \cdot n$. Поскольку $0 < 1$ и $0 < \varepsilon$, имеем $0 < n$. Таким образом, $n \in \mathbb{N}$ и $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. ▶

8° *Если число* $x \in \mathbb{R}$ *таково, что* $0 \leqslant x$ *и для любого* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено* $x < \frac{1}{n}$, *то* $x = 0$.

◀ Соотношение $0 < x$ невозможно в силу утверждения 7°. ▶

9° *Для любых чисел* a, $b \in \mathbb{R}$ *таких, что* $a < b$, *найдется рациональное число* $r \in \mathbb{Q}$ *такое, что* $a < r < b$.

◀ Учитывая 7°, подберем $n \in \mathbb{N}$ так, что $0 < \frac{1}{n} < b - a$. По принципу Архимеда найдем такое число $m \in \mathbb{Z}$, что $\frac{m-1}{n} \leqslant a < \frac{m}{n}$. Тогда $\frac{m}{n} < b$, ибо в противном случае мы имели бы $\frac{m-1}{n} \leqslant a < b \leqslant \frac{m}{n}$, откуда следовало бы, что $\frac{1}{n} \geqslant b - a$. Таким образом, $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ и $a < \frac{m}{n} < b$. ▶

10° *Для любого числа* $x \in \mathbb{R}$ *существует и притом единственное целое число* $k \in \mathbb{Z}$ *такое, что* $k \leqslant x < k + 1$.

◀ Это непосредственно вытекает из принципа Архимеда. ▶

Указанное число k обозначается $[x]$ и называется *целой частью числа* x. Величина $\{x\} := x - [x]$ называется *дробной частью числа* x. Итак, $x = [x] + \{x\}$, причем $\{x\} \geqslant 0$.

4. Геометрическая интерпретация множества действительных чисел и вычислительные аспекты операций с действительными числами

а. Числовая ось. По отношению к действительным числам часто используется образный геометрический язык, связанный с тем обстоятельством, что, как в общих чертах известно из школы, в силу аксиом геометрии между точками прямой $\mathbb{L}$ и множеством $\mathbb{R}$ вещественных чисел можно установить взаимно однозначное соответствие $f\colon \mathbb{L} \to \mathbb{R}$. Причем это соответствие связано с движениями прямой. А именно, если T — параллельный перенос прямой $\mathbb{L}$ по себе, то существует число $t \in \mathbb{R}$ (зависящее только от T) такое, что $f(T(x)) = f(x) + t$ для любой точки $x \in \mathbb{L}$.

Число $f(x)$, соответствующее точке $x \in \mathbb{L}$, называется *координатой* точки x. Ввиду взаимной однозначности отображения $f\colon \mathbb{L} \to \mathbb{R}$ координату точки часто называют просто точкой. Например, вместо фразы «отметим точку, координата которой 1», говорят «отметим точку 1». Прямую $\mathbb{L}$ при наличии указанного соответствия $f\colon \mathbb{L} \to \mathbb{R}$ называют *координатной осью*, *числовой осью* или *числовой прямой*. Ввиду биективности f само множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел также часто называют числовой прямой, а его элементы — точками числовой прямой.

Как отмечалось, биективное отображение $f\colon \mathbb{L} \to \mathbb{R}$, задающее на $\mathbb{L}$ координаты, таково, что при параллельном переносе T координаты образов точек прямой $\mathbb{L}$ отличаются от координат самих точек на одну и ту же величину $t \in \mathbb{R}$. Ввиду этого f полностью определяется указанием точки с координатой 0 и точки с координатой 1 или, короче, точки нуль, называемой *началом координат*, и точки 1. Отрезок, определяемый этими точками, называется *единичным отрезком.* Направление, определяемое лучом с вершиной 0, содержащим точку 1, называется положительным, а движение в этом направлении (от 0 к 1) — движением слева направо. В соответствии с этим соглашением 1 лежит правее 0, а 0 — левее 1.

При параллельном переносе T, переводящем начало координат x_0 в точку $x_1 = T(x_0)$ с координатой 1, координаты образов всех точек на единицу больше координат прообразов, поэтому мы находим точку $x_2 = T(x_1)$ с координатой 2, точку $x_3 = T(x_2)$ координатой 3, $\ldots$, точку $x_{n+1} = T(x_n)$ с координатой $n + 1$, а также точку $x_{-1} = T^{-1}(x_0)$ с координатой -1, $\ldots$, точку $x_{-n-1} = T^{-1}(x_{-n})$ с координатой $-n - 1$. Таким образом, получаем все точки с целыми координатами $m \in \mathbb{Z}$.

Умея удваивать, утраивать, $\ldots$ единичный отрезок, по теореме Фалеса его же можно разбить на соответствующее число n конгруэнтных отрезков. Беря тот из них, одним концом которого является начало координат, для координаты x другого конца имеем уравнение $n \cdot x = 1$, т. е. $x = \frac{1}{n}$. Отсюда находим все точки с рациональными координатами $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

Но останутся еще точки $\mathbb{L}$, ведь есть же отрезки, несоизмеримые с единичным. Каждая такая точка (как и любая другая точка прямой) разбивает прямую на два луча, на каждом из которых есть точки с целыми (рациональными) координатами (это следствие исходного геометрического принципа Архимеда). Таким образам, точка производит разбиение или, как говорят, *сечение* $\mathbb{Q}$ на два непустых множества X и Y, отвечающие рациональным точкам (точкам с рациональными координатами) левого и правого лучей. По аксиоме полноты найдется число c, разделяющее X и Y, т. е. $x \leqslant c \leqslant y$ для $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$. Поскольку $X \cup Y = \mathbb{Q}$, то $\sup X = s = i = \inf Y$, ибо в противном случае $s < i$ и между s и i нашлось бы рациональное число, не лежащее ни в X, ни в Y. Таким образом, $s = i = c$. Это однозначно определенное число c и ставится в соответствие указанной точке прямой.

Описанное сопоставление точкам прямой их координат доставляет наглядную модель как отношению порядка в $\mathbb{R}$ (отсюда и термин «линейная упорядоченность»), так и аксиоме полноты, или непрерывности $\mathbb{R}$, которая на геометрическом языке означает, что в прямой $\mathbb{L}$ «нет дыр», разбивающих ее на два не имеющих общих точек куска (такое разбиение осуществляется некоторой точкой прямой $\mathbb{L}$).

Мы не станем вдаваться в дальнейшие детали конструкции отображения $f\colon \mathbb{L} \to \mathbb{R}$, поскольку геометрическую интерпретацию множества действительных чисел мы будем привлекать исключительно для наглядности и для возможного подключения весьма полезной геометрической интуиции читателя. Что же касается формальных доказательств, то, как и до сих пор, они будут опираться либо на тот набор фактов, который мы уже получили из аксиоматики действительных чисел, либо непосредственно на эту аксиоматику.

Геометрический же язык мы будем использовать постоянно.

Введем следующие обозначения и названия для перечисленных ниже числовых множеств:

$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ — интервал ab;

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ — отрезок ab;

$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ — полуинтервал ab, содержащий конец b;

$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ — полуинтервал ab, содержащий конец a.

Определение 6. Интервалы, отрезки и полуинтервалы называются *числовыми промежутками* или просто *промежутками*. Числа, определяющие промежуток, называются его концами.

Величина $b - a$ называется *длиной* промежутка ab. Если I — некоторый промежуток, то длину его мы будем обозначать через $|I|$ (происхождение такого обозначения вскоре станет понятным).

Множества

$$]a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \qquad]-\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\},$$
$$[a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}, \qquad]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\},$$

а также $]-\infty, +\infty[:= \mathbb{R}$, принято называть *неограниченными промежутками.*

В соответствии с таким употреблением символов $+\infty$ (читается «плюс бесконечность») и $-\infty$ (читается «минус бесконечность») для обозначения неограниченности числового множества X сверху (снизу), принято писать $\sup X = +\infty$ $(\inf X = -\infty)$.

Определение 7. Интервал, содержащий точку $x \in \mathbb{R}$, будем называть *окрестностью* этой точки.

В частности, при $\delta > 0$ интервал $]x-\delta, x+\delta[$ называется *δ-окрестностью* точки x. Его длина 2δ.

Расстояние между числами x, $y \in \mathbb{R}$ измеряется длиной промежутка, концами которого они являются.

Чтобы не разбираться при этом, «где лево, а где право», т. е. $x < y$ или $y < x$, и чему равна длина, $y - x$ или $x - y$, можно использовать полезную функцию

$$|x| = \begin{cases} x & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ -x & \text{при} \quad x < 0, \end{cases}$$

называемую *модулем* или *абсолютной величиной* числа.

Определение 8. *Расстоянием* между x, $y \in \mathbb{R}$ называется величина $|x - y|$.

Расстояние неотрицательно и равно нулю только при совпадении x и y; расстояние от x до y и от y до x одно и то же, ибо $|x - y| = |y - x|$; наконец, если $z \in \mathbb{R}$, то $|x - y| \leqslant |x - z| + |z - y|$, т. е. имеет место так называемое неравенство треугольника.

Неравенство треугольника следует из свойства абсолютной величины числа, которое также называется неравенством треугольника (ибо получается из предыдущего при $z = 0$ и замене y на $-y$). А именно, *для любых чисел x, y справедливо неравенство*

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|,$$

причем равенство в нем имеет место в том и только в том случае, когда оба числа x, y неотрицательны или неположительны.

◀ Если $0 \leqslant x$ и $0 \leqslant y$, то $0 \leqslant x + y$, $|x + y| = x + y$, $|x| = x$, $|y| = y$ и равенство установлено.

Если $x \leqslant 0$ и $y \leqslant 0$, то $x + y \leqslant 0$, $|x + y| = -(x + y) = -x - y$, $|x| = -x$, $|y| = -y$ и опять равенство имеет место.

Пусть теперь одно из чисел отрицательно, а другое положительно, например, $x < 0 < y$. Тогда либо $x < x + y \leqslant 0$, либо $0 \leqslant x + y < y$. В первом случае $|x+y| < |x|$, во втором $|x+y| < |y|$, т. е. в обоих случаях $|x + y| < |x| + |y|$. ►

Используя принцип индукции, можно проверить, что

$$|x_1 + \ldots + x_n| \leqslant |x_1| + \ldots + |x_n|,$$

причем равенство имеет место, если и только если все числа $x_1, \ldots, x_n$ одновременно неотрицательны или одновременно неположительны.

Число $\dfrac{a+b}{2}$ часто называется *серединой* или *центром* промежутка с концами a, b, поскольку оно равноудалено от концов промежутка.

В частности, точка $x \in \mathbb{R}$ является центром своей δ-окрестности $]x - \delta, x + \delta[$ и все точки δ-окрестности удалены от x меньше чем на δ.

b. Задание числа последовательностью приближений. Измеряя реальную физическую величину, мы получаем число, которое, как правило, меняется при повторном измерении, особенно если изменить инструмент или метод измерения. Таким образом, результатом измерения обычно является некоторое приближенное значение искомой величины. Качество или точность измерения характеризуется, например, величиной возможного уклонения истинного значения величины от ее значения, полученного в результате измерения. При этом может случиться, что точное значение величины (если оно в принципе существует) мы так никогда и не предъявим. Встав, однако, на более конструктивную позицию, можно (или следует) считать, что мы вполне знаем искомую величину, если в состоянии измерить ее с любой наперед заданной точностью. Такая позиция означает отождествление числа с последовательностью[1] все более точных его приближений числами, получаемыми при измерении. Но всякое измерение есть конечная совокупность сравнений с некоторым эталоном или с соизмеримой с ним его частью, поэтому результат измерения должен выражаться натуральными, целыми или, более общо, рациональными числами. Значит, последовательностями рациональных чисел в принципе можно описать все множество вещественных чисел, построив после должного анализа математическую

[1] Если n — номер измерения, а x_n — результат измерения, то соответствие $n \mapsto x_n$ есть не что иное, как функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ натурального аргумента, т. е., по определению, *последовательность* (в данном случае последовательность чисел). Подробному изучению числовых последовательностей посвящен § 1 гл. III.

копию или, лучше сказать, модель того, что делают с числами люди, не подозревающие об их аксиоматическом описании. А они вместо сложения и умножения неизвестных им измеряемых величин складывают и умножают их приближенные значения (не всегда, правда, умея сказать, какое отношение имеет результат таких действий к тому, что получилось бы, если бы эти действия производились с точными значениями величин; ниже мы обсудим этот вопрос).

Отождествив число с последовательностью его приближенных значений, мы, таким образом, желая, например, сложить два числа, должны складывать последовательности их приближенных значений. Получающуюся при этом новую последовательность чисел надо считать новым числом, называемым суммой первых двух. Но число ли это? Деликатность вопроса состоит в том, что не каждая случайным образом построенная последовательность служит последовательностью сколь угодно точных приближений некоторой величины. То есть необходимо еще научиться по самой последовательности узнавать, представляет она некоторое число или нет. Другой вопрос, который возникает при попытке математического копирования операций с приближенными числами, состоит в том, что разные последовательности могут быть последовательностями приближений одной и той же величины. Соотношение между последовательностями приближений, определяющими число, и самими числами примерно такое же, как между точкой на карте и указкой, которая указывает нам эту точку. Положение указки определяет точку, но точка определяет положение только конца указки, не мешая взять указку по-другому, поудобнее.

Этим вопросам дал точное описание и реализовал всю намеченную здесь в общих чертах программу построения модели вещественных чисел еще О. Коши[1]. Надо надеяться, что после изучения теории пределов вы будете в состоянии самостоятельно повторить эти конструкции Коши.

Сказанное до сих пор, разумеется, не претендует на математическую строгость. Цель этого неформального отступления — обратить внимание читателя на принципиальную возможность одновременного существования различных естественных моделей действительных чисел; я пытался также дать некоторое представление об отношении чисел к тому, что

[1] О. Коши (1789 – 1857) — французский математик, один из наиболее активных творцов современного языка и аппарата классического анализа.

нас окружает, и пояснить фундаментальную роль натуральных и рациональных чисел; наконец, мне хотелось показать естественность и необходимость приближенных вычислений.

Последующая часть настоящего пункта посвящена используемым в дальнейшем и представляющим самостоятельный интерес простым, но важным оценкам погрешностей, возникающих при арифметических операциях над приближенными величинами.

Переходим к точным формулировкам.

Определение 9. Если x — точное значение некоторой величины, а $\tilde{x}$ — известное приближенное значение той же величины, то числа

$$\Delta(\tilde{x}) := |x - \tilde{x}|,$$

$$\delta(\tilde{x}) := \frac{\Delta(\tilde{x})}{|\tilde{x}|}$$

называются соответственно *абсолютной* и *относительной погрешностью приближения* $\tilde{x}$. Относительная погрешность при $\tilde{x} = 0$ не определена.

Поскольку значение x неизвестно, значения $\Delta(\tilde{x})$ и $\delta(\tilde{x})$ также неизвестны. Однако обычно бывают известны оценки сверху $\Delta(\tilde{x}) < \Delta$, $\delta(\tilde{x}) < \delta$ этих величин. В этом случае говорят, что абсолютная или относительная погрешность приближения $\tilde{x}$ не превосходит Δ или δ соответственно. На практике приходится иметь дело только с оценками погрешностей, поэтому сами величины Δ и δ часто называют *абсолютной* и *относительной* погрешностями приближения, но мы этого делать не будем.

Запись $x = \tilde{x} \pm \Delta$ означает, что $\tilde{x} - \Delta \leqslant x \leqslant \tilde{x} + \Delta$.

Например,

гравитационная постоянная	$G = (6{,}67259 \pm 0{,}00085) \cdot 10^{-11}\,\text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$,
скорость света в вакууме	$c = 299792458\,\text{м/с}$ (точно),
постоянная Планка	$h = (6{,}6260755 \pm 0{,}0000040) \cdot 10^{-34}\,\text{Дж} \cdot \text{с}$,
заряд электрона	$e = (1{,}60217733 \pm 0{,}00000049) \cdot 10^{-19}\,\text{Кл}$,
масса покоя электрона	$m_e = (9{,}1093897 \pm 0{,}0000054) \cdot 10^{-31}\,\text{кг}$.

Основным показателем точности измерения является величина относительной погрешности приближения, обычно выражаемая в процентах.

Так, в приведенных примерах относительные погрешности не превосходят соответственно

$$13 \cdot 10^{-5}; \quad 0; \quad 6 \cdot 10^{-7}; \quad 31 \cdot 10^{-8}; \quad 6 \cdot 10^{-7}$$

или, в процентах от результата измерения,

$$13 \cdot 10^{-3}\,\%; \quad 0\,\%; \quad 6 \cdot 10^{-5}\,\%; \quad 31 \cdot 10^{-6}\,\%; \quad 6 \cdot 10^{-5}\,\%.$$

Оценим теперь погрешности, возникающие при арифметических операциях с приближенными величинами.

Утверждение. *Если*

$$|x - \tilde{x}| = \Delta(\tilde{x}), \qquad |y - \tilde{y}| = \Delta(\tilde{y}),$$

то

$$\Delta(\tilde{x} + \tilde{y}) := |(x + y) - (\tilde{x} + \tilde{y})| \leqslant \Delta(\tilde{x}) + \Delta(\tilde{y}), \tag{1}$$

$$\Delta(\tilde{x} \cdot \tilde{y}) := |x \cdot y - \tilde{x} \cdot \tilde{y}| \leqslant |\tilde{x}|\Delta(\tilde{y}) + |\tilde{y}|\Delta(\tilde{x}) + \Delta(\tilde{x}) \cdot \Delta(\tilde{y}); \tag{2}$$

если, кроме того,

$$y \neq 0, \quad \tilde{y} \neq 0 \quad \text{и} \quad \delta(\tilde{y}) = \frac{\Delta(\tilde{y})}{|\tilde{y}|} < 1,$$

то

$$\Delta\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right) := \left|\frac{x}{y} - \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right| \leqslant \frac{|\tilde{x}|\Delta(\tilde{y}) + |\tilde{y}|\Delta(\tilde{x})}{\tilde{y}^2} \cdot \frac{1}{1 - \delta(\tilde{y})}. \tag{3}$$

◄ Пусть $x = \tilde{x} + \alpha$, $y = \tilde{y} + \beta$. Тогда

$$\Delta(\tilde{x} + \tilde{y}) = |(x + y) - (\tilde{x} + \tilde{y})| = |\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta| = \Delta(\tilde{x}) + \Delta(\tilde{y}),$$

$$\begin{aligned}\Delta(\tilde{x} \cdot \tilde{y}) = |xy - \tilde{x}\tilde{y}| = |(\tilde{x} + \alpha)(\tilde{y} + \beta) - \tilde{x}\tilde{y}| &= \\ = |\tilde{x}\beta + \tilde{y}\alpha + \alpha\beta| \leqslant |\tilde{x}||\beta| + |\tilde{y}||\alpha| + |\alpha\beta| &= \\ = |\tilde{x}|\Delta(\tilde{y}) + |\tilde{y}|\Delta(\tilde{x}) + \Delta(\tilde{x}) \cdot \Delta(\tilde{y}),&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right) &= \left|\frac{x}{y} - \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right| = \left|\frac{x\tilde{y} - y\tilde{x}}{y\tilde{y}}\right| = \\ &= \left|\frac{(\tilde{x} + \alpha)\tilde{y} - (\tilde{y} + \beta)\tilde{x}}{\tilde{y}^2}\right| \cdot \left|\frac{1}{1 + \beta/\tilde{y}}\right| \leqslant \frac{|\tilde{x}||\beta| + |\tilde{y}||\alpha|}{\tilde{y}^2} \cdot \frac{1}{1 - \delta(\tilde{y})} = \\ &= \frac{|\tilde{x}|\Delta(\tilde{y}) + |\tilde{y}|\Delta(\tilde{x})}{\tilde{y}^2} \cdot \frac{1}{1 - \delta(\tilde{y})}.\end{aligned}$$ ►

Из полученных оценок абсолютных погрешностей вытекают следующие оценки относительных погрешностей:

$$\delta(\tilde{x}+\tilde{y}) \leqslant \frac{\Delta(\tilde{x})+\Delta(\tilde{y})}{|\tilde{x}+\tilde{y}|}, \tag{1'}$$

$$\delta(\tilde{x}\cdot\tilde{y}) \leqslant \delta(\tilde{x})+\delta(\tilde{y})+\delta(\tilde{x})\cdot\delta(\tilde{y}), \tag{2'}$$

$$\delta\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right) \leqslant \frac{\delta(\tilde{x})+\delta(\tilde{y})}{1-\delta(\tilde{y})}. \tag{3'}$$

На практике, при работе с достаточно хорошими приближениями, $\Delta(\tilde{x})\cdot\Delta(\tilde{y}) \approx 0$, $\delta(\tilde{x})\cdot\delta(\tilde{y}) \approx 0$, $1-\delta(\tilde{y}) \approx 1$, поэтому пользуются соответствующими упрощенными, полезными, но формально неверными вариантами формул (2), (3), (2′), (3′):

$$\Delta(\tilde{x}\cdot\tilde{y}) \leqslant |\tilde{x}|\Delta(\tilde{y})+|\tilde{y}|\Delta(\tilde{x}),$$

$$\Delta\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right) \leqslant \frac{|\tilde{x}|\Delta(\tilde{y})+|\tilde{y}|\Delta(\tilde{x})}{\tilde{y}^2},$$

$$\delta(\tilde{x}\cdot\tilde{y}) \leqslant \delta(\tilde{x})+\delta(\tilde{y}),$$

$$\delta\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right) \leqslant \delta(\tilde{x})+\delta(\tilde{y}).$$

Формулы (3), (3′) показывают, что надо избегать деления на близкие к нулю или довольно грубые приближения, когда $\tilde{y}$ или $1-\delta(\tilde{y})$ малы по абсолютной величине.

Формула (1′) предостерегает от сложения приближенных величин, если они близки по абсолютной величине и противоположны по знаку, поскольку тогда $|\tilde{x}+\tilde{y}|$ близко к нулю.

Во всех этих случаях погрешности могут резко возрасти.

Например, пусть ваш рост дважды измерили некоторым прибором. Точность измерения $\pm 0{,}5$ см. Перед вторым измерением вам под ноги подложили лист бумаги. Тем не менее может случиться, что результаты измерений будут такими: $H_1 = (200 \pm 0{,}5)$ см и $H_2 = (199{,}8 \pm 0{,}5)$ см соответственно.

Таким образом, бессмысленно искать толщину бумаги в виде разности $H_2 - H_1$, из которой только следует, что толщина не больше 0,8 см, что, конечно, очень грубо отражает (если это вообще можно назвать «отражает») истинное положение вещей.

Стоит, однако, обратить внимание и на другой, более оптимистичный вычислительный эффект, благодаря которому грубыми приборами удается провести сравнительно тонкие измерения. Например, если на том приборе, где только что измерили ваш рост, измерили высоту пачки в 1000 листов той же бумаги и получили результат $(20 \pm 0{,}5)$ см, то толщина одного листа $(0{,}02 \pm 0{,}0005)$ см $= (0{,}2 \pm 0{,}005)$ мм, что вытекает из формулы (1).

То есть с абсолютной погрешностью, не превышающей 0,005 мм, толщина одного листа равна 0,2 мм. Относительная погрешность этого измерения не превышает 0,025 или 2,5%.

Эту идею можно развить и предложить, например, способ выделения слабого периодического сигнала из превышающих его случайных радиопомех, называемых обычно белым шумом.

c. Позиционная система счисления. Выше говорилось о том, что каждое число можно задать последовательностью приближающих его рациональных чисел.

Теперь напомним важный в вычислительном отношении метод, который позволяет единообразно для каждого действительного числа строить такую последовательность рациональных приближений. Этот метод ведет к позиционной системе счисления.

Лемма. *Если фиксировать число $q > 1$, то для любого положительного числа $x \in \mathbb{R}$ найдется и притом единственное целое число $k \in \mathbb{Z}$ такое, что*
$$q^{k-1} \leqslant x < q^k.$$

◀ Проверим сначала, что множество чисел вида q^k, $k \in \mathbb{N}$, не ограничено сверху. В противном случае оно имело бы верхнюю грань s и по определению верхней грани нашлось бы натуральное число $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{s}{q} < q^m \leqslant s$. Но тогда $s < q^{m+1}$ и s — не верхняя грань нашего множества.

Поскольку $1 < q$, то $q^m < q^n$ при $m < n$, m, $n \in \mathbb{Z}$, поэтому мы заодно показали, что для любого числа $c \in \mathbb{R}$ найдется такое натуральное число $N \in \mathbb{N}$, что при любом натуральном $n > N$ будет $c < q^n$.

Отсюда вытекает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $M \in \mathbb{N}$ такое, что при всех натуральных $m > M$ будет $\dfrac{1}{q^m} < \varepsilon$.

Действительно, достаточно положить $c = \frac{1}{\varepsilon}$, а $N = M$; тогда $\frac{1}{\varepsilon} < q^m$ при $m > M$.

Итак, множество целых чисел $m \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих неравенству $x < q^m$ при $x > 0$, ограничено снизу. Тогда в нем есть минимальный элемент k, который, очевидно, и будет искомым, так как для него $q^{k-1} \leqslant x < q^k$.

Единственность такого целого числа k следует из того, что если $m, n \in \mathbb{Z}$ и, например, $m < n$, то $m \leqslant n - 1$, и поэтому если $q > 1$, то $q^m \leqslant q^{n-1}$.

Действительно, из этого замечания видно, что неравенства $q^{m-1} \leqslant \leqslant x < q^m$ и $q^{n-1} \leqslant x < q^n$, из которых следует $q^{n-1} \leqslant x < q^m$, несовместны при $m \neq n$. ►

Воспользуемся этой леммой в следующей конструкции.

Фиксируем $q > 1$ и возьмем произвольное положительное число $x \in \mathbb{R}$.

По лемме найдем единственное число $p \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$q^p \leqslant x < q^{p+1}. \tag{1}$$

Определение 10. Число p, удовлетворяющее соотношению (1), называется *порядком числа x по основанию q* или (при фиксированном q) просто *порядком числа x*.

По принципу Архимеда найдем единственное натуральное число $\alpha_p \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\alpha_p q^p \leqslant x < \alpha_p q^p + q^p. \tag{2}$$

Учитывая (1), можно утверждать, что $\alpha_p \in \{1, \ldots, q-1\}$.

Все дальнейшие шаги нашего построения будут повторять тот шаг, который мы сейчас сделаем, исходя из соотношения (2).

Из соотношения (2) и принципа Архимеда следует, что существует и притом единственное число $\alpha_{p-1} \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ такое, что

$$\alpha_p q^p + \alpha_{p-1} q^{p-1} \leqslant x < \alpha_p q^p + \alpha_{p-1} q^{p-1} + q^{p-1}. \tag{3}$$

Если уже сделано n таких шагов и получено, что

$$\alpha_p q^p + \alpha_{p-1} q^{p-1} + \ldots + \alpha_{p-n} q^{p-n} \leqslant$$
$$\leqslant x < \alpha_p q^p + \alpha_{p-1} q^{p-1} + \ldots + \alpha_{p-n} q^{p-n} + q^{p-n},$$

то по принципу Архимеда найдется единственное число $\alpha_{p-n-1} \in$ $\in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ такое, что

$$\alpha_p q^p + \ldots + \alpha_{p-n} q^{p-n} + \alpha_{p-n-1} q^{p-n-1} \leqslant \\ \leqslant x < \alpha_p q^p + \ldots + \alpha_{p-n} q^{p-n} + \alpha_{p-n-1} q^{p-n-1} + q^{p-n-1}.$$

Таким образом, указан алгоритм, по которому положительному числу x однозначно ставится в соответствие последовательность чисел $\alpha_p, \alpha_{p-1}, \ldots, \alpha_{p-n}, \ldots$ из множества $\{0, 1, \ldots, q-1\}$ или, менее формально, последовательность рациональных чисел r_n специального вида:

$$r_n = \alpha_p q^p + \ldots + \alpha_{p-n} q^{p-n}, \tag{4}$$

причем так, что

$$r_n \leqslant x < r_n + \frac{1}{q^{n-p}}. \tag{5}$$

Иными словами, мы строим всё лучшие приближения снизу и сверху для числа x посредством специальной последовательности рациональных чисел (4). Символ $\alpha_p \ldots \alpha_{p-n} \ldots$ есть шифр всей последовательности $\{r_n\}$. Чтобы по нему можно было восстановить последовательность $\{r_n\}$, необходимо как-то отметить величину p — порядок числа x.

Условились при $p \geqslant 0$ после α_0 ставить точку или запятую; при $p < 0$ слева от α_p дописывать $|p|$ нулей и после крайнего левого ставить точку или запятую (напомним, что $\alpha_p \neq 0$).

Например, при $q = 10$

$$123{,}45 := 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2},$$

$$0{,}00123 := 1 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-5};$$

при $q = 2$

$$1000{,}001 := 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^{-3}.$$

Таким образом, значение цифры в символе $\alpha_p \ldots \alpha_{p-n} \ldots$ зависит от позиции, которую она занимает по отношению к точке или запятой.

После этого соглашения символ $\alpha_p \ldots \alpha_0, \ldots$ позволяет однозначно восстановить всю последовательность приближений.

Из неравенств (5) видно (проверьте!), что двум различным числам x, x' отвечают различные последовательности $\{r_n\}$, $\{r'_n\}$, а значит, и разные символы $\alpha_p \ldots \alpha_0, \ldots$, $\alpha'_p \ldots \alpha'_0, \ldots$

Теперь решим вопрос, всякому ли символу вида $\alpha_p \ldots \alpha_0, \ldots$ отвечает некоторое число $x \in \mathbb{R}$. Оказывается, нет.

Заметим, что в силу описанного алгоритма последовательного получения чисел $\alpha_{p-n} \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ не может случиться так, что все они, начиная с некоторого, будут одинаковы и равны $q-1$.

Действительно, если при $n > k$

$$r_n = \alpha_p q^p + \ldots + \alpha_{p-k} q^{p-k} + (q-1) q^{p-k-1} + \ldots + (q-1) q^{p-n},$$

т. е.

$$r_n = r_k + \frac{1}{q^{k-p}} - \frac{1}{q^{n-p}}, \tag{6}$$

то в силу (5)

$$r_k + \frac{1}{q^{k-p}} - \frac{1}{q^{n-p}} \leqslant x < r_k + \frac{1}{q^{k-p}}.$$

Тогда для любого $n > k$

$$0 < r_k + \frac{1}{q^{k-p}} - x < \frac{1}{q^{n-p}},$$

что, как мы знаем из доказанной выше леммы, невозможно.

Полезно также отметить, что если среди чисел $\alpha_{p-k-1}, \ldots, \alpha_{p-n}$ хотя бы одно меньше $q-1$, то вместо (6) можно написать, что

$$r_n < r_k + \frac{1}{q^{k-p}} - \frac{1}{q^{n-p}}$$

или, что то же самое,

$$r_n + \frac{1}{q^{n-p}} < r_k + \frac{1}{q^{k-p}}. \tag{7}$$

Теперь мы в состоянии доказать, что любой символ $\alpha_n \ldots \alpha_0, \ldots$, составленный из чисел $\alpha_k \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, в котором как угодно далеко встречаются числа, отличные от $q-1$, соответствует некоторому числу $x \geqslant 0$.

В самом деле, по символу $\alpha_p \ldots \alpha_{p-n} \ldots$ построим последовательность $\{r_n\}$ вида (4). В силу того, что $r_0 \leqslant r_1 \leqslant \ldots \leqslant r_n \leqslant \ldots$, а также учитывая (6) и (7), имеем

$$r_0 \leqslant r_1 \leqslant \ldots \leqslant \ldots < \ldots \leqslant r_n + \frac{1}{q^{n-p}} \leqslant \ldots \leqslant r_1 + \frac{1}{q^{1-p}} \leqslant r_0 + \frac{1}{q^{-p}}. \tag{8}$$

Знак строгого неравенства в последнем соотношении следует понимать так: любой элемент левой последовательности меньше любого элемента правой последовательности. Это вытекает из (7).

Если теперь взять $x = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} r_n \ \left(= \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}(r_n + q^{-(n-p)})\right)$, то последовательность r_n будет удовлетворять условиям (4), (5), т. е. символ $\alpha_p \ldots \alpha_{p-n} \ldots$ отвечает найденному числу $x \in \mathbb{R}$.

Итак, каждому положительному числу $x \in \mathbb{R}$ мы взаимно однозначно сопоставили символ вида $\alpha_p \ldots \alpha_0, \ldots$, если $p \geqslant 0$, или $\underbrace{0{,}0\ldots0}_{|p| \text{ нулей}}\alpha_p \ldots$, если $p < 0$. Он называется *q-ичной позиционной записью числа x*; цифры, входящие в символ, называют *знаками*; позиции знаков относительно запятой называются *разрядами*.

Числу $x < 0$ условимся сопоставлять взятый со знаком минус символ положительного числа $-x$. Наконец, числу 0 отнесем символ $0{,}0\ldots0\ldots$

Тем самым завершено построение *позиционной q-ичной системы записи действительных чисел*.

Наиболее употребительными являются десятичная система (в обиходе) и по техническим причинам двоичная (в электронных вычислительных машинах). Менее распространены, но также используются в элементах вычислительной техники троичная и восьмеричная системы.

Формулы (4), (5) показывают, что если в q-ичной записи числа x оставить только конечное число знаков (или, если угодно, заменить остальные знаки нулями), то абсолютная погрешность получающегося при этом приближения (4) числа x не превысит единицы последнего сохраняемого разряда.

Это наблюдение позволяет в соответствии с полученными в подпункте b формулами оценивать погрешности, возникающие при арифметических операциях над числами в результате замены точных значений чисел соответствующими приближенными значениями вида (4).

Последнее замечание имеет также определенную теоретическую ценность. А именно, если в соответствии с идеей подпункта b мы отождествим вещественное число x с его q-ичной записью, то, научившись выполнять арифметические действия непосредственно над q-ичными символами, мы построим новую модель действительных чисел, по-видимому, наиболее ценную с вычислительной точки зрения.

Основные задачи, которые пришлось бы решать на этом пути, таковы.

Надо двум q-ичным символам поставить в соответствие новый символ — сумму исходных. Он, естественно, строится постепенно, а именно, складывая все более точные рациональные приближения исходных чисел, будем получать соответствующие рациональные приближения их суммы. Пользуясь сделанным выше замечанием, можно показать, что по мере увеличения точности приближений слагаемых мы будем получать все больше таких q-ичных знаков суммы, которые уже не меняются при последующем уточнении приближений.

Тот же вопрос надо решать и относительно умножения.

Другой, менее конструктивный путь перехода от рациональных чисел ко всем действительным числам принадлежит Дедекинду.

Дедекинд отождествляет действительное число с сечением в множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, т. е. с разбиением $\mathbb{Q}$ на два не имеющих общих элементов множества A, B таких, что $\forall a \in A\ \forall b \in B\ (a < b)$. При таком подходе к действительным числам принятая нами аксиома полноты (непрерывности) становится известной теоремой Дедекинда. По этой причине аксиому полноты в принятой нами форме часто называют аксиомой Дедекинда.

Итак, в настоящем параграфе выделены важнейшие классы чисел. Показана фундаментальная роль натуральных и рациональных чисел. Показано, как из принятой нами аксиоматики[1)] вытекают основные свойства этих чисел. Дано представление о различных моделях множества действительных чисел. Обсуждены вычислительные аспекты теории действительных чисел: оценки погрешностей при арифметических операциях с приближенными величинами; q-ичная позиционная система счисления.

Задачи и упражнения

1. Опираясь на принцип индукции, покажите, что

a) сумма $x_1 + \ldots + x_n$ вещественных чисел определена независимо от расстановки скобок, предписывающих порядок сложения;

b) то же для произведения $x_1 \ldots x_n$;

c) $|x_1 + \ldots + x_n| \leqslant |x_1| + \ldots + |x_n|$;

d) $|x_1 \ldots x_n| = |x_1| \ldots |x_n|$;

[1)] Почти в приведенном выше виде она была сформулирована на рубеже XX века Гильбертом; см., например, в кн.: Гильберт Д. Основания геометрии. М.: Гостехиздат, 1948. (Добавление VI: О понятии числа.)

e) $((m, n \in \mathbb{N}) \wedge (m < n)) \Rightarrow ((n - m) \in \mathbb{N})$;

f) $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ при $x > -1$ и $n \in \mathbb{N}$, причем равенство возможно либо при $n = 1$, либо при $x = 0$ (*неравенство Бернулли*);

g) $(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2}{(n-1)!}ab^{n-1} + b^n$ (*бином Ньютона*).

2. a) Проверьте, что $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ — индуктивные множества.

b) Приведите примеры индуктивных множеств, отличных от $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

3. Покажите, что любое индуктивное множество не ограничено сверху.

4. a) Любое индуктивное множество бесконечно (т. е. равномощно своему подмножеству, отличному от него самого).

b) Множество $E_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant n\}$ конечно ($\operatorname{card} E_n$ обозначают через n).

5. a) *Алгоритм Евклида.* Пусть m, $n \in \mathbb{N}$ и $m > n$. Наибольший общий делитель (НОД$(m, n) = d \in \mathbb{N}$) можно за конечное число шагов найти, пользуясь следующим алгоритмом Евклида последовательного деления с остатком:

$$\begin{aligned} m &= q_1 n + r_1 \qquad (r_1 < n), \\ n &= q_2 r_1 + r_2 \qquad (r_2 < r_1), \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3 \qquad (r_3 < r_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{k-1} &= q_{k+1} r_k + 0, \end{aligned}$$

и $d = r_k$.

b) Если $d =$ НОД(m, n), то можно подобрать числа p, $q \in \mathbb{Z}$ так, что $pm + qn = d$; в частности, если m, n взаимно просты, то $pm + qn = 1$.

6. Попробуйте самостоятельно доказать основную теорему арифметики (формулировка в тексте § 2, п. 2a).

7. Если произведение $m \cdot n$ натуральных чисел делится на простое число p, т. е. $m \cdot n = p \cdot k$, где $k \in \mathbb{N}$, то либо m, либо n делится на p.

8. Из основной теоремы арифметики следует, что множество простых чисел бесконечно.

9. Покажите, что если натуральное число n не имеет вида k^m, где k, $m \in \mathbb{N}$, то уравнение $x^m = n$ не имеет рациональных корней.

10. Покажите, что запись рационального числа в любой q-ичной системе счисления периодична, т. е., начиная с некоторого разряда, состоит из периодически повторяющейся группы цифр.

11. Иррациональное число $\alpha \in \mathbb{R}$ назовем *хорошо приближаемым* рациональными числами, если для любых натуральных чисел n, $N \in \mathbb{N}$ существует рациональное число $\frac{p}{q}$ такое, что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq^n}$.

a) Постройте пример хорошо приближаемого иррационального числа.

b) Докажите, что хорошо приближаемое иррациональное число не может быть алгебраическим, т. е. оно трансцендентно (*теорема Лиувилля*[1)]).

12. Зная, что по определению дроби $\frac{m}{n} := m \cdot n^{-1}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, вывести «правила» сложения, умножения, деления дробей, а также условие равенства двух дробей.

13. Проверьте, что рациональные числа $\mathbb{Q}$ удовлетворяют всем аксиомам действительных чисел, кроме аксиомы полноты.

14. Принимая геометрическую модель множества действительных чисел — числовую ось, покажите, как в этой модели строить числа $a+b$, $a-b$, ab, $\frac{a}{b}$.

15. a) Проиллюстрируйте аксиому полноты на числовой оси.

b) Докажите, что принцип верхней грани эквивалентен аксиоме полноты.

16. a) Если $A \subset B \subset \mathbb{R}$, то $\sup A \leqslant \sup B$, а $\inf A \geqslant \inf B$.

b) Пусть $\mathbb{R} \supset X \neq \varnothing$ и $\mathbb{R} \supset Y \neq \varnothing$. Если $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$ выполнено $x \leqslant y$, то X ограничено сверху, Y — снизу и $\sup X \leqslant \inf Y$.

c) Если множества X, Y из b) таковы, что $X \cup Y = \mathbb{R}$, то $\sup X = \inf Y$.

d) Если X, Y — множества, определенные в c), то либо $\exists \max X$, либо $\exists \min Y$ (*теорема Дедекинда*).

e) (Продолжение.) Покажите, что теорема Дедекинда эквивалентна аксиоме полноты.

17. Пусть $A+B$ — множество чисел вида $a+b$ и $A \cdot B$ — множество чисел вида $a \cdot b$, где $a \in A \subset \mathbb{R}$ и $b \in B \subset \mathbb{R}$. Проверьте, всегда ли

a) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$;

b) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$.

18. Пусть $-A$ есть множество чисел вида $-a$, где $a \in A \subset \mathbb{R}$. Покажите, что $\sup(-A) = -\inf A$.

19. a) Покажите, что уравнение $x^n = a$ при $n \in \mathbb{N}$ и $a > 0$ имеет положительный корень (обозначаемый $\sqrt[n]{a}$ или $a^{1/n}$).

b) Проверьте, что при $a > 0$, $b > 0$ и $n, m \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad \text{и} \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}.$$

c) $(a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n} =: a^{m/n}$ и $a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{1/n + 1/m}$.

d) $(a^{m/n})^{-1} = (a^{-1})^{m/n} =: a^{-m/n}$.

e) Покажите, что для любых $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2} \quad \text{и} \quad (a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}.$$

20. a) Покажите, что отношение включения есть отношение частичной (но не полной!) упорядоченности множеств.

[1)] Ж. Лиувилль (1809 – 1882) — французский математик; работы по комплексному анализу, геометрии, дифференциальным уравнениям, теории чисел, механике.

b) Пусть A, B, C — такие множества, что $A \subset C$, $B \subset C$, $A \setminus B \neq \varnothing$ и $B \setminus A \neq \varnothing$. Частичный порядок в этой тройке введем, как в a). Укажите максимальный и минимальные элементы множества $\{A, B, C\}$. (Обратите внимание на неединственность!)

21. a) Покажите, что так же, как и множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, множество $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ чисел вида $a + b\sqrt{n}$, где a, $b \in \mathbb{Q}$, а n — фиксированное натуральное число, не являющееся квадратом целого числа, есть упорядоченное поле, удовлетворяющее принципу Архимеда, но не удовлетворяющее аксиоме полноты.

b) Проверьте, какие из аксиом действительных чисел не будут удовлетворяться для $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$, если в $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ оставить прежние арифметические операции, а отношение порядка ввести по правилу $(a + b\sqrt{n} \leqslant a' + b'\sqrt{n}) := ((b \leqslant b') \vee \vee ((b = b') \wedge (a \leqslant a')))$. Будет ли тогда для $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ выполнен принцип Архимеда?

c) Упорядочите множество $\mathbb{P}[x]$ многочленов с рациональными или действительными коэффициентами, считая

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \succ 0, \quad \text{если} \quad a_m > 0.$$

d) Покажите, что множество $\mathbb{Q}(x)$ всех рациональных дробей

$$R_{m,n} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n}$$

с коэффициентами из $\mathbb{Q}$ или из $\mathbb{R}$ после введения в нем порядка $R_{m,n} \succ 0$, если $\frac{a_m}{b_n} > 0$, и обычных арифметических операций становится упорядоченным, но не архимедовым полем. Это означает, что принцип Архимеда не может быть выведен из аксиом $\mathbb{R}$, минуя аксиому полноты.

22. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n > 1$. В множестве $E_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ определим сумму и произведение элементов как остаток от деления на n «обычной» суммы и произведения этих чисел в $\mathbb{R}$. Множество E_n с так определенными в нем операциями обозначают символом $\mathbb{Z}_n$.

a) Покажите, что если n не простое число, то в $\mathbb{Z}_n$ есть такие отличные от нуля числа m, k, что $m \cdot k = 0$. (Такие числа называются *делителями нуля.*) Это значит, что из $a \cdot b = c \cdot b$ даже при $b \neq 0$ в $\mathbb{Z}_n$ не следует, что $a = c$.

b) Покажите, что при простом p в $\mathbb{Z}_p$ отсутствуют делители нуля и $\mathbb{Z}_p$ есть поле.

c) Покажите, что ни при каком простом p поле $\mathbb{Z}_p$ нельзя упорядочить так, чтобы этот порядок был согласован с арифметическими операциями $\mathbb{Z}_p$.

23. Покажите, что если $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}'$ — две модели множества действительных чисел, а $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ — такое отображение, что $f(x+y) = f(x) + f(y)$ и $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ для любых x, $y \in \mathbb{R}$, то:

a) $f(0) = 0'$;

b) $f(1) = 1'$, если $f(x) \not\equiv 0'$, что мы дальше будем считать выполненным;

c) $f(m) = m'$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $m' \in \mathbb{Z}'$, причем отображение $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}'$ биективно и сохраняет порядок;

d) $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m'}{n'}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $m', n' \in \mathbb{Z}'$, $n' \neq 0'$, $f(m) = m'$, $f(n) = n'$. Таким образом, $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}'$ есть сохраняющая порядок биекция.

e) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ есть биективное, сохраняющее порядок отображение.

24. Опираясь на предыдущую задачу и аксиому полноты, покажите, что аксиоматика множества действительных чисел определяет его полностью с точностью до изоморфизма (до способа реализации), т. е. что если $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}'$ — два множества, удовлетворяющие аксиоматике, то существует взаимно однозначное отображение $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$, сохраняющее арифметические операции и порядок: $f(x+y) = f(x)+f(y)$, $f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y)$ и $(x \leqslant y) \Leftrightarrow (f(x) \leqslant f(y))$.

25. В ЭВМ число x представляется в виде

$$x = \pm q^p \sum_{n=1}^{k} \frac{\alpha_n}{q^n},$$

где p — порядок x, а $M = \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{\alpha_n}{q^n}$ — мантисса числа x $\left(\frac{1}{q} \leqslant M < 1\right)$.

При этом машина оперирует только с определенным диапазоном чисел: при $q = 2$ обычно $|p| \leqslant 64$, а $k = 35$. Оцените этот диапазон в десятичной системе.

26. a) Напишите таблицу умножения (размера 6×6) для шестеричной системы счисления.

b) Пользуясь результатом задачи a), перемножьте «столбиком» в шестеричной системе

$$\times \begin{array}{r} (532)_6 \\ \underline{(145)_6} \end{array}$$

и проверьте свои действия, повторив вычисления в десятичной системе.

c) Поделите «уголком»

$$(1301)_6 \,\underline{|(25)_6}$$

и проверьте свои действия, повторив вычисления в десятичной системе.

d) Проведите сложение «столбиком»

$$+ \begin{array}{r} (4052)_6 \\ \underline{(3125)_6} \end{array}$$

27. Запишите $(100)_{10}$ в двоичной и троичной системах.

28. a) Покажите, что наряду с единственностью записи целого числа в виде

$$(\alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_0)_3,$$

где $\alpha_i \in \{0, 1, 2\}$, возможна и также единственна его запись в виде

$$(\beta_n \beta_{n-1} \ldots \beta_0)_3,$$

где $\beta \in \{-1, 0, 1\}$.

b) Каково наибольшее число монет, из которых тремя взвешиваниями на чашечных весах можно выделить одну фальшивую, если известно только, что она отличается от остальных монет по весу?

29. Какое наименьшее количество вопросов с ответами «да» или «нет» надо задать, чтобы узнать любой из семизначных телефонных номеров?

30. a) Сколько различных чисел можно задать с помощью 20 десятичных знаков (например, два разряда по 10 возможных знаков в каждом)? Тот же вопрос для двоичной системы. В пользу экономичности какой из этих систем говорит сравнение результатов?

b) Оцените количество различных чисел, которые можно записать, располагая n знаками q-ичной системы. (Ответ: $q^{n/q}$.)

c) Нарисуйте график функции $f(x) = x^{n/x}$ над множеством натуральных значений аргумента и сравните экономичность различных систем счисления.

§ 3. Основные леммы, связанные с полнотой множества действительных чисел

Здесь мы установим несколько простых полезных принципов, каждый из которых можно было бы положить в основу построения теории вещественных чисел в качестве аксиомы полноты[1)].

Эти принципы мы назвали основными леммами в соответствии с их широким использованием во всевозможных доказательствах теорем анализа.

1. Лемма о вложенных отрезках (принцип Коши–Кантора)

Определение 1. Функцию $f\colon \mathbb{N} \to X$ натурального аргумента называют *последовательностью* или, полнее, *последовательностью элементов множества* X.

Значение $f(n)$ функции f, соответствующее числу $n \in \mathbb{N}$, часто обозначают через x_n и называют n-м членом последовательности.

Определение 2. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность каких-то множеств. Если $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$, т. е. $\forall n \in \mathbb{N}$ $(X_n \supset X_{n+1})$, то говорят, что имеется последовательность *вложенных* множеств.

[1)] См. задачу 4 в конце параграфа.

Лемма (Коши – Кантор). *Для любой последовательности $I_1 \supset \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ вложенных отрезков найдется точка $c \in \mathbb{R}$, принадлежащая всем этим отрезкам.*

Если, кроме того, известно, что для любого $\varepsilon > 0$ в последовательности можно найти отрезок I_k, длина которого $|I_k| < \varepsilon$, то c — единственная общая точка всех отрезков.

◀ Заметим прежде всего, что для любых двух отрезков $I_m = [a_m, b_m]$, $I_n = [a_n, b_n]$ нашей последовательности имеет место $a_m \leqslant b_n$. Действительно, в противном случае мы получили бы $a_n \leqslant b_n < a_m \leqslant b_m$, т. е. отрезки I_m, I_n не имели бы общих точек, в то время как один из них (имеющий больший номер) должен содержаться в другом.

Таким образом, для числовых множеств $A = \{a_m \mid m \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ выполнены условия аксиомы полноты, в силу которой найдется число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall a_m \in A$, $\forall b_n \in B$ выполнено $a_m \leqslant c \leqslant \leqslant b_n$. В частности, $a_n \leqslant c \leqslant b_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Но это и означает, что точка c принадлежит всем отрезкам I_n.

Пусть теперь c_1 и c_2 — две точки, обладающие этим свойством. Если они различны и, например, $c_1 < c_2$, то при любом $n \in \mathbb{N}$ имеем $a_n \leqslant c_1 < < c_2 \leqslant b_n$, поэтому $0 < c_2 - c_1 < b_n - a_n$ и длина каждого отрезка нашей последовательности не может быть меньше положительной величины $c_2 - c_1$. Значит, если в последовательности есть отрезки сколь угодно малой длины, то общая точка у них единственная. ▶

2. Лемма о конечном покрытии (принцип Бореля – Лебега)

Определение 3. Говорят, что система $S = \{X\}$ множеств X *покрывает* множество Y, если $Y \subset \bigcup\limits_{X \in S} X$,(т. е. если любой элемент y множества Y содержится по крайней мере в одном из множеств X системы S).

Подмножество множества $S = \{X\}$, являющегося системой множеств, будем называть *подсистемой* системы S. Таким образом, подсистема системы множеств сама является системой множеств того же типа.

Лемма (Борель – Лебег[1)]). *В любой системе интервалов, покры-*

[1)] Э. Борель (1871 – 1956), А. Лебег (1875 – 1941) — известные французские матема-

вающей отрезок, имеется конечная подсистема, покрывающая этот отрезок.

тики, специалисты в области теории функций.

◄ Пусть $S = \{U\}$ — система интервалов U, покрывающая отрезок $[a, b] = I_1$. Если бы отрезок I_1 не допускал покрытия конечным набором интервалов системы S, то, поделив I_1 пополам, мы получили бы, что по крайней мере одна из его половинок, которую мы обозначим через I_2, тоже не допускает конечного покрытия. С отрезком I_2 проделаем ту же процедуру деления пополам, получим отрезок I_3 и т. д.

Таким образом, возникает последовательность $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \supset \ldots$ вложенных отрезков, не допускающих конечного покрытия интервалами системы S. Поскольку длина отрезка, полученного на n-м шаге, по построению равна $|I_n| = |I_1| \cdot 2^{-n}$, то в последовательности $\{I_n\}$ есть отрезки сколь угодно малой длины (см. лемму из § 2, п. 4с). По лемме о вложенных отрезках существует точка c, принадлежащая всем отрезкам I_n, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $c \in I_1 = [a, b]$, то найдется интервал $]\alpha, \beta[= U \in S$ системы S, содержащий точку c, т. е. $\alpha < c < \beta$. Пусть $\varepsilon = \min\{c - \alpha, \beta - c\}$. Найдем в построенной последовательности такой отрезок I_n, что $|I_n| < \varepsilon$. Поскольку $c \in I_n$ и $|I_n| < \varepsilon$, заключаем, что $I_n \subset U =]\alpha, \beta[$. Но это противоречит тому, что отрезок I_n нельзя покрыть конечным набором интервалов системы. ►

3. Лемма о предельной точке (принцип Больцано – Вейерштрасса). Напомним, что окрестностью точки $x \in \mathbb{R}$ мы назвали интервал, содержащий эту точку; δ-окрестностью точки x — интервал $]x - \delta, x + \delta[$.

Определение 4. Точка $p \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $X \subset \mathbb{R}$, если любая окрестность этой точки содержит бесконечное подмножество множества X.

Это условие, очевидно, равносильно тому, что в любой окрестности точки p есть по крайней мере одна не совпадающая с p точка множества X. (Проверьте!)

Приведем несколько примеров.

Если $X = \left\{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, то предельной для X является только точка $0 \in \mathbb{R}$.

Для интервала $]a, b[$ предельной является каждая точка отрезка $[a, b]$, и других предельных точек в этом случае нет.

Для множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел предельной является каждая точка $\mathbb{R}$, ибо, как мы знаем, в любом интервале вещественных чисел имеются рациональные числа.

Лемма (Больцано – Вейерштрасс[1])**.** *Всякое бесконечное ограниченное числовое множество имеет по крайней мере одну предельную точку.*

◀ Пусть X — данное подмножество $\mathbb{R}$. Из определения ограниченности множества X следует, что X содержится в некотором отрезке $[a, b] = I \subset \mathbb{R}$. Покажем, что по крайней мере одна из точек отрезка I является предельной для X.

Если бы это было не так, то каждая точка $x \in I$ имела бы окрестность $U(x)$, в которой либо вообще нет точек множества X, либо их там конечное число. Совокупность $\{U(x)\}$ таких окрестностей, построенных для каждой точки $x \in I$, образует покрытие отрезка I интервалами $U(x)$, из которого по лемме о конечном покрытии можно извлечь конечную систему $U(x_1), \ldots, U(x_n)$ интервалов, покрывающую отрезок I. Но, поскольку $X \subset I$, эта же система покрывает все множество X. Однако в каждом интервале $U(x_i)$ только конечное число точек множества X, значит, и в их объединении тоже конечное число точек X, т. е. X — конечное множество. Полученное противоречие завершает доказательство. ▶

Задачи и упражнения

1. Покажите, что

a) если I — произвольная система вложенных отрезков, то

$$\sup\{a \in \mathbb{R} \mid [a, b] \in I\} = \alpha \leqslant \beta = \inf\{b \in \mathbb{R} \mid [a, b] \in I\} \quad \text{и} \quad [\alpha, \beta] = \bigcap_{[a,b] \in I} [a, b];$$

b) если I — система вложенных интервалов $]a, b[$, то пересечение $\bigcap\limits_{]a,b[\in I}]a, b[$ может оказаться пустым.

Указание: $]a_n, b_n[= \left]0, \frac{1}{n}\right[$.

2. Покажите, что

a) из системы отрезков, покрывающей отрезок, не всегда можно выделить конечную подсистему, покрывающую этот отрезок;

b) из системы интервалов, покрывающей интервал, не всегда можно выделить конечную подсистему, покрывающую этот интервал;

c) из системы отрезков, покрывающей интервал, не всегда можно выделить конечную подсистему, покрывающую этот интервал.

---

[1] Б. Больцано (1781 – 1848) — чешский математик и философ; К. Вейерштрасс (1815 – 1897) — немецкий математик, уделявший большое внимание логическому обоснованию математического анализа.

3. Покажите, что если вместо полного множества $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел взять только множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, а под отрезком, интервалом и окрестностью точки $r \in \mathbb{Q}$ понимать соответствующие подмножества $\mathbb{Q}$, то ни одна из доказанных выше трех основных лемм не останется в силе.

4. Покажите, что если в качестве аксиомы полноты множества действительных чисел взять

a) принцип Больцано – Вейерштрасса

или

b) принцип Бореля – Лебега,

то получится равносильная прежней система аксиом $\mathbb{R}$.

Указание. Из a) следует принцип Архимеда и аксиома полноты в прежней форме.

c) Замена аксиомы полноты принципом Коши – Кантора приводит к системе аксиом, которая становится равносильной исходной, если кроме принципа Коши – Кантора постулировать также принцип Архимеда (см. задачу 21 предыдущего параграфа).

§ 4. Счетные и несчетные множества

Сейчас мы сделаем небольшое, полезное для дальнейшего добавление к тем сведениям о множествах, которые уже были изложены в главе I.

1. Счетные множества

Определение 1. Множество X называется *счетным*, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел, т. е. $\operatorname{card} X = \operatorname{card} \mathbb{N}$.

Утверждение. a) *Бесконечное подмножество счетного множества счетно.*

b) *Объединение множеств конечной или счетной системы счетных множество есть множество счетное.*

◄ a) Достаточно проверить, что всякое бесконечное подмножество E множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел равномощно $\mathbb{N}$. Нужное биективное отображение $f\colon \mathbb{N} \to E$ построим следующим образом. В $E_1 := E$ имеется минимальный элемент, который мы сопоставим числу $1 \in \mathbb{N}$ и обозначим $e_1 \in E$. Множество E бесконечно, поэтому $E_2 := E \setminus e_1$ непусто. Минимальный элемент множества E_2 сопоставим числу 2 и назовем его $e_2 \in E_2$. Затем рассмотрим $E_3 := E \setminus \{e_1, e_2\}$ и т. д. Поскольку E — бесконечное множество, то построение не может оборваться ни на каком шаге с номером $n \in \mathbb{N}$, и, как следует из принципа индукции, таким способом каждому числу $n \in \mathbb{N}$ будет сопоставлено некоторое число $e_n \in E$. Построенное отображение $f\colon \mathbb{N} \to E$, очевидно, инъективно.

Остается проверить его сюръективность, т. е. что $f(\mathbb{N}) = E$. Пусть $e \in E$. Множество $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant e\}$ конечно, и тем более конечно его подмножество $\{n \in E \mid n \leqslant e\}$. Пусть k — число элементов в последнем множестве. Тогда по построению $e = e_k$.

b) Если $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ — счетная система множеств, причем каждое множество $X_m = \{x_m^1, \ldots, x_m^n, \ldots\}$ само счетно, то поскольку мощность множества $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$, состоящего из элементов x_m^n, где m, $n \in \mathbb{N}$, не меньше мощности каждого из множеств X_m, то X — бесконечное множество. Элемент $x_m^n \in X_m$ можно отождествить с задающей его упорядоченной парой (m, n) натуральных чисел. Тогда мощность X не больше мощности множества таких упорядоченных пар. Но отображение $f\colon \mathbb{N} \times \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, задаваемое формулой $(m, n) \longmapsto \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2} + m$, как легко проверить, биективно (оно имеет наглядный смысл: мы нумеруем точки плоскости с координатами (m, n), последовательно переходя от точек одной диагонали, где $m + n$ постоянно, к точкам следующей, где эта сумма на 1 больше).

Таким образом, множество упорядоченных пар (m, n) натуральных чисел счетно. Но тогда $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} \mathbb{N}$ и, поскольку X — бесконечное множество, на основании доказанного в a) заключаем, что $\operatorname{card} X = \operatorname{card} \mathbb{N}$. ►

Из доказанного утверждения следует, что любое подмножество счетного множества либо конечно, либо счетно. Если про множество известно, что оно либо конечно, либо счетно, то говорят, что оно *не более чем счетно* (равносильная запись: $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} \mathbb{N}$).

Мы можем, в частности, утверждать теперь, что *объединение не более чем счетного семейства не более чем счетных множеств само не более чем счетно.*

Следствия. 1) $\operatorname{card} \mathbb{Z} = \operatorname{card} \mathbb{N}$.

2) $\operatorname{card} \mathbb{N}^2 = \operatorname{card} \mathbb{N}$.

Этот результат означает, что прямое произведение счетных множеств счетно.

3) $\operatorname{card} \mathbb{Q} = \operatorname{card} \mathbb{N}$, *т. е. множество рациональных чисел счетно.*

◄ Рациональное число $\frac{m}{n}$ задается упорядоченной парой (m, n) целых чисел.

Две пары (m,n), (m',n') задают одно и то же рациональное число в том и только в том случае, когда они пропорциональны. Таким образом, выбирая каждый раз для записи рационального числа единственную пару (m,n) с минимальным возможным натуральным знаменателем $n \in \mathbb{N}$, мы получим, что множество $\mathbb{Q}$ равномощно некоторому бесконечному подмножеству множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Но $\operatorname{card} \mathbb{Z}^2 = \operatorname{card} \mathbb{N}$ и, значит, $\operatorname{card} \mathbb{Q} = \operatorname{card} \mathbb{N}$. ►

4) *Множество алгебраических чисел счетно.*

◄ Заметим сначала, что из равенства $\operatorname{card} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \operatorname{card} \mathbb{N}$ по индукции получаем, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $\operatorname{card} \mathbb{Q}^k = \operatorname{card} \mathbb{N}$.

Элемент $r \in \mathbb{Q}^k$ есть упорядоченный набор $(r_1, \ldots, r_k)$ k рациональных чисел.

Алгебраическое уравнение степени k с рациональными коэффициентами можно записать в приведенном виде $x^k + r_1 x^{k-1} + \ldots + r_k = 0$, где коэффициент при старшей степени равен 1. Таким образом, различных алгебраических уравнений степени k столько же, сколько различных упорядоченных наборов $(r_1, \ldots, r_k)$ рациональных чисел, т. е. счетное множество.

Алгебраических уравнений с рациональными коэффициентами (произвольных степеней) тоже счетное множество как счетное объединение (по степеням) счетных множеств. У каждого такого уравнения лишь конечное число корней, значит, множество алгебраических чисел не более чем счетно. Но оно бесконечно и, значит, счетно. ►

2. Мощность континуума

Определение 2. Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел называют также *числовым континуумом*[1)], а его мощность — *мощностью континуума.*

Теорема (Кантор). $\operatorname{card} \mathbb{N} < \operatorname{card} \mathbb{R}$.

Теорема утверждает, что бесконечное множество $\mathbb{R}$ имеет мощность бо́льшую, чем бесконечное множество $\mathbb{N}$.

◄ Покажем, что уже множество точек отрезка $[0,1]$ несчетно.

[1)] Continuum (*лат.*) — непрерывное, сплошное.

Предположим, что оно счетно, т. е. может быть записано в виде последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Возьмем точку x_1 и на отрезке $[0,1] = I_0$ фиксируем отрезок ненулевой длины, не содержащий точку x_1. В отрезке I_1 строим отрезок I_2, не содержащий x_2, и если уже построен отрезок I_n, то, поскольку $|I_n| > 0$, в нем строим отрезок I_{n+1} так, что $x_{n+1} \notin I_{n+1}$ и $|I_{n+1}| > 0$. По лемме о вложенных отрезках найдется точка c, принадлежащая всем отрезкам $I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots$ Но эта точка отрезка $I_0 = [0,1]$ по построению не может совпадать ни с одной из точек последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ►

Следствия. 1) $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ *и существуют иррациональные числа.*

2) *Существуют трансцендентные числа, поскольку множество алгебраических чисел счетно.*

(После решения задачи 3, помещенной в конце параграфа, читатель, наверное, захочет переиначить последнее утверждение и сформулировать его так: «В множестве действительных чисел иногда встречаются также и алгебраические числа».)

Уже на заре теории множеств возник вопрос о том, существуют ли множества промежуточной мощности между счетными множествами и множествами мощности континуума, и было высказано предположение, называемое *гипотезой континуума*, что промежуточные мощности отсутствуют.

Вопрос оказался глубоко затрагивающим основания математики. Он был окончательно решен в 1963 г. современным американским математиком П. Коэном. Коэн доказал неразрешимость гипотезы континуума, показав, что и она сама, и ее отрицание порознь не противоречат принятой в теории множеств аксиоматике, а потому гипотеза континуума не может быть ни доказана, ни опровергнута в рамках этой аксиоматики, — ситуация, вполне аналогичная независимости пятого постулата Евклида о параллельных от остальных аксиом геометрии.

Задачи и упражнения

1. Покажите, что множество всех действительных чисел равномощно множеству точек интервала $]-1, 1[$.

2. Установите непосредственно взаимно однозначное соответствие между

a) точками двух интервалов;

b) точками двух отрезков;

c) точками отрезка и интервала;

d) точками отрезка $[0, 1]$ и множеством $\mathbb{R}$.

3. Покажите, что

a) любое бесконечное множество содержит счетное подмножество;

b) множество четных чисел равномощно множеству всех натуральных чисел;

c) объединение бесконечного множества и не более чем счетного множества имеет ту же мощность, что и исходное бесконечное множество;

d) множество иррациональных чисел имеет мощность континуума;

e) множество трансцендентных чисел имеет мощность континуума.

4. Покажите, что

a) множество $\{n_1 < n_2 < \ldots\}$ возрастающих последовательностей натуральных чисел равномощно множеству дробей вида $0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots$;

b) множество всех подмножеств счетного множества имеет мощность континуума.

5. Покажите, что

a) множество $\mathcal{P}(X)$ подмножеств множества X равномощно множеству всех функций на X со значениями $0, 1$, т. е. множеству отображений $f\colon X \to \{0, 1\}$;

b) для конечного множества X из n элементов $\operatorname{card}\mathcal{P}(X) = 2^n$;

c) учитывая результаты задач 4b) и 5a), можно писать, что $\operatorname{card}\mathcal{P}(X) = 2^{\operatorname{card} X}$ и, в частности, $\operatorname{card}\mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\operatorname{card}\mathbb{N}} = \operatorname{card}\mathbb{R}$;

d) для любого множества X

$$\operatorname{card} X < 2^{\operatorname{card} X}, \quad \text{в частности, } n < 2^n \text{ при любом } n \in \mathbb{N}.$$

Указание. См. теорему Кантора в п. 1 § 4, гл. I.

6. Пусть $X_1, \ldots, X_m$ — конечная система конечных множеств. Покажите, что

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{m} X_i\right) = \sum_{i_1} \operatorname{card} X_{i_1} - \sum_{i_1<i_2} \operatorname{card}(X_{i_1} \cap X_{i_2}) + \sum_{i_1<i_2<i_3} \operatorname{card}(X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap X_{i_3}) - \ldots + (-1)^{m-1} \operatorname{card}(X_1 \cap \ldots \cap X_m),$$

причем суммирование ведется по всевозможным наборам индексов в пределах $1, \ldots, m$, удовлетворяющих указанным под знаком суммы неравенствам.

7. На отрезке $[0,1] \subset \mathbb{R}$ изобразите множество чисел $x \in [0,1]$, троичная запись которых $x = 0{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, где $\alpha_i \in \{0,1,2\}$, обладает свойством:

a) $\alpha_1 \neq 1$;

b) $(\alpha_1 \neq 1) \wedge (\alpha_2 \neq 1)$;

c) $\forall i \in \mathbb{N}\ (\alpha_i \neq 1)$ (*канторово множество*).

8. (Продолжение задачи 7.) Покажите, что

a) множество тех чисел $x \in [0,1]$, троичная запись которых не содержит 1, равномощно множеству всех чисел, двоичное представление которых имеет вид $0{,}\beta_1\beta_2\ldots$;

b) канторово множество равномощно множеству всех точек отрезка $[0,1]$.

ГЛАВА III

ПРЕДЕЛ

Обсуждая различные стороны понятия действительного числа, мы, в частности, отметили, что при измерении реальных физических величин получаются последовательности их приближенных значений, с которыми затем и приходится работать.

Такое положение дел немедленно вызывает по крайней мере три следующих вопроса:

1) Какое отношение имеет полученная последовательность приближений к измеряемой величине? Мы имеем в виду математическую сторону дела, т. е. мы хотим получить точную запись того, что вообще означает выражение «последовательность приближенных значений» и в какой мере такая последовательность описывает значение величины; однозначно ли это описание или одна и та же последовательность может отвечать разным значениям измеряемой величины.

2) Как связаны операции над приближенными значениями величин с теми же операциями над их точными значениями и чем характеризуются те операции, при выполнении которых допустима подмена точных значений величин приближенными?

3) Как по самой последовательности чисел определить, может ли она быть последовательностью сколь угодно точных приближений значения некоторой величины?

Ответом на эти и близкие к ним вопросы служит понятие предела функции — одно из основных понятий анализа.

Изложение теории предела мы начнем с рассмотрения предела функций натурального аргумента (последовательностей) ввиду уже выяснившейся фундаментальной роли этих функций и потому, что на самом деле все основные факты теории предела отчетливо видны уже в этой простейшей ситуации.

§ 1. Предел последовательности

1. Определения и примеры. Напомним следующее

Определение 1. Функция $f\colon \mathbb{N} \to X$, областью определения которой является множество натуральных чисел, называется *последовательностью.*

Значения $f(n)$ функции f называются членами последовательности. Их принято обозначать символом элемента того множества, в которое идет отображение, наделяя символ соответствующим индексом аргумента, $x_n := f(n)$. Саму последовательность в связи с этим обозначают символом $\{x_n\}$, а также записывают в виде $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ и называют *последовательностью в* X или *последовательностью элементов множества* X.

Элемент x_n называется *n-м членом последовательности.*

Всюду дальше в ближайших параграфах будут рассматриваться только последовательности $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ действительных чисел.

Определение 2. Число $A \in \mathbb{R}$ называется *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, если для любой окрестности $V(A)$ точки A существует такой номер N (выбираемый в зависимости от $V(A)$), что все члены последовательности, номера которых больше N, содержатся в указанной окрестности точки A.

Ниже мы приведем формально-логическую запись этого определения, но прежде укажем другую распространенную формулировку определения предела числовой последовательности:

Число $A \in \mathbb{R}$ называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что при всех $n > N$ имеем $|x_n - A| < \varepsilon$.

Эквивалентность этих формулировок легко проверить (проверьте!), если заметить, что в любой окрестности $V(A)$ точки A содержится некоторая ε-окрестность этой же точки.

Последняя формулировка определения предела означает, что, какую бы точность $\varepsilon > 0$ мы ни задали, найдется номер N такой, что абсолютная погрешность приближения числа A членами последовательности $\{x_n\}$ меньше чем ε, как только $n > N$.

Запишем теперь приведенные формулировки определения предела в логической символике, договорившись, что запись «$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$» означает, что A — предел последовательности $\{x_n\}$. Итак,

$$\boxed{\left(\lim_{n\to\infty} x_n = A\right) := \forall V(A) \ \ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \ (x_n \in V(A))}$$

и соответственно

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = A\right) := \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \ (|x_n - A| < \varepsilon).$$

Определение 3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится* к A или *стремится* к A и пишут $x_n \to A$ при $n \to \infty$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*. Последовательность, не имеющая предела, называется *расходящейся*.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, так как $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ при $n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$[1].

Пример 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, так как $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ при $n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

Пример 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$, так как $\left|\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) - 1\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ при $n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

Пример 4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, так как $\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon$ при $n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

Пример 5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} = 0$, если $|q| > 1$.

Проверим это по определению предела. Как было доказано в гл. II, § 2, п. 4c, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти число $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{1}{|q|^N} < \varepsilon$.

---

[1] $[x]$ — целая часть числа x; см. следствие 10° принципа Архимеда, гл. II, § 2, п. 3.

Поскольку $|q| > 1$, то для любого $n > N$ будем иметь $\left|\frac{1}{q^n} - 0\right| = \frac{1}{|q|^n} <$ $< \frac{1}{|q|^N} < \varepsilon$ и определение предела удовлетворено.

Пример 6. Последовательность $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \frac{1}{7}, \ldots$ с n-м членом $x_n = n^{(-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, — расходящаяся.

Действительно, если A — предел последовательности, то, как следует из определения предела, в любой окрестности A лежат все члены последовательности, за исключением, быть может, конечного их числа.

Число $A \neq 0$ не может быть пределом данной последовательности, ибо вне ε-окрестности A при $\varepsilon = \frac{|A|}{2} > 0$ лежат все члены нашей последовательности вида $\frac{1}{2k+1}$, для которых $\frac{1}{2k+1} < \frac{|A|}{2}$.

Число 0 тоже не может быть пределом этой последовательности, поскольку, например, вне единичной окрестности нуля, очевидно, тоже имеется бесконечно много членов нашей последовательности.

Пример 7. Аналогично можно проверить, что последовательность $1, -1, +1, -1, \ldots$, для которой $x_n = (-1)^n$, не имеет предела.

2. Свойства предела последовательности

a. Общие свойства. Мы выделим в эту группу те свойства, которыми обладают, как будет видно из дальнейшего, не только числовые последовательности, хотя здесь мы эти свойства будем рассматривать только для числовых последовательностей.

Последовательность, принимающую только одно значение, будем называть *постоянной*.

Определение 4. Если существуют число A и номер N такие, что $x_n = A$ при любом $n > N$, то последовательность $\{x_n\}$ будем называть *финально постоянной*.

Определение 5. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует число M такое, что $|x_n| < M$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. a) *Финально постоянная последовательность сходится.*

b) *Любая окрестность предела последовательности содержит все члены последовательности, за исключением конечного их числа.*

c) *Последовательность не может иметь двух различных пределов.*

d) *Сходящаяся последовательность ограничена.*

◀ a) Если $x_n = A$ при $n > N$, то для любой окрестности $V(A)$ точки A имеем $x_n \in V(A)$ при $n > N$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

b) Утверждение непосредственно следует из определения предела последовательности.

c) Это важнейший пункт теоремы. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A_1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A_2$. Если $A_1 \neq A_2$, то фиксируем непересекающиеся окрестности $V(A_1)$, $V(A_2)$ точек A_1, A_2.

В качестве таковых можно взять, например, δ-окрестности этих точек при $\delta < \frac{1}{2}|A_1 - A_2|$. По определению предела найдем числа N_1 и N_2 так, что $\forall n > N_1$ $(x_n \in V(A_1))$ и $\forall n > N_2$ $(x_n \in V(A_2))$. Тогда при $n > \max\{N_1, N_2\}$ получим $x_n \in V(A_1) \cap V(A_2)$. Но это невозможно, поскольку $V(A_1) \cap V(A_2) = \varnothing$.

d) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Полагая в определении предела $\varepsilon = 1$, найдем номер N такой, что $\forall n > N$ $(|x_n - A| < 1)$. Значит, при $n > N$ имеем $|x_n| < |A| + 1$. Если теперь взять $M > \max\{|x_1|, \dots, |x_n|, |A| + 1\}$, то получим, что $\forall n > N$ $(|x_n| < M)$. ▶

b. Предельный переход и арифметические операции

Определение 6. Если $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — две числовые последовательности, то их *суммой, произведением* и *частным* (в соответствии с общим определением суммы, произведения и частного функций) называются соответственно последовательности

$$\{(x_n + y_n)\}, \quad \{(x_n \cdot y_n)\}, \quad \left\{\left(\frac{x_n}{y_n}\right)\right\}.$$

Частное, разумеется, определено лишь при $y_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. *Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — числовые последовательности. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = A + B$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = A \cdot B$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}$, *если* $y_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \dots)$ *и* $B \neq 0$.

◀ В качестве упражнения воспользуемся уже известными нам (см. гл. II, § 2, п. 4) оценками абсолютных погрешностей, возникающих при арифметических операциях с приближенными значениями величин.

Положим $|A - x_n| = \Delta(x_n)$, $|B - y_n| = \Delta(y_n)$. Тогда для случая a) имеем

$$|(A + B) - (x_n + y_n)| \leqslant \Delta(x_n) + \Delta(y_n).$$

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, найдется номер N' такой, что $\forall n > N'$ $(\Delta(x_n) < \varepsilon/2)$. Аналогично, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, найдется номер N'' такой, что $\forall n > N''$ $(\Delta(y_n) < \varepsilon/2)$. Тогда при $n > \max\{N', N''\}$ будем иметь

$$|(A + B) - (x_n + y_n)| < \varepsilon,$$

что в соответствии с определением предела доказывает утверждение a).

b) Мы знаем, что

$$|(A \cdot B) - (x_n \cdot y_n)| \leqslant |x_n|\Delta(y_n) + |y_n|\Delta(x_n) + \Delta(x_n) \cdot \Delta(y_n).$$

По заданному $\varepsilon > 0$ найдем числа N' и N'' такие, что

$$\forall n > N' \quad \left(\Delta(x_n) < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3(|B| + 1)}\right\}\right),$$

$$\forall n > N'' \quad \left(\Delta(y_n) < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3(|A| + 1)}\right\}\right).$$

Тогда при $n > N = \max\{N', N''\}$ будем иметь

$$|x_n| < |A| + \Delta(x_n) < |A| + 1,$$

$$|y_n| < |B| + \Delta(y_n) < |B| + 1,$$

$$\Delta(x_n) \cdot \Delta(y_n) < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\} \cdot \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, при $n > N$

$$|x_n|\Delta(y_n) < (|A| + 1) \cdot \frac{\varepsilon}{3(|A| + 1)} = \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|y_n|\Delta(x_n) < (|B| + 1) \cdot \frac{\varepsilon}{3(|B| + 1)} = \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\Delta(x_n) \cdot \Delta(y_n) < \frac{\varepsilon}{3},$$

поэтому $|AB - x_n y_n| < \varepsilon$ при $n > N$.

c) Воспользуемся оценкой

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{x_n}{y_n}\right| \leqslant \frac{|x_n|\Delta(y_n) + |y_n|\Delta(x_n)}{y_n^2} \cdot \frac{1}{1-\delta(y_n)},$$

где $\delta(y_n) = \frac{\Delta(y_n)}{|y_n|}$.

При заданном $\varepsilon > 0$ найдем числа N' и N'' так, что

$$\forall n > N' \quad \left(\Delta(x_n) < \min\left\{1, \frac{\varepsilon|B|}{8}\right\}\right),$$

$$\forall n > N'' \quad \left(\Delta(y_n) < \min\left\{\frac{|B|}{4}, \frac{\varepsilon \cdot B^2}{16(|A|+1)}\right\}\right).$$

Тогда при $n > \max\{N', N''\}$ будем иметь

$$|x_n| < |A| + \Delta(x_n) < |A| + 1,$$

$$|y_n| > |B| - \Delta(y_n) > |B| - \frac{|B|}{4} > \frac{|B|}{2},$$

$$\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|B|},$$

$$0 < \delta(y_n) = \frac{\Delta(y_n)}{|y_n|} < \frac{|B|/4}{|B|/2} = \frac{1}{2},$$

$$1 - \delta(y_n) > \frac{1}{2},$$

поэтому

$$|x_n| \cdot \frac{1}{y_n^2}\Delta(y_n) < (|A|+1) \cdot \frac{4}{B^2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot B^2}{16(|A|+1)} = \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\left|\frac{1}{y_n}\right| \Delta(x_n) < \frac{2}{|B|} \cdot \frac{\varepsilon|B|}{8} = \frac{\varepsilon}{4},$$

$$0 < \frac{1}{1-\delta(y_n)} < 2$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{x_n}{y_n}\right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > N. \ \blacktriangleright$$

Замечание. Формулировка теоремы допускает и другой, менее конструктивный путь доказательства, вероятно, известный читателю по школьному курсу начал анализа. Мы напомним его, когда будем говорить о пределе произвольных функций. Но здесь, рассматривая предел последовательности, нам хотелось обратить внимание на то, как именно по ограничениям на погрешность результата арифметической операции ищутся допустимые погрешности значений величин, над которыми эта операция производится.

c. Предельный переход и неравенства

Теорема 3. a) *Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — две сходящиеся последовательности, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$. Если $A < B$, то найдется номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что при любом $n > N$ выполнено неравенство $x_n < y_n$.*

b) *Пусть последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ таковы, что при любом $n > N \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$. Если при этом последовательности $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ сходятся к одному и тому же пределу, то последовательность $\{y_n\}$ также сходится и к этому же пределу.*

◀ a) Возьмем число C такое, что $A < C < B$. По определению предела найдем числа N' и N'' так, чтобы при любом $n > N'$ иметь $|x_n - A| < C - A$ и при любом $n > N''$ иметь $|y_n - B| < B - C$. Тогда при $n > N = \max\{N', N''\}$ получим $x_n < A + (C - A) = C = B - (B - C) < y_n$.

b) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$. По $\varepsilon > 0$ найдем числа N' и N'' так, чтобы при любом $n > N'$ иметь $A - \varepsilon < x_n$ и при любом $n > N''$ иметь $z_n < A + \varepsilon$. Тогда при $n > N = \max\{N', N''\}$ получим $A - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < A + \varepsilon$ или $|y_n - A| < \varepsilon$, т. е. $A = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. ▶

Следствие. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$.*
Если существует номер N такой, что при любом $n > N$
a) *$x_n > y_n$, то $A \geqslant B$;*
b) *$x_n \geqslant y_n$, то $A \geqslant B$;*
c) *$x_n > B$, то $A \geqslant B$;*
d) *$x_n \geqslant B$, то $A \geqslant B$.*

◀ Рассуждая от противного, из пункта a) теоремы немедленно получаем первые два утверждения. Третье и четвертое утверждения суть частные случаи первых двух, получающиеся при $y_n \equiv B$. ▶

Стоит заметить, что строгое неравенство в пределе может перейти в равенство. Например, $\frac{1}{n} > 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$, но $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

3. Вопросы существования предела последовательности

a. Критерий Коши

Определение 7. Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*[1])), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что из $n > N$ и $m > N$ следует $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Теорема 4 (критерий Коши сходимости последовательности)**.** *Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

◀ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. По числу $\varepsilon > 0$ найдем номер N так, чтобы при $n > N$ иметь $|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Если теперь $m > N$ и $n > N$, то $|x_m - x_n| <$ $< |x_m - A| + |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ и, таким образом, проверено, что сходящаяся последовательность фундаментальна.

Пусть теперь $\{x_k\}$ — фундаментальная последовательность. По заданному $\varepsilon > 0$ найдем номер N такой, что из $m \geqslant N$ и $k \geqslant N$ следует $|x_m - x_k| < \frac{\varepsilon}{3}$. Фиксировав $m = N$, получаем, что при любом $k > N$

$$x_N - \frac{\varepsilon}{3} < x_k < x_N + \frac{\varepsilon}{3}, \tag{1}$$

но поскольку имеется всего конечное число членов последовательности $\{x_n\}$ с номерами, не превосходящими N, то мы доказали, что фундаментальная последовательность ограничена.

Для $n \in \mathbb{N}$ положим теперь $a_n := \inf\limits_{k\geqslant n} x_k$, $b_n := \sup\limits_{k\geqslant n} x_k$.

Из этих определений видно, что $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$ (поскольку при переходе к меньшему множеству нижняя грань не уменьшается, а верхняя не увеличивается). Последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ имеет, по лемме о вложенных отрезках, общую точку A.

[1]) Последовательности Коши ввел Больцано, пытавшийся, не располагая точным понятием вещественного числа, доказать сходимость фундаментальной последовательности. Коши дал такое доказательство, приняв за очевидное принцип вложенных отрезков, обоснованный впоследствии Кантором.

Поскольку при любом $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leqslant A \leqslant b_n,$$

а при $k \geqslant n$

$$a_n = \inf_{k \geqslant n} x_k \leqslant x_k \leqslant \sup_{k \geqslant n} x_k = b_n,$$

то при $k \geqslant n$ имеем

$$|A - x_k| \leqslant b_n - a_n. \tag{2}$$

Но из (1) следует, что при $n > N$

$$x_N - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \inf_{k \geqslant n} x_k = a_n \leqslant b_n = \sup_{k \geqslant n} x_k \leqslant x_N + \frac{\varepsilon}{3},$$

поэтому при $n > m$

$$b_n - a_n \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon. \tag{3}$$

Сравнивая (2) и (3), находим, что при любом $k > N$

$$|A - x_k| < \varepsilon,$$

и мы показали, что $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = A$. ►

Пример 8. Последовательность $(-1)^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ не имеет предела, поскольку она не является фундаментальной. Хотя это и очевидно, но все же проведем формальную проверку. Отрицание утверждения, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная, выглядит так:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \ \exists n > N \ \ \exists m > N \ \ (|x_m - x_n| \geqslant \varepsilon),$$

т. е. найдется $\varepsilon > 0$ такое, что при любом $N \in \mathbb{N}$ найдутся числа n, m, бо́льшие N, для которых $|x_m - x_n| \geqslant \varepsilon$.

В нашем случае достаточно положить $\varepsilon = 1$. Тогда при любом $N \in \mathbb{N}$ будем иметь $|x_{N+1} - x_{N+2}| = |1 - (-1)| = 2 > 1 = \varepsilon$.

Пример 9. Пусть

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0{,}\alpha_1, \quad x_3 = 0{,}\alpha_1\alpha_2, \quad \ldots, \quad x_n = 0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n, \ \ldots$$

— некоторая последовательность конечных двоичных дробей, причем каждая следующая дробь получается дописыванием знака 0 или 1 к предыдущей. Покажем, что такая последовательность всегда сходится. Пусть $m > n$. Оценим разность $x_m - x_n$:

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{\alpha_{n+1}}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{\alpha_m}{2^m}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^m} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^n}.$$

Таким образом, подобрав по заданному $\varepsilon > 0$ число N так, что $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$ для любых $m > n > N$, получаем оценку $|x_m - x_n| < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^N} < \varepsilon$, доказывающую фундаментальность последовательности $\{x_n\}$.

Пример 10. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Поскольку для любого $n \in \mathbb{N}$

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

то в силу критерия Коши эта последовательность не имеет предела.

b. Критерий существования предела монотонной последовательности

Определение 8. Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей*, если $\forall n \in \mathbb{N}\ (x_n < x_{n+1})$; *неубывающей*, если $\forall n \in \mathbb{N}\ (x_n \leqslant x_{n+1})$; *невозрастающей*, если $\forall n \in \mathbb{N}\ (x_n \geqslant x_{n+1})$; *убывающей*, если $\forall n \in \mathbb{N}\ (x_n > x_{n+1})$. Последовательности этих четырех типов называют *монотонными последовательностями.*

Определение 9. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если существует число M такое, что $\forall n \in \mathbb{N}\ (x_n < M)$.

Аналогично определяется последовательность, *ограниченная снизу.*

Теорема 5 (Вейерштрасс)**.** *Для того чтобы неубывающая последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной сверху.*

◀ То, что любая сходящаяся последовательность ограничена, было доказано при рассмотрении общих свойств предела последовательности, поэтому интерес представляет только второе утверждение теоремы.

По условию множество значений последовательности $\{x_n\}$ ограничено сверху, значит, оно имеет верхнюю грань $s = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

По определению верхней грани, для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $x_N \in \{x_n\}$ такой, что $s - \varepsilon < x_N \leqslant s$. Поскольку последовательность $\{x_n\}$ неубывающая, при любом $n > N$ теперь получаем $s - \varepsilon < x_N \leqslant \leqslant x_n \leqslant s$, т. е. $|s - x_n| = s - x_n < \varepsilon$. Таким образом, доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s$. ▶

Разумеется, аналогичную теорему можно сформулировать и доказать для невозрастающей последовательности, ограниченной снизу. В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

Замечание. Ограниченность сверху (снизу) неубывающей (невозрастающей) последовательности на самом деле, очевидно, равносильна ограниченности этой последовательности.

Рассмотрим несколько полезных примеров.

Пример 11. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{q^n} = 0$, если $q > 1$.

◀ Действительно, если $x_n = \frac{n}{q^n}$, то $x_{n+1} = \frac{n+1}{nq} x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{nq} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{q} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{q} = 1 \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{q} < 1$, то найдется номер N такой, что при $n > N$ будет $\frac{n+1}{nq} < 1$. Таким образом, при $n > N$ будем иметь $x_{n+1} < x_n$, т. е. после члена x_N наша последовательность монотонно убывает. Поскольку конечное число членов последовательности, как видно из определения предела, не влияет на сходимость последовательности и ее предел, то достаточно теперь найти предел последовательности $x_{N+1} > x_{N+2} > \ldots$

Члены последовательности положительны, т. е. последовательность ограничена снизу. Значит, она имеет предел.

Пусть $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Из соотношения $x_{n+1} = \frac{n+1}{nq} x_n$ теперь следует

$$x = \lim_{n\to\infty} (x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{nq} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{nq} \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{q} x,$$

откуда находим $\left(1 - \frac{1}{q}\right) x = 0$ и $x = 0$. ▶

Следствие 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

◀ При фиксированном $\varepsilon > 0$ по доказанному найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что при $n > N$ будем иметь $1 \leqslant n < (1+\varepsilon)^n$. Тогда при $n > N$ получим $1 \leqslant \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$ и, значит, действительно $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. ▶

Следствие 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ *при любом* $a > 0$.

◀ Пусть $a \geqslant 1$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдем $N \in \mathbb{N}$ так, что при $n > N$ $1 \leqslant a < (1+\varepsilon)^n$, и тогда при $n > N$ получаем $1 \leqslant \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Если $0 < a < 1$, то $1 < \frac{1}{a}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1. \quad ▶$$

Пример 12. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$; здесь q — любое действительное число, $n \in \mathbb{N}$, $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

◀ Если $q = 0$, то утверждение очевидно. Далее, поскольку $\left|\frac{q^n}{n!}\right| = \frac{|q|^n}{n!}$, то достаточно доказать утверждение для $q > 0$. Рассуждая в этом случае, как и в предыдущем, замечаем, что $x_{n+1} = \frac{q}{n+1} x_n$. Поскольку множество натуральных чисел не ограничено сверху, найдется номер N такой, что при $n > N$ будет $0 < \frac{q}{n+1} < 1$. Тогда при $n > N$ будем иметь $x_{n+1} < x_n$ и, учитывая положительность членов последовательности, можно теперь гарантировать существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Но тогда

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{q}{n+1} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \cdot x = 0. \quad ▶$$

c. Число e

Пример 13. Докажем существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Пределом в данном случае является число, обозначаемое после Эйлера буквой e, столь же характерное для анализа, как для арифметики 1 или для геометрии π. К нему мы еще неоднократно будем возвращаться по очень разным поводам.

Проверим сначала следующее неравенство:

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha \quad \text{при} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad \alpha > -1$$

(называемое иногда неравенством Я. Бернулли[1)]).

◀ При $n = 1$ утверждение справедливо. Если оно справедливо для $n \in \mathbb{N}$, то и для $n+1$ тоже, поскольку тогда

$$(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)(1+\alpha)^n \geqslant (1+\alpha)(1+n\alpha) = \\ = 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2 \geqslant 1 + (n+1)\alpha.$$

По принципу индукции утверждение, таким образом, справедливо для любого $n \in \mathbb{N}$.

Из выкладки, кстати, видно, что при $\alpha \neq 0$ имеет место строгое неравенство. ▶

Покажем теперь, что последовательность $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывающая.

◀ Пусть $n \geqslant 2$. Используя доказанное неравенство, находим, что

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1} \geqslant \\ \geqslant \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) \frac{n}{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{n}{n+1} = 1.$$

Поскольку члены последовательности положительны, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Но тогда

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \\ = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad ▶$$

Итак,

Определение 10.

$$\boxed{e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n.}$$

[1)] Якоб Бернулли (1654–1705) — швейцарский математик, представитель знаменитого семейства ученых Бернулли; стоял у истоков вариационного исчисления и теории вероятностей.

d. Подпоследовательность и частичный предел последовательности

Определение 11. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — некоторая последовательность, а $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, то последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$.

Например, последовательность $1, 3, 5, \ldots$ нечетных натуральных чисел, взятых в их естественном порядке, является подпоследовательностью последовательности $1, 2, 3, \ldots$ Но последовательность $3, 1, 5, 7, 9, \ldots$ уже не является подпоследовательностью последовательности $1, 2, 3, \ldots$

Лемма 1 (Больцано – Вейерштрасс). *Каждая ограниченная последовательность действительных чисел содержит сходящуюся подпоследовательность.*

◀ Пусть E — множество значений ограниченной последовательности $\{x_n\}$. Если E конечно, то существуют по крайней мере одна точка $x \in E$ и последовательность $n_1 < n_2 < \ldots$ номеров такие, что $x_{n_1} = x_{n_2} = \ldots = x$. Подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ постоянна и, значит, сходится.

Если E бесконечно, то по принципу Больцано – Вейерштрасса оно обладает по крайней мере одной предельной точкой x. Поскольку x — предельная точка E, можно выбрать $n_1 \in \mathbb{N}$ так, что $|x_{n_1} - x| < 1$. Если $n_k \in \mathbb{N}$ уже выбрано так, что $|x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}$, то, учитывая, что x — предельная точка E, найдем $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ так, что $n_k < n_{k+1}$ и $|x_{n_{k+1}} - x| < \frac{1}{k+1}$.

Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, построенная подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ сходится к x. ▶

Определение 12. Условимся писать $x_n \to +\infty$ и говорить, что *последовательность* $\{x_n\}$ *стремится к плюс бесконечности*, если для каждого числа c найдется номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что $x_n > c$ при любом $n > N$.

Запишем это и два аналогичных определения в логических обозначениях:

$$(x_n \to +\infty) := \forall c \in \mathbb{R} \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N \;\; (c < x_n),$$

$$(x_n \to -\infty) := \forall c \in \mathbb{R} \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N \;\; (x_n < c),$$

$$(x_n \to \infty) := \forall c \in \mathbb{R} \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n > N \ \ (c < |x_n|).$$

В последних двух случаях говорят соответственно: *последовательность* $\{x_n\}$ *стремится к минус бесконечности* и *последовательность* $\{x_n\}$ *стремится к бесконечности.*

Заметим, что последовательность может быть неограниченной, но не стремиться ни к плюс, ни к минус, ни просто к бесконечности. Например, $x_n = n^{(-1)^n}$.

Последовательности, стремящиеся к бесконечности, мы не причисляем к сходящимся.

Легко видеть, что в соответствии с этими определениями можно дополнить только что доказанную лемму, сформулировав ее несколько иначе.

Лемма 2. *Из каждой последовательности действительных чисел можно извлечь сходящуюся подпоследовательность или подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности.*

◀ Новым является только тот случай, когда последовательность $\{x_n\}$ не ограничена. Тогда по $k \in \mathbb{N}$ будем выбирать $n_k \in \mathbb{N}$ так, что $|x_{n_k}| > k$ и $n_k < n_{k+1}$. Получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, которая стремится к бесконечности. ▶

Пусть $\{x_k\}$ — произвольная последовательность действительных чисел. Если она ограничена снизу, то можно рассмотреть (уже встречавшуюся нам при доказательстве критерия Коши) последовательность $i_n = \inf\limits_{k \geqslant n} x_k$. Поскольку $i_n \leqslant i_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то либо последовательность $\{i_n\}$ имеет конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = l$, либо $i_n \to +\infty$.

Определение 13. Число $l = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k \geqslant n} x_k$ называется *нижним пределом последовательности* $\{x_k\}$ и обозначается $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k$ или $\liminf\limits_{k\to\infty} x_k$. Если $i_n \to +\infty$, то принято говорить, что нижний предел последовательности равен плюс бесконечности, и писать $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$ или $\liminf\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$. Если исходная последовательность $\{x_k\}$ не ограничена снизу, то при любом $n \in \mathbb{N}$ будем иметь $i_n = \inf\limits_{k \geqslant n} x_k = -\infty$. В этом случае говорят, что нижний предел последовательности равен минус бесконечности, и пишут $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k = -\infty$ или $\liminf\limits_{k\to\infty} x_k = -\infty$.

Итак, с учетом всех перечисленных возможностей запишем теперь кратко определение нижнего предела последовательности $\{x_k\}$:

$$\boxed{\varliminf_{k\to\infty} x_k := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k.}$$

Аналогично, рассматривая последовательность $s_n = \sup\limits_{k\geqslant n} x_k$, приходим к определению верхнего предела последовательности $\{x_k\}$.

Определение 14.

$$\boxed{\varlimsup_{k\to\infty} x_k := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} x_k.}$$

Приведем несколько примеров.

Пример 14. $x_k = (-1)^k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\varliminf_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1,$$

$$\varlimsup_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Пример 15. $x_k = k^{(-1)^k}$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\varliminf_{k\to\infty} k^{(-1)^k} = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} k^{(-1)^k} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

$$\varlimsup_{k\to\infty} k^{(-1)^k} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} k^{(-1)^k} = \lim_{n\to\infty} (+\infty) = +\infty.$$

Пример 16. $x_k = k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\varliminf_{k\to\infty} k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} k = \lim_{n\to\infty} n = +\infty,$$

$$\varlimsup_{k\to\infty} k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} k = \lim_{n\to\infty} (+\infty) = +\infty.$$

Пример 17. $x_k = \frac{(-1)^k}{k}$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{n}, \quad \text{если} \quad n = 2m+1 \\ -\frac{1}{n+1}, \quad \text{если} \quad n = 2m \end{array} \right\} = 0,$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\,\frac{(-1)^k}{k}=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n}\frac{(-1)^k}{k}=\lim_{n\to\infty}\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{n}, & \text{если}\quad n=2m\\ \frac{1}{n+1}, & \text{если}\quad n=2m+1\end{array}\right\}=0.$$

Пример 18. $x_k=-k^2,\ k\in\mathbb{N}$:

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\left(-k^2\right)=\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geqslant n}\left(-k^2\right)=-\infty.$$

Пример 19. $x_k=(-1)^k k,\ k\in\mathbb{N}$:

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\,(-1)^k k=\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geqslant n}(-1)^k k=\lim_{n\to\infty}(-\infty)=-\infty,$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\,(-1)^k k=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n}(-1)^k k=\lim_{n\to\infty}(+\infty)=+\infty.$$

Чтобы разобраться в происхождении терминов «верхний» и «нижний» пределы последовательности, введем следующее

Определение 15. Число (или символ $-\infty$ или $+\infty$) называют *частичным пределом* последовательности, если в ней есть подпоследовательность, стремящаяся к этому числу.

Утверждение 1. *Нижний и верхний пределы ограниченной последовательности являются соответственно наименьшим и наибольшим из ее частичных пределов*[1)].

◀ Докажем это, например, для нижнего предела $i=\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,x_k$. Про последовательность $i_n=\inf\limits_{k\geqslant n}x_k$ нам известно, что она неубывающая и $\lim\limits_{n\to\infty}i_n=i\in\mathbb{R}$. Для чисел $n\in\mathbb{N}$, используя определение нижней грани, по индукции подберем числа $k_n\in\mathbb{N}$ так, что $k_n<k_{n+1}$ и $i_{k_n}\leqslant x_{k_n}<$ $<i_{k_n}+\frac{1}{n}$. (Взяв i_1, найдем k_1; взяв i_{k_1+1}, найдем k_2; и т.д.) Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}i_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(i_n+\frac{1}{n}\right)=i$, то, опираясь на свойства предела, можем утверждать, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_{k_n}=i$. Мы доказали, что i — частичный предел последовательности $\{x_k\}$. Это наименьший частичный предел, поскольку для каждого $\varepsilon>0$ найдется число $n\in\mathbb{N}$ такое, что $i-\varepsilon<i_n$, т. е. $i-\varepsilon<i_n=\inf\limits_{k\geqslant n}x_k\leqslant x_k$ при любом $k\geqslant n$.

[1)] При этом считаются принятыми естественные соотношения $-\infty<x<+\infty$ между символами $-\infty$, $+\infty$ и числами $x\in\mathbb{R}$.

Неравенство $i - \varepsilon < x_k$ при $k > n$ означает, что ни один частичный предел нашей последовательности не может быть меньше $i - \varepsilon$. Но $\varepsilon > 0$ произвольно, поэтому он также не может быть меньше i.

Для верхнего предела доказательство, разумеется, аналогично проведенному. ►

Заметим теперь, что если последовательность не ограничена снизу, то из нее можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к $-\infty$. Но в этом случае и $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k = -\infty$ и можно условиться считать, что снова нижний предел есть наименьший из частичных пределов. Верхний предел при этом может быть конечным, и тогда по доказанному он является наибольшим из частичных пределов; он может быть и бесконечным. Если $\varlimsup\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$, то последовательность не ограничена также и сверху и можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$. Если же $\varlimsup\limits_{k\to\infty} x_k = -\infty$, что тоже возможно, то это означает, что $\sup\limits_{k\geqslant n} x_k = s_n \to -\infty$, т. е. и сама последовательность $\{x_k\}$ стремится к $-\infty$, ибо $s_n \geqslant x_n$. Аналогично, если $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$, то $x_k \to +\infty$.

Учитывая сказанное, можно, таким образом, заключить, что справедливо

Утверждение 1′. *Для любой последовательности нижний предел есть наименьший из ее частичных пределов, а верхний предел последовательности — наибольший из ее частичных пределов.*

Следствие 1. *Последовательность имеет предел или стремится к минус или плюс бесконечности в том и только в том случае, когда нижний и верхний пределы последовательности совпадают.*

◄ Случай, когда $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k = \varlimsup\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$, и случай, когда $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k = \varlimsup\limits_{k\to\infty} x_k = -\infty$, уже разобраны выше, поэтому можно считать, что $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k = \varlimsup\limits_{k\to\infty} x_k = A \in \mathbb{R}$. Поскольку $i_n = \inf\limits_{k\geqslant n} x_k \leqslant x_n \leqslant \sup\limits_{k\geqslant n} x_k = s_n$ и по условию $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = A$, то по свойствам предела также $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. ►

Следствие 2. *Последовательность сходится тогда и только тогда, когда сходится любая ее подпоследовательность.*

◀ Нижний и верхний пределы подпоследовательности заключены между нижним и верхним пределами самой последовательности. Если последовательность сходится, то ее нижний и верхний пределы совпадают. Тогда совпадают нижний и верхний пределы подпоследовательности, откуда вытекает ее сходимость, причем, разумеется, к пределу всей последовательности.

Обратное утверждение очевидно, поскольку в качестве подпоследовательности можно взять саму последовательность. ▶

Следствие 3. *Лемма Больцано – Вейерштрасса как в узкой, так и в расширенной формулировке вытекает из утверждения* 1 *и утверждения* $1'$ *соответственно.*

◀ Действительно, если последовательность $\{x_k\}$ ограничена, то точки $i = \varliminf\limits_{k\to\infty} x_k$ и $s = \varlimsup\limits_{k\to\infty} x_k$ конечны и по доказанному являются частичными пределами последовательности. Только при $i = s$ последовательность имеет лишь одну предельную точку; при $i < s$ их уже по крайней мере две.

Если последовательность не ограничена с какой-то стороны, то существует подпоследовательность, стремящаяся к соответствующей бесконечности. ▶

Заключительные замечания. Мы выполнили (и даже с некоторым превышением) все три пункта намеченной перед началом параграфа программы: дали точное определение предела последовательности, доказали единственность предела, выяснили связь операции предельного перехода со структурой множества действительных чисел, получили критерий сходимости последовательности.

Теперь рассмотрим один специальный часто встречающийся и очень полезный вид последовательностей — ряды.

4. Начальные сведения о рядах

a. Сумма ряда и критерий Коши сходимости ряда. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность действительных чисел. Напомним, что сумму $a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q$ $(p \leqslant q)$ принято обозначать символом $\sum\limits_{n=p}^{q} a_n$. Мы хотим теперь придать точный смысл выражению $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, подразумевающему суммирование всех членов последовательности $\{a_n\}$.

Определение 16. Выражение $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ обозначают символом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и обычно называют *рядом* или *бесконечным рядом* (чтобы подчеркнуть отличие его от суммы конечного числа слагаемых).

Определение 17. Элементы последовательности $\{a_n\}$, рассматриваемые как элементы ряда, называют *членами ряда*; элемент a_n называют *n-м членом ряда.*

Определение 18. Сумму $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ называют *частичной суммой ряда* или, когда желают указать ее номер, n-й *частичной суммой ряда*[1)].

Определение 19. Если последовательность $\{s_n\}$ частичных сумм ряда сходится, то ряд называется *сходящимся.* Если последовательность $\{s_n\}$ не имеет предела, то ряд называют *расходящимся.*

Определение 20. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ последовательности частичных сумм, если он существует, называется *суммой ряда.*

Именно в этом смысле мы и будем в дальнейшем понимать запись

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Поскольку сходимость ряда равносильна сходимости последовательности его частичных сумм $\{s_n\}$, то применением к $\{s_n\}$ критерия Коши сразу получается

Теорема 6 (критерий Коши сходимости ряда)**.** *Ряд $a_1+\ldots+a_n+\ldots$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N \in \mathbb{N}$, что из $m \geqslant n > N$ следует $|a_n + \ldots + a_m| < \varepsilon$.*

Следствие 4. *Если в ряде изменить только конечное число членов, то получающийся при этом новый ряд будет сходиться, если сходился исходный ряд, и будет расходиться, если исходный ряд расходился.*

---

1) Таким образом, на самом деле под рядом мы подразумеваем упорядоченную пару $(\{a_n\}, \{s_n\})$ последовательностей, связанных соотношением $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left(s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)$.

◀ Для доказательства достаточно в критерии Коши считать число N превышающим максимальный из номеров измененных членов ряда. ▶

Следствие 5. *Для того чтобы ряд $a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ сходился, необходимо, чтобы его члены стремились к нулю при $n \to \infty$, т. е. необходимо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

◀ Достаточно положить в критерии $m = n$ и воспользоваться определением предела последовательности. ▶

Вот другое доказательство: $a_n = s_n - s_{n-1}$ и, коль скоро $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n - \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$.

Пример 20. Ряд $1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$ часто называют суммой бесконечной геометрической прогрессии. Исследуем его сходимость.

Поскольку $|q^n| = |q|^n$, то при $|q| \geqslant 1$ будет $|q^n| \geqslant 1$ и в этом случае не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

Пусть теперь $|q| < 1$. Тогда

$$s_n = 1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ сходится тогда и только тогда, когда $|q| < 1$ и в этом случае его сумма равна $\frac{1}{1-q}$.

Пример 21. Ряд $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ называется гармоническим, поскольку каждый член этого ряда, начиная со второго, является средним гармоническим соседних с ним членов (см. задачу 6 в конце этого параграфа).

Члены ряда стремятся к нулю, но последовательность его частичных сумм

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n},$$

как было показано с помощью критерия Коши в примере 10, расходится. Это означает в данном случае, что $s_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Итак, гармонический ряд расходится.

Пример 22. Рассмотрим теперь следующий пример.

Ряд $1-1+1-\ldots+(-1)^{n+1}+\ldots$ расходится, что видно и по последовательности $1,0,1,0,\ldots$ его частичных сумм, и по тому, что члены ряда не стремятся к нулю.

Если расставить скобки и рассмотреть новый ряд

$$(1-1)+(1-1)+\ldots,$$

членами которого являются суммы, заключенные в скобки, то этот новый ряд уже сходится, причем его сумма, очевидно, равна нулю.

Если скобки расставить иначе и рассмотреть ряд

$$1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots,$$

то получится сходящийся ряд с суммой, равной 1.

Если в исходном ряде переставить все члены, равные -1, на две позиции вправо, то получим ряд

$$1+1-1+1-1+1-\ldots,$$

расставив в котором скобки, придем к ряду

$$(1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\ldots,$$

сумма которого равна двум.

Эти наблюдения показывают, что привычные законы обращения с конечными суммами, вообще говоря, не распространяются на ряды.

И все-таки есть важный тип рядов, с которыми, как это потом выяснится, можно обращаться так же, как с конечными суммами. Это так называемые абсолютно сходящиеся ряды. Именно с ними мы главным образом и будем работать.

b. Абсолютная сходимость; теорема сравнения и ее следствия

Определение 21. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно* сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Поскольку $|a_n+\ldots+a_m| \leqslant |a_n|+\ldots+|a_m|$, из критерия Коши следует, что если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

То, что обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места, т. е. что абсолютная сходимость есть требование более сильное, чем просто сходимость ряда, можно продемонстрировать на примере.

Пример 23. Ряд $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \ldots$, частичные суммы которого равны либо $\frac{1}{n}$, либо 0, сходится к нулю.

Вместе с тем ряд из абсолютных величин его членов

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots$$

расходится, что, как и для гармонического ряда, следует из критерия Коши:

$$\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} \right| =$$
$$= 2\left(\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n} \right) > 2n \cdot \frac{1}{n+n} = 1.$$

Для того чтобы научиться отвечать на вопрос, сходится ли ряд абсолютно или нет, достаточно научиться исследовать на сходимость ряды с неотрицательными членами. Имеет место

Теорема 7 (критерий сходимости рядов с неотрицательными членами). *Ряд $a_1 + \ldots + a_n + \ldots$, члены которого — неотрицательные числа, сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху.*

◀ Это следует из определения сходимости ряда и критерия сходимости неубывающей последовательности, каковой в данном случае является последовательность $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant \ldots$ частичных сумм нашего ряда. ▶

Из этого критерия вытекает следующая простая, но на практике очень полезная

Теорема 8 (теорема сравнения). *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — два ряда с неотрицательными членами. Если существует номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что при любом $n > N$ имеет место неравенство $a_n \leqslant b_n$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ вытекает расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.*

◀ Поскольку конечное число членов не влияет на сходимость ряда, можно без ограничения общности считать, что $a_n \leqslant b_n$ для любого

$n \in \mathbb{N}$. Тогда $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = B_n$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то последовательность $\{B_n\}$, не убывая, стремится к пределу B. Тогда $A_n \leqslant B_n \leqslant B$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и, следовательно, последовательность $\{A_n\}$ частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена. В силу критерия сходимости ряда с неотрицательными членами (теорема 7) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Второе утверждение теоремы, рассуждая от противного, немедленно получаем из уже доказанного. ►

Пример 24. Поскольку $\dfrac{1}{n(n+1)} < \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{(n-1)n}$ при $n \geqslant 2$, по теореме сравнения заключаем, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ сходятся или расходятся одновременно.

Но последний ряд можно просуммировать непосредственно, заметив, что $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{(k+1)}$ и поэтому $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ также является сходящимся. Любопытно, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. В дальнейшем это будет доказано.

Пример 25. Следует обратить внимание на то, что теорема сравнения относится только к рядам с неотрицательными членами. Действительно, положим, например, $a_n = -n$, а $b_n = 0$, тогда $a_n < b_n$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Следствие 1 (мажорантный признак Вейерштрасса абсолютной сходимости ряда). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *— два ряда. Пусть существует номер* $N \in \mathbb{N}$ *такой, что при любом* $n > N$ *имеет место соотношение* $|a_n| \leqslant b_n$. *При этих условиях для абсолютной сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *достаточно, чтобы ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходился.*

◄ Действительно, по теореме сравнения тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ будет сходиться, что и означает абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. ►

Этот важный достаточный признак абсолютной сходимости часто формулируют кратко: *если члены ряда* (по абсолютной величине) *мажорируются членами сходящегося числового ряда, то исходный ряд сходится абсолютно.*

Пример 26. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ абсолютно сходится, так как $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, как мы выяснили в примере 24, сходится.

Следствие 2 (признак Коши). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— данный ряд и* $\alpha = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

a) *если* $\alpha < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится*;

b) *если* $\alpha > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится*;

c) *существуют как абсолютно сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых* $\alpha = 1$.

◄ a) Если $\alpha < 1$, то можно выбрать число $q \in \mathbb{R}$ так, что $\alpha < q < 1$. Фиксировав число q, в соответствии с определением верхнего предела найдем номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что при $n > N$ выполнено $\sqrt[n]{|a_n|} < q$. Таким образом, при $n > N$ будем иметь $|a_n| < q^n$ и, поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ при $|q| < 1$ сходится, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (по теореме сравнения или признаку Вейерштрасса) сходится абсолютно.

b) Поскольку α является частичным пределом последовательности $\{a_n\}$ (см. утверждение 1), то найдется подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = \alpha$. Если $\alpha > 1$, то найдется номер $K \in \mathbb{N}$ такой, что при любом $k > K$ будет $|a_{n_k}| > 1$, тем самым необходимое условие сходимости ($a_n \to 0$) для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ не выполнено и он расходится.

c) Мы уже знаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится $\left(\text{абсолютно, так как} \left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}\right)$. Вместе с тем $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1.$ ►

Пример 27. Исследуем, при каких значениях $x \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n \, x^n$$

сходится.

Подсчитаем $\alpha = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|(2 + (-1)^n)^n x^n|} = |x| \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |2 + (-1)^n| = 3|x|$. Таким образом, при $|x| < \dfrac{1}{3}$ ряд сходится и даже абсолютно, а при $|x| > \dfrac{1}{3}$ ряд расходится. Случай $|x| = \dfrac{1}{3}$ требует специального рассмотрения. В нашем примере оно элементарно, ибо при $|x| = \dfrac{1}{3}$ для четных значений n имеем $\left(2 + (-1)^{2k}\right) x^{2k} = 3^{2k} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2k} = 1$ и ряд расходится, поскольку для него не выполнено необходимое условие сходимости.

Следствие 3 (признак Даламбера[1]). *Пусть для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \alpha$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

a) *если* $\alpha < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно*;

b) *если* $\alpha > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится*;

c) *существуют как абсолютно сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых* $\alpha = 1$.

◄ a) Если $\alpha < 1$, то найдется такое число q, что $\alpha < q < 1$; фиксировав q и учитывая свойства предела, найдем номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что при любом $n > N$ будет $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$. Поскольку конечное число членов не влияет на характер сходимости ряда, без ограничения общности будем считать, что $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Поскольку

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{a_2}{a_1}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_1}\right|,$$

[1] Ж. Л. Даламбер (д'Аламбер) (1717 – 1783) — французский ученый, прежде всего механик, входивший в группу философов-энциклопедистов.

мы получаем, что $|a_{n+1}| \leqslant |a_1| \cdot q^n$. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_1| q^n$ сходится $\Bigl($его сумма, очевидно, равна $\dfrac{|a_1|}{1-q}\Bigr)$, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится.

b) Если $\alpha > 1$, то, начиная с некоторого номера $N \in \mathbb{N}$, при любом $n > N$ будем иметь $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, т. е. $|a_n| < |a_{n+1}|$, и, следовательно, для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ не выполнено условие $a_n \to 0$, необходимое для сходимости.

c) Примерами в данном случае, как и в признаке Коши, могут служить ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. ►

Пример 28. Выясним, при каких значениях $x \in \mathbb{R}$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

При $x = 0$ он, очевидно, сходится и даже абсолютно.

При $x \neq 0$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$.

Таким образом, этот ряд абсолютно сходится при любом значении $x \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим, наконец, еще один более специальный, но часто встречающийся класс рядов: ряды, члены которых образуют монотонную последовательность. Для таких рядов имеет место следующий необходимый и достаточный признак сходимости.

Утверждение 2 (Коши). *Если $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$*

◄ Поскольку

$$a_2 \leqslant a_2 \leqslant a_1,$$
$$2a_4 \leqslant a_3 + a_4 \leqslant 2a_2,$$
$$4a_8 \leqslant a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leqslant 4a_4,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2^n a_{2^{n+1}} \leqslant a_{2^n+1} + \ldots + a_{2^{n+1}} \leqslant 2^n a_{2^n},$$

то, складывая эти неравенства, получим

$$\frac{1}{2}(S_{n+1} - a_1) \leqslant A_{2^{n+1}} - a_1 \leqslant S_n,$$

где $A_k = a_1 + \ldots + a_k$, $S_n = a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^n a_{2^n}$ — частичные суммы рассматриваемых рядов. Последовательности $\{A_k\}$ и $\{S_n\}$ неубывающие, и потому из полученных неравенств можно заключить, что они либо одновременно ограничены, либо одновременно не ограничены сверху. Но по критерию сходимости рядов с неотрицательными членами отсюда следует, что рассматриваемые два ряда действительно сходятся или расходятся одновременно. ►

Отсюда вытекает полезное

Следствие. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *сходится при* $p > 1$ *и расходится при* $p \leqslant 1$.[1)]

◄ Если $p \geqslant 0$, то по доказанному наш ряд сходится или расходится вместе с рядом
$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{1-p}\right)^k,$$
а для сходимости последнего ряда необходимо и достаточно, чтобы было $q = 2^{1-p} < 1$, т. е. $p > 1$.

Если $p \leqslant 0$, то расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ очевидна, поскольку в этом случае все члены ряда больше 1. ►

Важность этого следствия состоит в том, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ часто служит основой для сравнения при исследовании сходимости рядов.

c. Число e как сумма ряда. Заканчивая рассмотрение рядов, вернемся еще раз к числу e и получим ряд, доставляющий уже довольно удобный способ вычисления e.

Мы будем использовать формулу бинома Ньютона при разложении выражения $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Те, кто не знаком с этой формулой из школы или не решил задачу 1g) из гл. II, § 2, могут, без потери связности изложения, опустить настоящее добавление о числе e и вернуться к нему после формулы Тейлора, частным случаем которой можно считать формулу бинома Ньютона.

1) Формально в нашей книге мы пока определили n^p только для рациональных значений p, поэтому читатель тоже пока вправе понимать это утверждение только для тех p, для которых определено n^p.

Нам известно, что $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

По формуле бинома Ньютона

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \ldots + \\ + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{1}{n^n} = \\ = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \times \ldots \times \\ \times \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Полагая $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e_n$ и $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} = s_n$, таким образом, имеем $e_n < s_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

С другой стороны, при любом фиксированном k и $n \geqslant k$, как видно из того же разложения, имеем

$$1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < e_n.$$

При $n \to \infty$ левая часть этого неравенства стремится к s_k, а правая — к e, поэтому мы теперь можем заключить, что $s_k \leqslant e$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Но тогда из соотношения

$$e_n < s_n \leqslant e$$

при $n \to \infty$ получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = e$.

В соответствии с определением суммы ряда мы теперь можем записать

$$\boxed{e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots}$$

Это уже вполне пригодное для вычисления представление числа e.

Оценим разность $e - s_n$:

$$0 < e - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right] <$$
$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\right] =$$
$$= \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n!(n+1)^2} < \frac{1}{n!\,n}.$$

Таким образом, чтобы абсолютная погрешность приближения числа e числом s_n не превосходила, например, 10^{-3}, достаточно, чтобы было $\frac{1}{n!\,n} < \frac{1}{1000}$. Этому условию удовлетворяет уже s_6.

Выпишем несколько первых десятичных знаков числа e:

$$e = 2{,}7182818284590\ldots$$

Полученную оценку разности $e - s_n$ можно записать в виде равенства

$$e = s_n + \frac{\theta_n}{n!\,n}, \quad \text{где} \quad 0 < \theta_n < 1.$$

Из такого представления числа e немедленно следует его иррациональность. В самом деле, если предположить, что $e = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{N}$, то число $q!\,e$ должно быть целым, а вместе с тем

$$q!\,e = q!\left(s_q + \frac{\theta_q}{q!\,q}\right) = q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \ldots + \frac{q!}{q!} + \frac{\theta_q}{q}$$

и тогда число $\frac{\theta_q}{q}$ тоже должно быть целым, что невозможно.

Для сведения читателя отметим, что число e не только иррационально, но даже трансцендентно.

Задачи и упражнения

1. Покажите, что число $x \in \mathbb{R}$ рационально тогда и только тогда, когда его запись в любой q-ичной системе счисления периодична, т. е., начиная с некоторого разряда, состоит из периодически повторяющейся группы цифр.

2. Мяч, упав с высоты h, подскакивает на высоту qh, где q — постоянный коэффициент, $0 < q < 1$. Найти время, за которое он окажется покоящимся на земле, и путь, который он к этому моменту пролетит.

3. На окружности отмечаются точки, получающиеся из некоторой фиксированной ее точки поворотами окружности на всевозможные углы в $n \in \mathbb{Z}$ радиан. Укажите все предельные точки построенного множества.

4. Выражение

$$n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ddots \cfrac{1}{n_{k-1} + \cfrac{1}{n_k}}}},$$

где $n_i \in \mathbb{N}$, называется конечной *цепной* или *непрерывной дробью*, а выражение

$$n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ddots}}$$

— бесконечной цепной дробью. Дроби, получающиеся из цепной дроби при отбрасывании всех ее звеньев, начиная с некоторого звена, называют *подходящими дробями*. Бесконечной цепной дроби в качестве значения сопоставляется предел последовательности ее подходящих дробей.

Покажите, что:

а) Каждое рациональное число $\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$, может быть разложено и притом единственным способом в конечную цепную дробь

$$\frac{m}{n} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}},$$

считая, что $q_n \neq 1$ при $n > 1$.

Указание. Числа $q_1, \ldots, q_n$, называемые неполными частными, получаются из алгоритма Евклида

$$\begin{aligned} m &= n \cdot q_1 + r_1, \\ n &= r_1 \cdot q_2 + r_2, \\ r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

если его записать в виде

$$\frac{m}{n} = q_1 + \frac{1}{n/r_1} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots}.$$

b) Подходящие дроби $R_1 = q_1$, $R_2 = q_1 + \frac{1}{q_2}$, … удовлетворяют неравенствам
$$R_1 < R_3 < \ldots < R_{2k-1} < \frac{m}{n} < R_{2k} < R_{2k-2} < \ldots < R_2.$$

c) Числители P_k и знаменатели Q_k подходящих дробей R_k формируются по закону
$$\begin{aligned} P_k &= P_{k-1}q_k + P_{k-2}, \qquad & P_2 &= q_1q_2, \qquad & P_1 &= q_1,\\ Q_k &= Q_{k-1}q_k + Q_{k-2}, \qquad & Q_2 &= q_2, \qquad & Q_1 &= 1. \end{aligned}$$

d) Разность соседних подходящих дробей вычисляется по формуле
$$R_k - R_{k-1} = \frac{(-1)^k}{Q_kQ_{k-1}} \qquad (k > 1).$$

e) Каждая бесконечная цепная дробь имеет определенное значение.

f) Значение бесконечной цепной дроби иррационально.

g) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}$.

h) Числа Фибоначчи $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ (т. е. $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ и $u_1 = u_2 = 1$), получающиеся как знаменатели подходящих дробей в g), задаются формулой
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

i) Подходящие дроби $R_k = \frac{P_k}{Q_k}$ в g) таковы, что $\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{P_k}{Q_k}\right| > \frac{1}{Q_k^2\sqrt{5}}$. Сравните этот результат с утверждениями задачи 11, § 2, гл. II.

5. Покажите, что

a) при $n \geqslant 2$ справедливо равенство
$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!\,n} = 3 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2!} - \ldots - \frac{1}{(n-1)n\cdot n!};$$

b) $e = 3 - \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+2)!}$;

c) для приближенного вычисления числа e значительно лучше формула $e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!\,n}$, а не исходная формула $e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ (оцените погрешности, посчитайте и сравните результат со значением e, приведенным на с. 142).

6. Если a и b — положительные числа, а p — произвольное отличное от нуля вещественное число, то *средним порядка* p чисел a и b называется величина

$$S_p(a,b) = \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p}.$$

В частности, получаем при $p = 1$ среднее арифметическое, при $p = 2$ — среднее квадратическое, при $p = -1$ — среднее гармоническое чисел a, b.

a) Покажите, что среднее $S_p(a,b)$ любого порядка заключено между числами a и b.

b) Найдите пределы последовательностей

$$\{S_n(a,b)\}, \qquad \{S_{-n}(a,b)\}.$$

7. Покажите, что если $a > 0$, то последовательность $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ при любом $x_1 > 0$ сходится к арифметическому квадратному корню из a.

Оцените скорость сходимости, т. е. величину абсолютной погрешности $|x_n - \sqrt{a}| = |\Delta_n|$ в зависимости от n.

8. Покажите, что

a) $S_0(n) = 1^0 + \ldots + n^0 = n$,

$S_1(n) = 1^1 + \ldots + n^1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$,

$S_2(n) = 1^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$,

$S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$,

и вообще

$$S_k(n) = a_{k+1}n^{k+1} + \ldots + a_1 n + a_0$$

— многочлен от n степени $k+1$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_k(n)}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$.

§ 2. Предел функции

1. Определения и примеры. Пусть E — некоторое подмножество множества $\mathbb{R}$ действительных чисел и a — предельная точка множества E. Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ — вещественнозначная функция, определенная на E.

Мы хотим записать, что значит, что при приближении точки $x \in E$ к a значения $f(x)$ функции f приближаются к некоторому числу A, которое естественно назвать пределом значений функции f или пределом функции f при x, стремящемся к a.

Определение 1. Будем (следуя Коши) говорить, что *функция* $f\colon E \to \mathbb{R}$ *стремится к* A *при* x*, стремящемся к* a, или что A *является* *пределом функции* f *при* x, *стремящемся к* a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любой точки $x \in E$ такой, что $0 < |x - a| < \delta$, выполнено соотношение $|f(x) - A| < \varepsilon$.

В логической символике сформулированные условия запишутся в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in E \ \ (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

Если A — предел функции $f(x)$ при x, стремящемся по множеству E к точке a, то пишут $f(x) \to A$ при $x \to a$, $x \in E$, или $\lim\limits_{x \to a, x \in E} f(x) = A$. Вместо символа $x \to a$, $x \in E$, мы, как правило, будем использовать более короткое обозначение $E \ni x \to a$ и вместо $\lim\limits_{x \to a, x \in E} f(x)$ будем писать $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = A$.

Пример 1. Пусть $E = \mathbb{R} \setminus 0$, $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Проверим, что

$$\lim_{E \ni x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Действительно, при заданном $\varepsilon > 0$ возьмем $\delta = \varepsilon$, тогда при $0 < |x| < \delta = \varepsilon$, учитывая, что $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x|$, будем иметь $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$.

Из этого примера, кстати, видно, что функция $f \colon E \to \mathbb{R}$ может иметь предел при $E \ni x \to a$, даже не будучи определенной в самой точке a. Как раз эта ситуация чаще всего имеет место при вычислении пределов и, если вы обратили внимание, это обстоятельство учтено в определении предела в виде неравенства $0 < |x - a|$.

Напомним, что окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ мы назвали любой интервал, содержащий эту точку.

Определение 2. *Проколотой окрестностью* точки называется окрестность точки, из которой исключена сама эта точка.

Если $U(a)$ — обозначение окрестности точки a, то проколотую окрестность этой точки будем обозначать символом $\overset{\circ}{U}(a)$.

Множества

$$U_E(a) := E \cap U(a),$$

$$\overset{\circ}{U}_E(a) := E \cap \overset{\circ}{U}(a)$$

будем называть соответственно *окрестностью* и *проколотой окрестностью точки* a *в множестве* E.

Если a — предельная точка E, то $\overset{\circ}{U}_E(a) \neq \varnothing$, какова бы ни была окрестность $U(a)$.

Если на минуту принять громоздкие символы $\overset{\circ}{U}{}^\delta_E(a)$ и $V^\varepsilon_{\mathbb{R}}(A)$ для обозначения проколотой δ-окрестности точки a в множестве E и ε-окрестности точки A в $\mathbb{R}$, то приведенное выше так называемое «$\varepsilon-\delta$-определение» Коши предела функции можно переписать в виде

$$\Big(\lim_{E\ni x\to a} f(x) = A\Big) := \forall V^\varepsilon_{\mathbb{R}}(A) \;\; \exists \overset{\circ}{U}{}^\delta_E(a) \quad \Big(f(\overset{\circ}{U}{}^\delta_E(a)) \subset V^\varepsilon_{\mathbb{R}}(A)\Big).$$

Эта запись говорит, что A является пределом функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ при x, стремящемся к a по множеству E, если для любой ε-окрестности $V^\varepsilon_{\mathbb{R}}(A)$ точки A найдется проколотая δ-окрестность $\overset{\circ}{U}{}^\delta_E(a)$ точки a в множестве E, образ которой $f(\overset{\circ}{U}{}^\delta_E(a))$ при отображении $f\colon E \to \mathbb{R}$ полностью содержится в окрестности $V^\varepsilon_{\mathbb{R}}(A)$.

Учитывая, что в любой окрестности точки числовой оси содержится также некоторая симметричная окрестность (δ-окрестность) этой же точки, мы теперь приходим к следующей форме записи определения предела, которую и будем считать основной.

Определение 3.

$$\boxed{\Big(\lim_{E\ni x\to a} f(x) = A\Big) := \forall V_{\mathbb{R}}(A) \;\; \exists \overset{\circ}{U}_E(a) \quad \Big(f(\overset{\circ}{U}_E(a)) \subset V_{\mathbb{R}}(A)\Big).}$$

Итак, число A называется пределом функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ при x, стремящемся по множеству E к точке a (предельной для E), если для любой окрестности точки A найдется проколотая окрестность точки a в множестве E, образ которой при отображении $f\colon E \to \mathbb{R}$ содержится в заданной окрестности точки A.

Мы привели несколько формулировок определения предела функции. Для числовых функций, когда $a, A \in \mathbb{R}$, как мы видели, эти формулировки эквивалентны. Вместе с тем для разных целей бывает удобна то одна, то другая из них. Например, при численных оценках удобна исходная форма, указывающая допустимую величину отклонения x от a, при которой уклонение $f(x)$ от A не превысит заданной величины. А вот с точки зрения распространения понятия предела на более общие функции, определенные не на числовом множестве, наиболее удобной является последняя формулировка, которую мы и выделили. Из нее, кстати, видно, что мы сможем определить понятие предела отображения $f\colon X \to Y$, если нам будет сказано, что такое окрестность точки в X и в Y, или, как говорят, если в X и Y будет задана *топология*.

Рассмотрим еще некоторые, поясняющие основное определение примеры.

Пример 2. Функция

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{при} \;\; x > 0, \\ 0 & \text{при} \;\; x = 0, \\ -1 & \text{при} \;\; x < 0 \end{cases}$$

(читается «сигнум x»[1]) определена на всей числовой оси. Покажем, что у нее нет предела при x, стремящемся к 0.

Это значит, что

$$\forall A \in \mathbb{R} \;\; \exists V(A) \;\; \forall \overset{\circ}{U}(0) \;\; \exists x \in \overset{\circ}{U}(0) \;\; (f(x) \notin V(A)),$$

т. е., какое бы A (претендующее на то, чтобы быть пределом $\operatorname{sgn} x$ при $x \to 0$) мы ни взяли, найдется такая окрестность $V(A)$ точки A, что, какую бы (малую) проколотую окрестность $\overset{\circ}{U}(0)$ точки 0 ни взять, в ней есть по крайней мере одна точка $x \in \overset{\circ}{U}(0)$, значение функции в которой не лежит в $V(A)$.

Поскольку функция $\operatorname{sgn} x$ принимает только значения -1, 0, 1, то ясно, что никакое число A, отличное от них, не может быть пределом функции, ибо оно имеет окрестность $V(A)$, не содержащую ни одно из этих трех чисел.

Если же $A \in \{-1, 0, 1\}$, то возьмем в качестве $V(A)$ ε-окрестность точки A при $\varepsilon = 1/2$. В такую окрестность заведомо не могут попасть одновременно обе точки -1 и 1. Но, какую бы проколотую окрестность $\overset{\circ}{U}(0)$ точки 0 ни взять, в ней есть как положительные, так и отрицательные числа, т. е. есть и точки x, где $f(x) = 1$, и точки, где $f(x) = -1$.

Значит, найдется точка $x \in \overset{\circ}{U}(0)$ такая, что $f(x) \notin V(A)$.

[1] Signum (*лат.*) — знак.

Условимся, если функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ определена во всей проколотой окрестности некоторой точки $a \in \mathbb{R}$, т. е. когда $\overset{\circ}{U}_E(a) = \overset{\circ}{U}_{\mathbb{R}}(a) = \overset{\circ}{U}(a)$, вместо записи $E \ni x \to a$ употреблять более короткую запись $x \to a$.

Пример 3. Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0} |\operatorname{sgn} x| = 1$.

Действительно, при $x \in \mathbb{R} \setminus 0$ имеем $|\operatorname{sgn} x| = 1$, т. е. функция постоянна и равна 1 в любой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(0)$ точки 0. Значит, для любой окрестности $V(1)$ получим $f(\overset{\circ}{U}(0)) = 1 \in V(1)$.

Обратите внимание, что хотя в данном случае функция $|\operatorname{sgn} x|$ и определена в самой точке 0 и $|\operatorname{sgn} 0| = 0$, но это значение не имеет никакого влияния на величину рассматриваемого предела.

Таким образом, не следует смешивать значение $f(a)$ функции в точке a с пределом $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ функции при x, стремящемся к a.

Пусть $\mathbb{R}_-$ и $\mathbb{R}_+$ — множества отрицательных и положительных чисел соответственно.

Пример 4. В примере 2 мы видели, что предел $\lim\limits_{\mathbb{R}\ni x\to 0} \operatorname{sgn} x$ не существует. Замечая, однако, что ограничение $\operatorname{sgn}|_{\mathbb{R}_-}$ функции sgn на $\mathbb{R}_-$ есть постоянная функция, равная -1, а $\operatorname{sgn}|_{\mathbb{R}_+}$ есть постоянная, равная 1, можно, как и в примере 3, показать, что

$$\lim_{\mathbb{R}_-\ni x\to 0} \operatorname{sgn} x = -1, \qquad \lim_{\mathbb{R}_+\ni x\to 0} \operatorname{sgn} x = 1,$$

т. е. ограничение одной и той же функции на различные множества может иметь различные пределы в одной и той же точке или даже не иметь его, как это было в примере 2.

Пример 5. Развивая идею примера 2, можно аналогично показать, что функция $\sin \frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

Действительно, в любой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(0)$ точки 0 всегда есть точки вида $\dfrac{1}{-\pi/2 + 2\pi n}$ и $\dfrac{1}{\pi/2 + 2\pi n}$, где $n \in \mathbb{N}$, в которых функция принимает значения -1 и 1 соответственно. Но оба эти числа не могут одновременно содержаться в ε-окрестности $V(A)$ точки $A \in \mathbb{R}$, если $\varepsilon < 1$. Значит, ни одно число $A \in \mathbb{R}$ не может быть пределом этой функции при $x \to 0$.

Пример 6. Если

$$E_- = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x = \frac{1}{-\pi/2 + 2\pi n},\quad n \in \mathbb{N}\right\}$$

и

$$E_+ = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}, \quad n \in \mathbb{N} \right\},$$

то, подобно рассмотренному в примере 4, получаем, что

$$\lim_{E_- \ni x \to 0} \sin \frac{1}{x} = -1 \qquad \text{и} \qquad \lim_{E_+ \ni x \to 0} \sin \frac{1}{x} = 1.$$

Между изученным в предыдущем параграфе понятием предела последовательности и введенным здесь понятием предела произвольной числовой функции имеется тесная связь, которую выражает следующее

Утверждение 1[1)]**.** *Соотношение* $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = A$ *имеет место тогда и только тогда, когда для любой последовательности* $\{x_n\}$ *точек* $x_n \in E \setminus a$, *сходящейся к* a, *последовательность* $\{f(x_n)\}$ *сходится к* A.

◀ То, что $\left(\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = A\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A\right)$, сразу следует из определений. Действительно, если $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = A$, то для любой окрестности $V(A)$ точки A найдется проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_E(a)$ точки a в E такая, что для $x \in \overset{\circ}{U}_E(a)$ имеем $f(x) \in V(A)$. Если последовательность $\{x_n\}$ точек множества $E \setminus a$ сходится к a, то найдется номер N такой, что при $n > N$ будет $x_n \in \overset{\circ}{U}_E(a)$ и, значит, $f(x_n) \in V(A)$. На основании определения предела последовательности, таким образом, заключаем, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Перейдем к доказательству обратного утверждения. Если A не является пределом $f(x)$ при $E \ni x \to a$, то найдется окрестность $V(A)$ такая, что при любом $n \in \mathbb{N}$ в $\frac{1}{n}$-окрестности точки a найдется точка $x_n \in E \setminus a$ такая, что $f(x_n) \notin V(A)$. Но это означает, что последовательность $\{f(x_n)\}$ не сходится к A, хотя последовательность $\{x_n\}$ стремится к a. ▶

2. Свойства предела функции. Теперь установим ряд постоянно используемых свойств предела функции, многие из которых аналогичны уже доказанным свойствам предела последовательности и потому, в

[1)] Его иногда называют утверждением о равносильности определений предела по Коши (через окрестности) и по Гейне (через последовательности).

Э. Гейне (Хайне) (1821 – 1881) — немецкий математик.

сущности, нам уже знакомы. Более того, на основании только что доказанного утверждения 1 многие важные свойства предела функции, очевидно, немедленно следуют из соответствующих свойств предела последовательности: единственность предела, арифметические свойства предела, предельный переход в неравенствах. Тем не менее мы вновь проведем все доказательства. В этом, как выяснится, есть определенный смысл.

Мы хотим обратить внимание читателя на то, что для установления всех свойств предела функции требуются всего два свойства проколотых окрестностей предельной точки множества: B_1) $\overset{\circ}{U}_E(a) \neq \varnothing$, т.е. проколотая окрестность непуста, и B_2) $\forall \overset{\circ}{U}{}'_E(a)\ \forall \overset{\circ}{U}{}''_E(a)\ \exists \overset{\circ}{U}_E(a) (\overset{\circ}{U}_E(a) \subset \overset{\circ}{U}{}'_E(a) \cap \overset{\circ}{U}{}''_E(a))$, т.е. в пересечении любой пары проколотых окрестностей содержится проколотая окрестность. Это наблюдение приведет нас к общему понятию предела функции и возможности в будущем использовать теорию предела уже не только для функций, определенных на числовых множествах. Чтобы изложение не было простым повторением сказанного в § 1, мы используем здесь некоторые новые полезные приемы и понятия, которые не демонстрировались в § 1.

a. Общие свойства предела функции. Сначала несколько определений.

Определение 4. Функцию $f\colon E \to \mathbb{R}$, принимающую только одно значение, будем, как и прежде, называть *постоянной*. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется *финально постоянной* при $E \ni x \to a$, если она постоянна в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_E(a)$ точки a, предельной для множества E.

Определение 5. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется *ограниченной*, *ограниченной сверху*, *ограниченной снизу*, если найдется число $C \in \mathbb{R}$ такое, что для любого $x \in E$ выполнено соответственно $|f(x)| < C$, $f(x) < C$, $C < f(x)$.

В случае, если первое, второе или третье из этих соотношений выполнено лишь в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_E(a)$ точки a, функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется соответственно *финально ограниченной при $E \ni x \to a$*, *финально ограниченной сверху при $E \ni x \to a$*, *финально ограниченной снизу при $E \ni x \to a$*.

Пример 7. Функция $f(x) = \sin\frac{1}{x} + x\cos\frac{1}{x}$, определенная этой формулой при $x \neq 0$, не является ограниченной на области определения, но она финально ограничена при $x \to 0$.

Пример 8. То же самое относится к функции $f(x) = x$ на $\mathbb{R}$.

Теорема 1. a) *($f\colon E \to \mathbb{R}$ при $E \ni x \to a$ есть финально постоянная A) $\Rightarrow \left(\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x) = A\right)$.*

b) $\left(\exists \lim\limits_{E\ni x\to a} f(x)\right) \Rightarrow$ *($f\colon E \to \mathbb{R}$ финально ограничена при $E \ni x \to a$).*

c) $\left(\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x) = A_1\right) \wedge \left(\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x) = A_2\right) \Rightarrow (A_1 = A_2)$.

◀ Утверждение a) о наличии предела у финально постоянной функции и утверждение b) о финальной ограниченности функции, имеющей предел, вытекают прямо из соответствующих определений. Обратимся к доказательству единственности предела.

Предположим, что $A_1 \neq A_2$. Возьмем тогда окрестности $V(A_1)$, $V(A_2)$ так, чтобы они не имели общих точек, т. е. $V(A_1) \cap V(A_2) = \varnothing$. По определению предела имеем

$$\lim_{E\ni x\to a} f(x) = A_1 \Rightarrow \exists \overset{\circ}{U}{}'_E(a) \quad \left(f(\overset{\circ}{U}{}'_E(a)) \subset V(A_1)\right),$$

$$\lim_{E\ni x\to a} f(x) = A_2 \Rightarrow \exists \overset{\circ}{U}{}''_E(a) \quad \left(f(\overset{\circ}{U}{}''_E(a)) \subset V(A_2)\right).$$

Возьмем теперь проколотую окрестность $\overset{\circ}{U}_E(a)$ точки a (предельной для E) такую, что $\overset{\circ}{U}_E(a) \subset \overset{\circ}{U}{}'_E(a) \cap \overset{\circ}{U}{}''_E(a)$ (например, можно взять $\overset{\circ}{U}_E(a) = \overset{\circ}{U}{}'_E(a) \cap \overset{\circ}{U}{}''_E(a)$, поскольку это пересечение тоже есть проколотая окрестность).

Поскольку $\overset{\circ}{U}_E(a) \neq \varnothing$, берем $x \in \overset{\circ}{U}_E(a)$. Тогда $f(x) \in V(A_1) \cap V(A_2)$, что невозможно, так как окрестности $V(A_1)$, $V(A_2)$ по построению не имеют общих точек. ▶

b. Предельный переход и арифметические операции

Определение 6. Если две числовые функции $f\colon E \to \mathbb{R}$, $g\colon E \to \mathbb{R}$ имеют общую область определения E, то их *суммой, произведением* и *частным* называются соответственно функции, определенные на том же множестве следующими формулами:

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x),$$
$$(f\cdot g)(x) := f(x)\cdot g(x),$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{если} \quad g(x)\neq 0 \quad \text{при} \quad x\in E.$$

Теорема 2. *Пусть $f\colon E\to\mathbb{R}$ и $g\colon E\to\mathbb{R}$ — две функции с общей областью определения.*

Если $\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{E\ni x\to a} g(x)=B$, то

a) $\lim\limits_{E\ni x\to a}(f+g)(x)=A+B$;

b) $\lim\limits_{E\ni x\to a}(f\cdot g)(x)=A\cdot B$;

c) $\lim\limits_{E\ni x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{A}{B}$, *если $B\neq 0$ и $g(x)\neq 0$ при $x\in E$.*

Эта теорема, как уже отмечалось в начале пункта 2, непосредственно вытекает из соответствующей теоремы о пределах последовательностей, если учесть утверждение, доказанное в пункте 1.

Теорему можно получить также, повторив доказательство теоремы об арифметических свойствах предела последовательности. Все изменения в доказательстве, которые при этом придется провести, сведутся к тому, что всюду, где раньше мы выбирали «$N\in\mathbb{N}$, начиная с которого...», нужно будет выбирать некоторую проколотую окрестность $\overset{\circ}{U}_E(a)$ точки a в множестве E. Советуем читателю проверить это.

Здесь же мы получим эту теорему из ее простейшего частного случая, когда $A=B=0$ (утверждение c) при этом, разумеется, не рассматривается).

Функцию $f\colon E\to\mathbb{R}$ принято называть *бесконечно малой при $E\ni$ $\ni x\to a$*, если $\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x)=0$.

Утверждение 2. a) *Если $\alpha\colon E\to\mathbb{R}$ и $\beta\colon E\to\mathbb{R}$ — бесконечно малые функции при $E\ni x\to a$, то их сумма $\alpha+\beta\colon E\to\mathbb{R}$ — также бесконечно малая функция при $E\ni x\to a$.*

b) *Если $\alpha\colon E\to\mathbb{R}$ и $\beta\colon E\to\mathbb{R}$ — бесконечно малые функции при $E\ni x\to a$, то их произведение $\alpha\cdot\beta\colon E\to\mathbb{R}$ — также бесконечно малая функция при $E\ni x\to a$.*

c) *Если* $\alpha\colon E \to \mathbb{R}$ — *бесконечно малая функция при* $E \ni x \to a$, *а* $\beta\colon E \to \mathbb{R}$ — *финально ограниченная функция при* $E \ni x \to a$, *то произведение* $\alpha \cdot \beta\colon E \to \mathbb{R}$ *есть бесконечно малая функция при* $E \ni \ni x \to a$.

◀ a) Проверим, что

$$\Bigl(\lim_{E \ni x \to a} \alpha(x) = 0\Bigr) \wedge \Bigl(\lim_{E \ni x \to a} \beta(x) = 0\Bigr) \Rightarrow \Bigl(\lim_{E \ni x \to a} (\alpha + \beta)(x) = 0\Bigr).$$

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. По определению предела имеем

$$\Bigl(\lim_{E \ni x \to a} \alpha(x) = 0\Bigr) \Rightarrow \Bigl(\exists \overset{\circ}{U}{}'_E(a)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}{}'_E(a)\ \ \Bigl(|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\Bigr)\Bigr),$$
$$\Bigl(\lim_{E \ni x \to a} \beta(x) = 0\Bigr) \Rightarrow \Bigl(\exists \overset{\circ}{U}{}''_E(a)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}{}''_E(a)\ \ \Bigl(|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\Bigr)\Bigr).$$

Тогда для проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_E(a) \subset \overset{\circ}{U}{}'_E(a) \cap \overset{\circ}{U}{}''_E(a)$ получаем

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_E(a)\ \ |(\alpha + \beta)(x)| = |\alpha(x) + \beta(x)| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \varepsilon,$$

т. е. проверено, что $\lim\limits_{E \ni x \to a} (\alpha + \beta)(x) = 0$.

b) Это утверждение есть частный случай утверждения c), поскольку всякая функция, имеющая предел, финально ограничена.

c) Проверим, что

$$\Bigl(\lim_{E \ni x \to a} \alpha(x) = 0\Bigr) \wedge \Bigl(\exists M \in \mathbb{R}\ \exists \overset{\circ}{U}_E(a)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_E(a)\ \ (|\beta(x)| < M)\Bigr) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Bigl(\lim_{E \ni x \to a} \alpha(x)\beta(x) = 0\Bigr).$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. По определению предела имеем

$$\Bigl(\lim_{E \ni x \to a} \alpha(x) = 0\Bigr) \Rightarrow \Bigl(\exists \overset{\circ}{U}{}'_E(a)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}{}'_E(a)\ \ \Bigl(|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}\Bigr)\Bigr).$$

Тогда для проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}{}''_E(a) \subset \overset{\circ}{U}{}'_E(a) \cap \overset{\circ}{U}_E(a)$ получаем

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}{}''_E(a)\ \ |(\alpha \cdot \beta)(x)| = |\alpha(x)\beta(x)| = |\alpha(x)||\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

Тем самым проверено, что $\lim\limits_{E\ni x\to a}\alpha(x)\beta(x)=0$. ►

Теперь сделаем следующее полезное

Замечание.

$$\boxed{\left(\lim_{E\ni x\to a} f(x)=A\right) \Leftrightarrow (f(x)=A+\alpha(x))\wedge\left(\lim_{E\ni x\to a}\alpha(x)=0\right).}$$

Иными словами, функция $f\colon E\to\mathbb{R}$ стремится к A тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде суммы $A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $E\ni x\to a$ функция (уклонение $f(x)$ от A)[1].

Это непосредственно следует из определения предела, в силу которого

$$\lim_{E\ni x\to a} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{E\ni x\to a}(f(x)-A)=0.$$

Приведем теперь доказательство теоремы об арифметических свойствах предела функции, основанное на этом замечании и установленных свойствах бесконечно малых функций.

◄ a) Если $\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x)=A$ и $\lim\limits_{E\ni x\to a} g(x)=B$, то $f(x)=A+\alpha(x)$ и $g(x)=B+\beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $E\ni x\to a$. Тогда $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=A+\alpha(x)+B+\beta(x)=(A+B)+\gamma(x)$, где $\gamma(x)=\alpha(x)+\beta(x)$, как сумма бесконечно малых, есть бесконечно малая функция при $E\ni x\to a$. Таким образом, $\lim\limits_{E\ni x\to a}(f+g)(x)=A+B$.

b) Вновь представив $f(x)$ и $g(x)$ в виде $f(x)=A+\alpha(x)$ и $g(x)=B+ +\beta(x)$, имеем

$$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=(A+\alpha(x))(B+\beta(x))=A\cdot B+\gamma(x),$$

где $\gamma(x)=A\beta(x)+B\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x)$ по свойствам бесконечно малых есть бесконечно малая функция при $E\ni x\to a$.

Таким образом, $\lim\limits_{E\ni x\to a}(f\cdot g)(x)=A\cdot B$.

c) Вновь запишем, что $f(x)=A+\alpha(x)$ и $g(x)=B+\beta(x)$, где $\lim\limits_{E\ni x\to a}\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{E\ni x\to a}\beta(x)=0$.

---

[1] Любопытная деталь: это почти очевидное, но очень полезное в вычислительном плане и важное в идейном отношении представление особо отмечалось французским математиком и механиком Лазаром Карно (1753 – 1823), революционным генералом и академиком, отцом родоначальника термодинамики Сади Карно (1796 – 1832).

Поскольку $B \neq 0$, существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_E(a)$, в любой точке которой $|\beta(x)| < \frac{|B|}{2}$, и потому $|g(x)| = |B + \beta(x)| \geqslant |B| - |\beta(x)| > \frac{|B|}{2}$. Тогда в $\overset{\circ}{U}_E(a)$ будем иметь также $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|B|}$, т. е. функция $\frac{1}{g(x)}$ финально ограничена при $E \ni x \to a$. Теперь запишем

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \frac{A}{B} = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \frac{A}{B} = \\ = \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{B}(B\alpha(x) + A\beta(x)) = \gamma(x).$$

По свойствам бесконечно малых (с учетом доказанной финальной ограниченности $\frac{1}{g(x)}$) функция $\gamma(x)$ есть бесконечно малая при $E \ni x \to a$. Таким образом, доказано, что $\lim\limits_{E\ni x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{A}{B}$. ►

c. Предельный переход и неравенства

Теорема 3. a) *Если функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ и $g\colon E \to \mathbb{R}$ таковы,что $\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{E\ni x\to a} g(x) = B$ и $A < B$, то найдется проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_E(a)$ точки a в множестве E, в любой точке которой выполнено неравенство $f(x) < g(x)$.*

b) *Если между функциями $f\colon E \to \mathbb{R}$, $g\colon E \to \mathbb{R}$ и $h\colon E \to \mathbb{R}$ на множестве E имеет место соотношение $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ и если $\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x) = \lim\limits_{E\ni x\to a} h(x) = C$, то существует также предел $g(x)$ при $E \ni x \to a$, причем $\lim\limits_{E\ni x\to a} g(x) = C$.*

◄ a) Возьмем число C такое, что $A < C < B$. По определению предела найдем проколотые окрестности $\overset{\circ}{U}{}'_E(a)$ и $\overset{\circ}{U}{}''_E(a)$ точки a в множестве E так, чтобы при $x \in \overset{\circ}{U}{}'_E(a)$ иметь $|f(x) - A| < C - A$ и при $x \in \overset{\circ}{U}{}''_E(a)$ иметь $|g(x) - B| < B - C$. Тогда в любой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_E(a)$, содержащейся в $\overset{\circ}{U}{}'_E(a) \cap \overset{\circ}{U}{}''_E(a)$, получим

$$f(x) < A + (C - A) = C = B - (B - C) < g(x).$$

b) Если $\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x) = \lim\limits_{E\ni x\to a} h(x) = C$, то по любому фиксированному $\varepsilon > 0$ найдутся такие проколотые окрестности $\overset{\circ}{U}{}'_E(a)$ и $\overset{\circ}{U}{}''_E(a)$ точки a в множестве E, что при $x \in \overset{\circ}{U}{}'_E(a)$ имеем $C - \varepsilon < f(x)$ и при $x \in \overset{\circ}{U}{}''_E(a)$ имеем $h(x) < C + \varepsilon$. Тогда в любой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_E(a)$, содержащейся в $\overset{\circ}{U}{}'_E(a) \cap \overset{\circ}{U}{}''_E(a)$, будем иметь $C - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < C + \varepsilon$, т. е. $|g(x) - C| < \varepsilon$, и, следовательно, $\lim\limits_{E \ni x \to a} g(x) = C$. ►

Следствие. *Пусть* $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = A$ *и* $\lim\limits_{E \ni x \to a} g(x) = B$. *Если в некоторой проколотой окрестности* $\overset{\circ}{U}_E(a)$ *точки* a

a) *выполнено* $f(x) > g(x)$, *то* $A \geqslant B$;

b) *выполнено* $f(x) \geqslant g(x)$, *то* $A \geqslant B$;

c) *выполнено* $f(x) > B$, *то* $A \geqslant B$;

d) *выполнено* $f(x) \geqslant B$, *то* $A \geqslant B$.

◄ Рассуждая от противного, из утверждения a) теоремы 3 немедленно получаем утверждения a), b) доказываемого следствия. Утверждения c), d) получаются из первых двух при $g(x) \equiv B$. ►

d. Два важных примера. Прежде чем переходить к дальнейшему изложению теории предела функции, продемонстрируем на двух важных примерах использование уже доказанных теорем.

Пример 9.

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Здесь мы будем апеллировать к школьному определению $\sin x$ как ординаты точки, в которую переходит точка $(1, 0)$ при повороте (с центром в начале координат) на угол x (радиан). Полнота такого определения всецело зависит от того, насколько тщательно установлена связь между поворотами и действительными числами. Поскольку сама система действительных чисел в школе не была описана достаточно подробно, надо считать, что нам необходимо уточнить определение $\sin x$ (то же самое относится и к функции $\cos x$).

В свое время мы это сделаем и обоснуем те рассуждения, которые сейчас будут опираться на наглядность.

a) Покажем, что

$$\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{при} \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

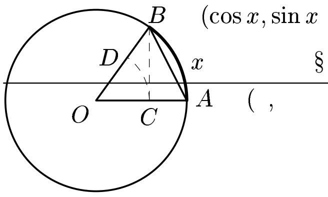


Рис. 8.

◀ Так как $\cos^2 x$ и $\frac{\sin x}{x}$ — четные функции, то достаточно рассмотреть случай $0 < x < \pi/2$. Из рис. 8 и определения $\cos x$ и $\sin x$, сравнивая площади сектора $\sphericalangle OCD$, треугольника $\triangle OAB$ и сектора $\sphericalangle OAB$, имеем

$$S_{\sphericalangle OCD} = \frac{1}{2}|OC| \cdot |\overset{\frown}{CD}| = \frac{1}{2}(\cos x)(x\cos x) = \frac{1}{2}x\cos^2 x <$$
$$< S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin x <$$
$$< S_{\sphericalangle OAB} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |\overset{\frown}{AB}| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x = \frac{1}{2}x.$$

Разделив эти неравенства на $\frac{1}{2}x$, получаем то, что и утверждалось. ▶

b) Из a) следует, что

$$|\sin x| \leqslant |x|$$

при любом $x \in \mathbb{R}$, причем равенство имеет место только для $x = 0$.

◀ При $0 < |x| < \pi/2$, как показано в a), имеем

$$|\sin x| < |x|.$$

Но $|\sin x| \leqslant 1$, поэтому для $|x| \geqslant \pi/2 > 1$ также выполнено последнее неравенство. И только при $x = 0$ имеем $\sin x = x = 0$. ▶

c) Из b) следует, что

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

◀ Поскольку $0 \leqslant |\sin x| \leqslant |x|$ и поскольку $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$, на основании теоремы о связи предела функции с неравенствами получаем, что $\lim\limits_{x\to 0} |\sin x| = 0$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$. ▶

d) Теперь докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

◀ Считая, что $|x| < \pi/2$, в силу полученного в a) неравенства имеем

$$1 - \sin^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Но $\lim\limits_{x\to 0}(1 - \sin^2 x) = 1 - \lim\limits_{x\to 0} \sin x \cdot \lim\limits_{x\to 0} \sin x = 1 - 0 = 1$, значит, по теореме о предельном переходе в неравенствах можем заключить, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ▶

Пример 10. *Определение показательной, логарифмической и степенной функций на основе теории предела.* Мы продемонстрируем сейчас, чем и как можно было бы дополнить школьное определение показательной и логарифмической функций, если располагать теорией действительного числа и теорией предела.

Для удобства ссылок и полноты картины проделаем всё с самого начала.

а) *Показательная функция.* Пусть $a > 1$.

1° Для $n \in \mathbb{N}$ полагаем по индукции $a^1 := a$, $a^{n+1} := a^n \cdot a$.

Таким образом, на $\mathbb{N}$ возникает функция a^n, которая, как видно из определения, обладает свойством

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

если $m, n \in \mathbb{N}$ и $m > n$.

2° Это свойство приводит к естественным определениям

$$a^0 := 1, \qquad a^{-n} := \frac{1}{a^n} \ \text{ при } \ n \in \mathbb{N},$$

после которых функция a^n оказывается распространенной на множество $\mathbb{Z}$ целых чисел и для любых $m, n \in \mathbb{Z}$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

3° В теории действительных чисел мы отметили, что для $a > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ существует единственный арифметический корень n-й степени из a, т. е. число $x > 0$ такое, что $x^n = a$. Для него принято обозначение $a^{1/n}$. Оно удобно, если мы желаем сохранить закон сложения показателей:

$$a = a^1 = \left(a^{1/n}\right)^n = a^{1/n} \ldots a^{1/n} = a^{1/n + \ldots + 1/n}.$$

По той же причине естественно положить $a^{m/n} := (a^{1/n})^m$ и $a^{-1/n} := (a^{1/n})^{-1}$ для $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}$. Если окажется, что $a^{(mk)/(nk)} = a^{m/n}$ для $k \in \mathbb{Z}$, то можно считать, что мы определили a^r для $r \in \mathbb{Q}$.

4° Для чисел $0 < x$, $0 < y$ по индукции проверяем, что для $n \in \mathbb{N}$

$$(x < y) \Leftrightarrow (x^n < y^n),$$

поэтому, в частности,

$$(x = y) \Leftrightarrow (x^n = y^n).$$

5° Это позволяет доказать правила действий с рациональными показателями, в частности, что

$$a^{(mk)/(nk)} = a^{m/n} \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{Z}$$

и

$$a^{m_1/n_1} \cdot a^{m_2/n_2} = a^{m_1/n_1 + m_2/n_2}.$$

◀ Действительно, $a^{(mk)/(nk)} > 0$ и $a^{m/n} > 0$. Далее, поскольку

$$\left(a^{(mk)/(nk)}\right)^{nk} = \left(\left(a^{1/(nk)}\right)^{mk}\right)^{nk} =$$
$$= \left(a^{1/(nk)}\right)^{mk \cdot nk} = \left(\left(a^{1/(nk)}\right)^{nk}\right)^{mk} = a^{mk}$$

и

$$\left(a^{m/n}\right)^{nk} = \left(\left(a^{1/n}\right)^{n}\right)^{mk} = a^{mk},$$

то первое из проверяемых равенств в соответствии с 4° установлено.

Аналогично,

$$\left(a^{m_1/n_1} \cdot a^{m_2/n_2}\right)^{n_1 n_2} = \left(a^{m_1/n_1}\right)^{n_1 n_2} \cdot \left(a^{m_2/n_2}\right)^{n_1 n_2} =$$
$$= \left(\left(a^{1/n_1}\right)^{n_1}\right)^{m_1 n_2} \cdot \left(\left(a^{1/n_2}\right)^{n_2}\right)^{m_2 n_1} = a^{m_1 n_2} \cdot a^{m_2 n_1} = a^{m_1 n_2 + m_2 n_1}$$

и

$$\left(a^{m_1/n_1 + m_2/n_2}\right)^{n_1 n_2} = \left(a^{(m_1 n_2 + m_2 n_1)/(n_1 n_2)}\right)^{n_1 n_2} =$$
$$= \left(\left(a^{1/(n_1 n_2)}\right)^{n_1 n_2}\right)^{m_1 n_2 + m_2 n_1} = a^{m_1 n_2 + m_2 n_1},$$

поэтому второе равенство также доказано. ▶

Таким образом, мы определили a^r для $r \in \mathbb{Q}$, причем $a^r > 0$ и для любых $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}.$$

6° Из 4° следует, что для $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$

$$(r_1 < r_2) \Rightarrow (a^{r_1} < a^{r_2}).$$

◀ Поскольку $(1 < a) \Leftrightarrow \left(1 < a^{1/n}\right)$ для $n \in \mathbb{N}$, что сразу следует из 4°, то $\left(a^{1/n}\right)^m = a^{m/n} > 1$ при $n, m \in \mathbb{N}$, что опять-таки следует из 4°. Таким образом, при $1 < a$ для $r > 0$, $r \in \mathbb{Q}$ имеем $a^r > 1$.

Тогда при $r_1 < r_2$ на основе 5° получаем

$$a^{r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2 - r_1} > a^{r_1} \cdot 1 = a^{r_1}. \ \blacktriangleright$$

7° Покажем, что для $r_0 \in \mathbb{Q}$

$$\lim_{\mathbb{Q} \ni r \to r_0} a^r = a^{r_0}.$$

◀ Проверим, что $a^p \to 1$ при $\mathbb{Q} \ni p \to 0$. Это следует из того, что при $|p| < \frac{1}{n}$ имеем в силу 6°

$$a^{-1/n} < a^p < a^{1/n}.$$

Мы знаем, что $a^{1/n} \to 1$ (и $a^{-1/n} \to 1$) при $n \to \infty$. Тогда стандартным рассуждением проверяем, что для $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $|p| < \delta$ будет

$$1 - \varepsilon < a^p < 1 + \varepsilon.$$

В качестве δ можно взять $\frac{1}{n}$, если $1 - \varepsilon < a^{-1/n}$ и $a^{1/n} < 1 + \varepsilon$.

Теперь докажем основное утверждение.

По $\varepsilon > 0$ подберем δ так, что при $|p| < \delta$

$$1 - \varepsilon a^{-r_0} < a^p < 1 + \varepsilon a^{-r_0}.$$

Если теперь $|r - r_0| < \delta$, то

$$a^{r_0}(1 - \varepsilon a^{-r_0}) < a^r = a^{r_0} \cdot a^{r - r_0} < a^{r_0}(1 + \varepsilon a^{-r_0}),$$

или

$$a^{r_0} - \varepsilon < a^r < a^{r_0} + \varepsilon. \ \blacktriangleright$$

Итак, на $\mathbb{Q}$ определена функция a^r со свойствами:

$$a^1 = a > 1;$$

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2};$$

$$a^{r_1} < a^{r_2} \quad \text{при} \quad r_1 < r_2;$$

$$a^{r_1} \to a^{r_2} \quad \text{при} \quad \mathbb{Q} \ni r_1 \to r_2.$$

Продолжим ее на всю числовую ось следующим образом.

8° Пусть $x \in \mathbb{R}$, $s = \sup\limits_{\mathbb{Q}\ni r<x} a^r$ и $i = \inf\limits_{\mathbb{Q}\ni r>x} a^r$. Ясно, что $s, i \in \mathbb{R}$, так как при $r_1 < x < r_2$ имеем $a^{r_1} < a^{r_2}$.

Покажем, что на самом деле $s = i$ (и тогда эту величину мы обозначим через a^x).

◀ По определению s и i, при $r_1 < x < r_2$ имеем

$$a^{r_1} \leqslant s \leqslant i \leqslant a^{r_2}.$$

Тогда $0 \leqslant i - s \leqslant a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1}(a^{r_2-r_1} - 1) < s(a^{r_2-r_1} - 1)$. Но $a^p \to 1$ при $\mathbb{Q} \ni p \to 0$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $0 < r_2 - r_1 < \delta$ будет $a^{r_2-r_1} - 1 < \varepsilon/s$. Тогда получим, что $0 \leqslant i - s < \varepsilon$, и, поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, заключаем, что $i = s$. ▶

Положим $a^x := s = i$.

9° Покажем, что $a^x = \lim\limits_{\mathbb{Q}\ni r\to x} a^r$.

◀ Учитывая 8°, для $\varepsilon > 0$ найдем $r' < x$ так, что $s - \varepsilon < a^{r'} \leqslant s = a^x$, и r'' так, что $a^x = i \leqslant a^{r''} < i + \varepsilon$. Поскольку $r' < r < r''$ влечет $a^{r'} < a^r < a^{r''}$, для всех $r \in \mathbb{Q}$, лежащих в интервале $]r', r''[$, будем тогда иметь

$$a^x - \varepsilon < a^r < a^x + \varepsilon. \ \blacktriangleright$$

Займемся теперь свойствами построенной функции a^x на $\mathbb{R}$.

10° Для $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ при $a > 1$ $(x_1 < x_2) \Rightarrow (a^{x_1} < a^{x_2})$.

◀ На интервале $]x_1, x_2[$ найдутся два рациональных числа $r_1 < r_2$. Если $x_1 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant x_2$, то по определению a^x, данному в 8°, и свойствам функции a^x на $\mathbb{Q}$ имеем

$$a^{x_1} \leqslant a^{r_1} < a^{r_2} \leqslant a^{x_2}. \ \blacktriangleright$$

11° Для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ верно $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$.

◀ В силу известных нам оценок абсолютной погрешности произведения и свойства 9° можно утверждать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta' > 0$ такое, что при $|x_1 - r_1| < \delta'$, $|x_2 - r_2| < \delta'$ будет

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} - \frac{\varepsilon}{2} < a^{r_1} \cdot a^{r_2} < a^{x_1} \cdot a^{x_2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Уменьшая, если нужно, δ', можно подобрать $\delta < \delta'$ так, что при $|x_1 - r_1| < \delta$, $|x_2 - r_2| < \delta$, т. е. при $|(x_1 + x_2) - (r_1 + r_2)| < 2\delta$, будем иметь

также
$$a^{r_1+r_2} - \frac{\varepsilon}{2} < a^{x_1+x_2} < a^{r_1+r_2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$ для $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, значит, из полученных неравенств вытекает, что
$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} - \varepsilon < a^{x_1+x_2} < a^{x_1} \cdot a^{x_2} + \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, заключаем, что
$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}. \ \blacktriangleright$$

12° $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$. (Напомним, что «$x \to x_0$» — принятое сокращение для «$\mathbb{R} \ni x \to x_0$».)

◀ Проверим сначала, что $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$. По $\varepsilon > 0$ найдем $n \in \mathbb{N}$ так, что
$$1 - \varepsilon < a^{-1/n} < a^{1/n} < 1 + \varepsilon.$$

Тогда в силу 10° при $|x| < 1/n$ будем иметь
$$1 - \varepsilon < a^{-1/n} < a^x < a^{1/n} < 1 + \varepsilon,$$

т. е. проверено, что $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$.

Если теперь взять $\delta > 0$, чтобы при $|x - x_0| < \delta$ было $|a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon a^{-x_0}$, то получим
$$a^{x_0} - \varepsilon < a^x = a^{x_0}\left(a^{x-x_0} - 1\right) < a^{x_0} + \varepsilon$$

и тем самым проверено, что $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$. ▶

13° Покажем, что множеством значений построенной функции $x \mapsto a^x$ является множество $\mathbb{R}_+$ всех положительных действительных чисел.

◀ Пусть $y_0 \in \mathbb{R}_+$. Если $a > 1$, то, как нам известно, найдется число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $a^{-n} < y_0 < a^n$.

В силу этого оба множества
$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid a^x < y_0\} \quad \text{и} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid y_0 < a^x\}$$

непусты. Но поскольку $(x_1 < x_2) \Leftrightarrow (a^{x_1} < a^{x_2})$ (при $a > 1$), то для любых чисел $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ таких, что $x_1 \in A$ и $x_2 \in B$, имеем $x_1 < x_2$.

Следовательно, к множествам A и B применима аксиома полноты, из которой следует существование числа x_0 такого, что $x_1 \leqslant x_0 \leqslant x_2$ для любых элементов $x_1 \in A$ и $x_2 \in B$. Покажем, что $a^{x_0} = y_0$.

Если бы было $a^{x_0} < y_0$, то, поскольку $a^{x_0+1/n} \to a^{x_0}$ при $n \to \infty$, нашлось бы число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $a^{x_0+1/n} < y_0$. Получилось бы, что $\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) \in A$, в то время как точка x_0 разделяет A и B. Значит, предположение $a^{x_0} < y_0$ неверно. Аналогично проверяем, что неравенство $a^{x_0} > y_0$ тоже невозможно. По свойствам действительных чисел отсюда заключаем, что $a^{x_0} = y_0$. ►

14° Мы пока считали, что $a > 1$. Но все построения можно было бы повторить и для $0 < a < 1$. При этом условии $0 < a^r < 1$, если $r > 0$; поэтому в 6°, а затем окончательно в 10° теперь получим, что при $0 < a < 1$ $(x_1 < x_2) \Rightarrow (a^{x_1} > a^{x_2})$.

Итак, при $a > 0$, $a \neq 1$ на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел мы построили действительнозначную функцию $x \mapsto a^x$ со следующими свойствами:

1) $a^1 = a$;

2) $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$;

3) $a^x \to a^{x_0}$ при $x \to x_0$;

4) $(a^{x_1} < a^{x_2}) \Leftrightarrow (x_1 < x_2)$, если $a > 1$,

$(a^{x_1} > a^{x_2}) \Leftrightarrow (x_1 < x_2)$, если $0 < a < 1$;

5) множеством значений функции $x \mapsto a^x$ является множество $\mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y\}$ всех положительных чисел.

Определение 7. Отображение $x \mapsto a^x$ называется *показательной* или *экспоненциальной* функцией при основании a. Особенно часто встречается функция $x \mapsto e^x$, когда $a = e$, которую нередко обозначают через $\exp x$. В связи с этим для обозначения функции $x \mapsto a^x$ также иногда используется символ $\exp_a x$.

b) *Логарифмическая функция.* Поскольку отображение $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, как видно из свойств показательной функции, биективно, оно имеет обратное отображение.

Определение 8. Отображение, обратное к $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, называется *логарифмической функцией при основании* a $(0 < a,\ a \neq 1)$ и обозначается символом

$$\log_a\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}.$$

Определение 9. При основании $a = e$ логарифмическая функция, или логарифм, называется *натуральным логарифмом* и обозначается $\ln\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Причина такой терминологии прояснится при другом, во многом даже более естественном и прозрачном подходе к логарифмам, который мы изложим после построения основ дифференциального и интегрального исчисления.

По определению логарифма как функции, обратной экспоненциальной, имеем

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\log_a(a^x) = x),$$
$$\forall y \in \mathbb{R}_+ \quad \left(a^{\log_a y} = y\right).$$

Из этого определения и свойств показательной функции, в частности, получается, что в области $\mathbb{R}_+$ своего определения логарифм обладает следующими свойствами:

$1'$) $\log_a a = 1$;

$2'$) $\log_a(y_1 \cdot y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$;

$3'$) $\log_a y \to \log_a y_0$ при $\mathbb{R}_+ \ni y \to y_0 \in \mathbb{R}_+$;

$4'$) $(\log_a y_1 < \log_a y_2) \Leftrightarrow (y_1 < y_2)$, если $a > 1$,

$(\log_a y_1 > \log_a y_2) \Leftrightarrow (y_1 < y_2)$, если $0 < a < 1$;

$5'$) множество значений функции $\log_a\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ совпадает с множеством $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

◀ Из свойства 1) показательной функции и определения логарифма получаем $1'$).

Из свойства 2) показательной функции получаем $2'$). Действительно, пусть $x_1 = \log_a y_1$ и $x_2 = \log_a y_2$. Тогда $y_1 = a^{x_1}$, $y_2 = a^{x_2}$ и по 2) $y_1 \cdot y_2 = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$, откуда $\log_a(y_1 \cdot y_2) = x_1 + x_2$.

Аналогично, свойство 4) показательной функции влечет свойство $4'$) логарифмической.

Очевидно, $5) \Rightarrow 5'$).

Осталось доказать $3'$).

В силу свойства $2'$) логарифма

$$\log_a y - \log_a y_0 = \log_a \left(\frac{y}{y_0}\right),$$

поэтому неравенства

$$-\varepsilon < \log_a y - \log_a y_0 < \varepsilon$$

равносильны соотношению

$$\log_a \left(a^{-\varepsilon}\right) = -\varepsilon < \log_a \left(\frac{y}{y_0}\right) < \varepsilon = \log_a \left(a^{\varepsilon}\right),$$

которое по свойству 4′) логарифма равносильно

$$-a^{\varepsilon} < \frac{y}{y_0} < a^{\varepsilon} \quad \text{при} \quad a > 1,$$

$$a^{\varepsilon} < \frac{y}{y_0} < a^{-\varepsilon} \quad \text{при} \quad 0 < a < 1.$$

В любом случае мы получаем, что если

$$y_0 a^{-\varepsilon} < y < y_0 a^{\varepsilon} \quad \text{при} \quad a > 1$$

или

$$y_0 a^{\varepsilon} < y < y_0 a^{-\varepsilon} \text{ при } 0 < a < 1,$$

то

$$-\varepsilon < \log_a y - \log_a y_0 < \varepsilon.$$

Таким образом, проверено, что

$$\lim_{\mathbb{R}_+ \ni y \to y_0 \in \mathbb{R}_+} \log_a y = \log_a y_0. \blacktriangleright$$

На рис. 9 изображены графики функций e^x, 10^x, $\ln x$, $\log_{10} x =: \log x$, а на рис. 10 — графики функций $\left(\frac{1}{e}\right)^x$, $0{,}1^x$, $\log_{1/e} x$, $\log_{0,1} x$.

Остановимся еще на одном свойстве логарифма, которым тоже часто приходится пользоваться.

Покажем, что для любого $b > 0$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

6′) $\log_a(b^{\alpha}) = \alpha \log_a b$.

◀ 1° Равенство справедливо при $\alpha = n \in \mathbb{N}$, ибо из свойства 2′) логарифма по индукции получаем $\log_a(y_1 \ldots y_n) = \log_a y_1 + \ldots + \log_a y_n$, значит,

$$\log_a(b^n) = \log_a b + \ldots + \log_a b = n \log_a b.$$

2° $\log_a(b^{-1}) = -\log_a b$, ибо если $\beta = \log_a b$, то

$$b = a^{\beta}, \qquad b^{-1} = a^{-\beta} \qquad \text{и} \qquad \log_a \left(b^{-1}\right) = -\beta.$$

3° Из 1° и 2° теперь заключаем, что для $\alpha \in \mathbb{Z}$ равенство $\log_a(b^{\alpha}) = \alpha \log_a b$ справедливо.

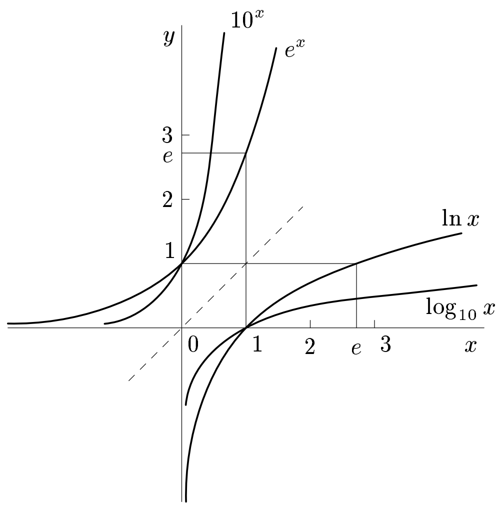


Рис. 9.

4° $\log_a(b^{1/n}) = \frac{1}{n}\log_a b$ при $n \in \mathbb{Z}$. Действительно,

$$\log_a b = \log_a \left(b^{1/n}\right)^n = n \log_a \left(b^{1/n}\right).$$

5° Теперь можно проверить, что для любого рационального числа $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ утверждение справедливо. В самом деле,

$$\frac{m}{n}\log_a b = m \log_a \left(b^{1/n}\right) = \log_a \left(b^{1/n}\right)^m = \log_a \left(b^{m/n}\right).$$

6° Но если равенство $\log_a b^r = r \log_a b$ справедливо для любого $r \in \mathbb{Q}$, то, устремляя r по $\mathbb{Q}$ к α, на основании свойства 3) показательной и свойства 3′) логарифмической функций получаем, что если r достаточно близко к α, то b^r близко к b^α и $\log_a b^r$ близко к $\log_a b^\alpha$. Это означает, что

$$\lim_{\mathbb{Q}\ni r\to\alpha} \log_a b^r = \log_a b^\alpha.$$

Но $\log_a b^r = r \log_a b$, поэтому

$$\log_a b^\alpha = \lim_{\mathbb{Q}\ni r\to\alpha} \log_a b^r = \lim_{\mathbb{Q}\ni r\to\alpha} r \log_a b = \alpha \log_a b. \ \blacktriangleright$$

Из доказанного свойства логарифма можно сделать вывод, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $a > 0$ имеет место равенство

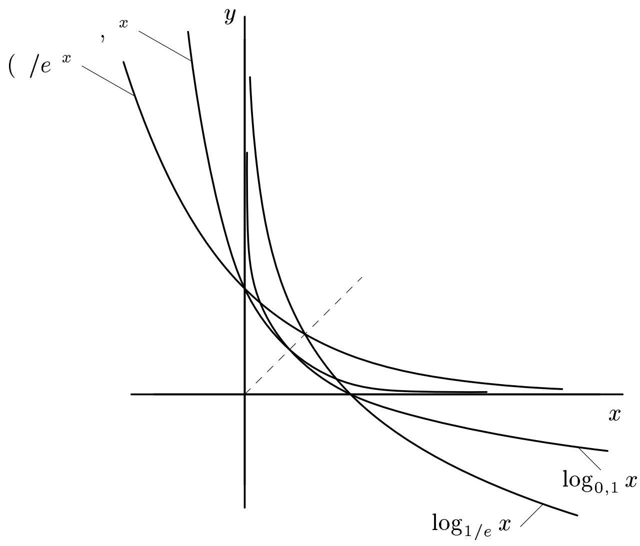


Рис. 10.

6) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.

◀ При $a = 1$ считаем, по определению, $1^\alpha = 1$ для $\alpha \in \mathbb{R}$. Таким образом, в этом случае равенство тривиально.

Если же $a \neq 1$, то по доказанному

$$\log_a((a^\alpha)^\beta) = \beta \log_a(a^\alpha) = \beta \cdot \alpha \log_a a = \beta \cdot \alpha = \log_a(a^{\alpha\beta}),$$

что в силу свойства $4'$) логарифма доказывает справедливость указанного равенства. ▶

c) *Степенная функция.* Если считать $1^\alpha = 1$, то при любом $x > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ мы определили величину x^α (читается «x в степени α»).

Определение 10. Функция $x \mapsto x^\alpha$, определенная на множестве $\mathbb{R}_+$ положительных чисел, называется *степенной функцией*, а число α называется *показателем степени.*

Степенная функция, очевидно, является композицией показательной и логарифмической функций, точнее,

$$x^\alpha = a^{\log_a(x^\alpha)} = a^{\alpha \log_a x}.$$

На рис. 11 изображены графики функции $y = x^\alpha$ при различных значениях показателя степени.

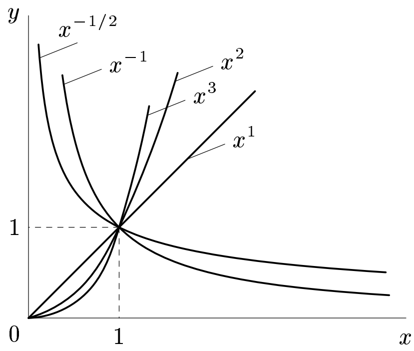


Рис. 11.

3. Общее определение предела функции (предел по базе). Доказывая свойства предела функции, мы убедились, что от проколотых окрестностей, в которых были определены наши функции и которые возникали в процессе доказательств, кроме свойств B_1), B_2), указанных во введении к предыдущему пункту 2, действительно ничего не потребовалось. Это обстоятельство служит оправданием для выделения следующего математического объекта.

а. База; определение и основные примеры

Определение 11. Совокупность $\mathcal{B}$ подмножеств $B \subset X$ множества X будем называть *базой в множестве* X, если выполнены два условия:

B_1) $\forall B \in \mathcal{B}\ \ (B \neq \varnothing)$;

B_2) $\forall B_1 \in \mathcal{B}\ \ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \ \exists B \in \mathcal{B}\ \ (B \subset B_1 \cap B_2)$.

Иными словами, элементы совокупности $\mathcal{B}$ суть непустые множества и в пересечении любых двух из них содержится некоторый элемент из той же совокупности.

Укажем некоторые наиболее употребительные в анализе базы.

Обозначение базы	Чтение обозначения	Из каких множеств (элементов) состоит база	Определение и обозначение элементов базы
$x \to a$	x стремится к a	База проколотых окрестностей точки $a \in \mathbb{R}$	$\overset{\circ}{U}(a) :=$ $= \{x \in \mathbb{R} \mid a - \delta_1 <$ $< x < a + \delta_2 \wedge x \neq a\}$, где $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$
$x \to \infty$	x стремится к бесконечности	База окрестностей бесконечности	$U(\infty) :=$ $= \{x \in \mathbb{R} \mid \delta < \lvert x \rvert\}$, где $\delta \in \mathbb{R}$
$x \to a$, $x \in E$ или $E \ni x \to a$ или $x \underset{\in E}{\longrightarrow} a$	x стремится к a по множеству E	База*) проколотых окрестностей точки a в множестве E	$\overset{\circ}{U}_E(a) := E \cap \overset{\circ}{U}(a)$
$x \to \infty$, $x \in E$ или $E \ni x \to \infty$ или $x \underset{\in E}{\longrightarrow} \infty$	x стремится к бесконечности по множеству E	База**) окрестностей бесконечности в множестве E	$U_E(\infty) := E \cap U(\infty)$

*) Предполагается, что a — предельная точка множества E.

**) Предполагается, что множество E не ограничено.

Если $E = E_a^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ $(E = E_a^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\})$, то вместо $x \to a$, $x \in E$ пишут $x \to a + 0$ $(x \to a - 0)$ и говорят, что x *стремится к a справа* или *со стороны бо́льших значений* (соответственно, *слева* или *со стороны меньших значений*). При $a = 0$ принята краткая запись $x \to +0$ $(x \to -0)$ вместо $x \to 0+0$ $(x \to 0-0)$.

Запись $E \ni x \to a + 0$ $(E \ni x \to a - 0)$ будет употребляться вместо $x \to a,\ x \in E \cap E_a^+$ $(x \to a,\ x \in E \cap E_a^-)$. Она означает, что x стремится по множеству E к a, оставаясь больше (меньше), чем a.

Если

$$E = E_\infty^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid c < x\} \qquad (E = E_\infty^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < c\}),$$

то вместо $x \to \infty$, $x \in E$ пишут $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ и говорят, что

x стремится к плюс бесконечности (соответственно, *к минус бесконечности*).

Запись $E \ni x \to +\infty$ $(E \ni x \to -\infty)$ будет употребляться вместо $x \to \infty$, $x \in E \cap E_\infty^+$ $(x \to \infty,\ x \in E \cap E_\infty^-)$.

При $E = \mathbb{N}$ вместо $x \to \infty$, $x \in \mathbb{N}$ мы (если это не ведет к недоразумению) будем, как это принято в теории предела последовательности, писать $n \to \infty$.

Заметим, что все перечисленные базы обладают той особенностью, что пересечение любых двух элементов базы само является элементом этой базы, а не только содержит некоторый элемент базы. С другими базами мы встретимся при изучении функций, заданных не на числовой оси[1)].

Отметим также, что используемый здесь термин «база» есть краткое обозначение того, что в математике называется «базисом фильтра», а введенный ниже предел по базе есть наиболее существенная для анализа часть созданного современным французским математиком А. Картаном понятия предела по фильтру[2)].

b. Предел функции по базе

Определение 12. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — функция на множестве X; $\mathcal{B}$ — база в X. Число $A \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *по базе* $\mathcal{B}$, если для любой окрестности $V(A)$ точки A найдется элемент $B \in \mathcal{B}$ базы, образ которого $f(B)$ содержится в окрестности $V(A)$.

Если A — предел функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ по базе $\mathcal{B}$, то пишут

$$\lim_{\mathcal{B}} f(x) = A.$$

Повторим определение предела по базе в логической символике:

$$\boxed{\Big(\lim_{\mathcal{B}} f(x) = A\Big) := \forall V(A)\ \ \exists B \in \mathcal{B}\ \ (f(B) \subset V(A)).}$$

Поскольку мы сейчас рассматриваем функции с числовыми значениями, полезно иметь в виду и следующую форму этого основного определения:

[1)] Например, совокупность открытых (без граничной окружности) кругов, содержащих данную точку плоскости, является базой. Пересечение двух элементов базы не всегда круг, но всегда содержит круг из нашей совокупности.

[2)] Подробнее об этом см.: Бурбаки Н. Общая топология. М.: ИЛ, 1958.

$$\Bigl(\lim_{\mathcal{B}} f(x) = A\Bigr) := \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists B \in \mathcal{B} \ \ \forall x \in B \ \ (|f(x) - A| < \varepsilon).$$

В этой формулировке вместо произвольной окрестности $V(A)$ берется симметричная (относительно точки A) окрестность (ε-окрестность). Эквивалентность этих определений для вещественнозначных функций вытекает из того, что, как уже говорилось, в любой окрестности точки содержится некоторая симметричная окрестность этой же точки (проведите доказательство полностью!).

Мы дали общее определение предела функции по базе. Выше были рассмотрены примеры наиболее употребительных в анализе баз. В конкретной задаче, где появляется та или иная из этих баз, необходимо уметь расшифровать общее определение и записать его для конкретной базы.

Так,

$$\Bigl(\lim_{x\to a-0} f(x) = A\Bigr) := \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \,]a-\delta, a[\ \ (|f(x) - A| < \varepsilon),$$

$$\Bigl(\lim_{x\to -\infty} f(x) = A\Bigr) := \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R} \ \forall x < \delta \ \ (|f(x) - A| < \varepsilon).$$

Рассматривая примеры баз, мы, в частности, ввели понятие окрестности бесконечности. Если использовать это понятие, то в соответствии с общим определением предела разумно принять следующие соглашения:

$$\Bigl(\lim_{\mathcal{B}} f(x) = \infty\Bigr) := \forall V(\infty) \ \ \exists B \in \mathcal{B} \ \ (f(B) \subset V(\infty))$$

или, что то же самое,

$$\Bigl(\lim_{\mathcal{B}} f(x) = \infty\Bigr) := \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists B \in \mathcal{B} \ \ \forall x \in B \ \ (\varepsilon < |f(x)|),$$

$$\Bigl(\lim_{\mathcal{B}} f(x) = +\infty\Bigr) := \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \ \ \exists B \in \mathcal{B} \ \ \forall x \in B \ \ (\varepsilon < f(x)),$$

$$\Bigl(\lim_{\mathcal{B}} f(x) = -\infty\Bigr) := \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \ \ \exists B \in \mathcal{B} \ \ \forall x \in B \ \ (f(x) < \varepsilon).$$

Обычно под ε подразумевают малую величину. В приведенных определениях это, разумеется, не так. В соответствии с принятыми соглашениями, например, можем записать

$$\Bigl(\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty\Bigr) := \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \ \ \exists \delta \in \mathbb{R} \ \ \forall x > \delta \ \ (f(x) < \varepsilon).$$

Советуем читателю самостоятельно написать полное определение предела для различных баз в случае конечных (числовых) и бесконечных пределов.

Для того чтобы можно было считать доказанными и в общем случае предела по произвольной базе все те теоремы о пределах, которые мы доказали в пункте 2 для специальной базы $E \ni x \to a$, необходимо дать соответствующие определения: финально постоянной, финально ограниченной и бесконечно малой при данной базе функций.

Определение 13. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *финально постоянной при базе* $\mathcal{B}$, если существуют число $A \in \mathbb{R}$ и такой элемент $B \in \mathcal{B}$ базы, в любой точке $x \in B$ которого $f(x) = A$.

Определение 14. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *ограниченной при базе* $\mathcal{B}$ или *финально ограниченной при базе* $\mathcal{B}$, если существуют число $c \in \mathbb{R}$ и такой элемент $B \in \mathcal{B}$ базы, в любой точке $x \in B$ которого $|f(x)| < c$.

Определение 15. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *бесконечно малой при базе* $\mathcal{B}$, если $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = 0$.

После этих определений и основного наблюдения о том, что для доказательства теорем о пределах нужны только свойства B_1) и B_2) базы, можно считать, что все свойства предела, установленные в пункте 2, справедливы для пределов по любой базе.

В частности, мы можем теперь говорить о пределе функции при $x \to \infty$, или при $x \to -\infty$, или при $x \to +\infty$.

Кроме того, мы обеспечили себе возможность применения теории пределов и в том случае, когда функции будут определены не на числовых множествах; в дальнейшем это окажется особенно ценным. К примеру, длина кривой есть числовая функция, определенная на некотором классе кривых. Если мы знаем эту функцию на ломаных, то потом предельным переходом определяем ее для более сложных кривых, например для окружности.

В данный же момент основная польза от сделанного наблюдения и введенного в связи с ним понятия базы состоит в том, что они избавляют нас от проверок и формальных доказательств теорем о пределах для каждого конкретного вида предельных переходов или, в нашей нынешней терминологии, для каждого конкретного вида баз.

Для того чтобы окончательно освоиться с понятием предела по произвольной базе, доказательства дальнейших свойств предела функции мы проведем в общем виде.

4. Вопросы существования предела функции

a. Критерий Коши. Прежде чем формулировать критерий Коши, дадим следующее полезное

Определение 16. *Колебанием* функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ на множестве $E \subset X$ называется величина

$$\omega(f; E) := \sup_{x_1, x_2 \in E} |f(x_1) - f(x_2)|,$$

т. е. верхняя грань модуля разности значений функции на всевозможных парах точек $x_1, x_2 \in E$.

Примеры.

11. $\omega\big(x^2; [-1, 2]\big) = 4$.

12. $\omega\big(x; [-1, 2]\big) = 3$.

13. $\omega\big(x;]-1, 2[\big) = 3$.

14. $\omega\big(\operatorname{sgn} x; [-1, 2]\big) = 2$.

15. $\omega\big(\operatorname{sgn} x; [0, 2]\big) = 1$.

16. $\omega\big(\operatorname{sgn} x;]0, 2]\big) = 0$.

Теорема 4 (критерий Коши существования предела функции)**.** *Пусть X — множество и $\mathcal{B}$ — база в X.*

Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ имеет предел по базе $\mathcal{B}$ в том и только в том случае, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется элемент $B \in \mathcal{B}$ базы, на котором колебание функции меньше ε.

Итак,

$$\exists \lim_{\mathcal{B}} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathcal{B}\ \ (\omega(f; B) < \varepsilon).$$

◄ Необходимость. Если $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = A$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент B базы $\mathcal{B}$, в любой точке x которого $|f(x) - A| < \varepsilon/3$. Но тогда для любых x_1, x_2 из B

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \frac{2}{3}\varepsilon$$

и, значит, $\omega(f; B) < \varepsilon$.

Достаточность. Докажем теперь основную часть критерия, утверждающую, что если для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент B базы $\mathcal{B}$, на котором $\omega(f; B) < \varepsilon$, то функция f имеет предел по базе $\mathcal{B}$.

Придавая ε последовательно значения $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, получим последовательность $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ элементов базы таких, что $\omega(f; B_n) < 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $B_n \neq \varnothing$, в каждом B_n можно взять по точке x_n. Последовательность $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ фундаментальная. Действительно, $B_n \cap B_m \neq \varnothing$, и, взяв вспомогательную точку $x \in B_n \cap B_m$, получим, что $|f(x_n) - f(x_m)| < |f(x_n) - f(x)| + |f(x) - f(x_m)| < 1/n + 1/m$. По доказанному для последовательностей критерию Коши, последовательность $\{f(x_n), n \in \mathbb{N}\}$ имеет некоторый предел A. Из установленного выше неравенства при $m \to \infty$ следует, что $|f(x_n) - A| \leqslant 1/n$, а отсюда, учитывая, что $\omega(f; B_n) < 1/n$, заключаем теперь, что если $n > N = [2/\varepsilon] + 1$, то в любой точке $x \in B_n$ будет $|f(x) - A| < \varepsilon$. ►

Замечание. Проведенное доказательство, как мы увидим позже, остается в силе для функций со значениями в любом так называемом *полном* пространстве Y. Если же $Y = \mathbb{R}$, а этот случай нас сейчас в первую очередь и интересует, то при желании можно пользоваться той же идеей, что и в доказательстве достаточности критерия Коши для последовательностей.

◄ Полагая $m_B = \inf\limits_{x \in B} f(x)$, $M_B = \sup\limits_{x \in B} f(x)$ и замечая, что для любых элементов B_1, B_2 базы $\mathcal{B}$ выполнено $m_{B_1} \leqslant m_{B_1 \cap B_2} \leqslant M_{B_1 \cap B_2} \leqslant M_{B_2}$, по аксиоме полноты найдем число $A \in \mathbb{R}$, разделяющее числовые множества $\{m_B\}$ и $\{M_B\}$, где $B \in \mathcal{B}$. Поскольку $\omega(f; B) = M_B - m_B$, то теперь можно заключить, что как только $\omega(f; B) < \varepsilon$, так $|f(x) - A| < \varepsilon$ в любой точке $x \in B$. ►

Пример 17. Покажем, что в случае, когда $X = \mathbb{N}$ и $\mathcal{B}$ есть база $n \to \infty$, $n \in \mathbb{N}$, доказанный общий критерий Коши существования предела функции совпадает с рассмотренным ранее критерием Коши существования предела последовательности.

Действительно, элементом базы $n \to \infty$, $n \in \mathbb{N}$ является множество $B = \mathbb{N} \cap U(\infty) = \{n \in \mathbb{N} \mid n > N\}$ тех натуральных чисел $n \in \mathbb{N}$, которые больше некоторого числа $N \in \mathbb{R}$. Без ограничения общности можно считать, что $N \in \mathbb{N}$. Соотношение $\omega(f; B) < \varepsilon$ в нашем случае означает, что $\forall n_1, n_2 > N$ имеем $|f(n_1) - f(n_2)| < \varepsilon$.

Таким образом, условие, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $B \in \mathcal{B}$ базы, на котором колебание $\omega(f; B)$ функции f меньше ε, для функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ равносильно условию фундаментальности последовательности $\{f(n)\}$.

b. Предел композиции функций

Теорема 5 (о пределе композиции функций). *Пусть Y — множество; $\mathcal{B}_Y$ — база в Y; $g\colon Y \to \mathbb{R}$ — отображение, имеющее предел по базе $\mathcal{B}_Y$.*

Пусть X — множество, $\mathcal{B}_X$ — база в X и $f\colon X \to Y$ — такое отображение X в Y, что для любого элемента $B_Y \in \mathcal{B}_Y$ базы $\mathcal{B}_Y$ найдется элемент $B_X \in \mathcal{B}_X$ базы $\mathcal{B}_X$, образ которого $f(B_X)$ содержится в B_Y.

При этих условиях композиция $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ отображений f и g определена, имеет предел по базе $\mathcal{B}_X$ и $\lim\limits_{\mathcal{B}_X}(g \circ f)(x) = \lim\limits_{\mathcal{B}_Y} g(y)$.

◀ Композиция $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ определена, поскольку $f(X) \subset Y$.

Пусть $\lim\limits_{\mathcal{B}_Y} g(y) = A$. Покажем, что $\lim\limits_{\mathcal{B}_X}(g \circ f)(x) = A$. По заданной окрестности $V(A)$ точки A найдем элемент $B_Y \in \mathcal{B}_Y$ базы $\mathcal{B}_Y$ такой, что $g(B_Y) \subset V(A)$. По условию найдется элемент $B_X \in \mathcal{B}_X$ базы $\mathcal{B}_X$ такой, что $f(B_X) \subset B_Y$. Но тогда $(g \circ f)(B_X) = g(f(B_X)) \subset g(B_Y) \subset V(A)$ и мы, таким образом, проверили, что A является пределом функции $(g \circ f)\colon X \to \mathbb{R}$ по базе $\mathcal{B}_X$. ▶

Пример 18. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = ?$

Если положить $g(y) = \frac{\sin y}{y}$, а $f(x) = 7x$, то $(g \circ f)(x) = \frac{\sin 7x}{7x}$. В нашем случае $Y = \mathbb{R} \setminus 0$, $X = \mathbb{R}$. Поскольку $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$, то для применения теоремы надо проверить, что, какой бы элемент базы $y \to 0$ мы ни взяли, найдется элемент базы $x \to 0$, образ которого при отображении $f(x) = 7x$ содержится в указанном элементе базы $y \to 0$. Элементами базы $y \to 0$ являются проколотые окрестности $\overset{\circ}{U}_Y(0)$ точки $0 \in \mathbb{R}$.

Элементами базы $x \to 0$ также являются проколотые окрестности $\overset{\circ}{U}_X(0)$ точки $0 \in \mathbb{R}$. Пусть $\overset{\circ}{U}_Y(0) = \{y \in \mathbb{R} \mid \alpha < y < \beta,\, y \neq 0\}$ (где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, причем $\alpha < 0$, $\beta > 0$) — произвольная проколотая окрестность нуля в Y. Если взять $\overset{\circ}{U}_X(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\alpha}{7} < x < \frac{\beta}{7},\, x \neq 0\}$, то эта проколотая окрестность нуля в X уже обладает тем свойством, что $f(\overset{\circ}{U}_X)(0) = \overset{\circ}{U}_Y(0) \subset \overset{\circ}{U}_Y(0)$.

Условия теоремы выполнены, и теперь можно утверждать, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Пример 19. Функция $g(y) = |\operatorname{sgn} y|$, как мы уже видели (см. пример 3), имеет предел $\lim\limits_{y\to 0} |\operatorname{sgn} y| = 1$.

Функция $y = f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, определенная при $x \neq 0$, также имеет предел $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ (см. пример 1).

Однако функция $(g \circ f)(x) = \left|\operatorname{sgn}\left(x \sin \frac{1}{x}\right)\right|$ при $x \to 0$ не имеет предела.

Действительно, в любой проколотой окрестности точки $x = 0$ имеются нули функции $\sin \frac{1}{x}$, поэтому функция $\left|\operatorname{sgn}\left(x \sin \frac{1}{x}\right)\right|$ в любой такой окрестности принимает и значение 1, и значение 0 и по критерию Коши не может иметь предел при $x \to 0$.

Не противоречит ли это доказанной теореме?

Проверьте, как мы сделали это в предыдущем примере, выполнены ли здесь условия теоремы.

Пример 20. Покажем, что

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.}$$

◀ Пусть

$$Y = \mathbb{N},\quad \mathcal{B}_Y\text{ — база } n \to \infty,\ n \in \mathbb{N};$$
$$X = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\},\quad \mathcal{B}_X\text{ — база } x \to +\infty;$$
$$f\colon X \to Y \quad\text{есть отображение}\quad x \overset{f}{\longmapsto} [x],$$

где $[x]$ — целая часть числа x (т. е. наибольшее целое число, не превосходящее числа x).

Тогда для любого элемента $B_Y = \{n \in \mathbb{N} \mid n > N\}$ базы $n \to \infty$, $n \in \mathbb{N}$, очевидно, найдется элемент $B_X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > N + 1\}$ базы $x \to +\infty$, образ которого при отображении $x \to [x]$ содержится в B_Y.

Функции $g(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $g_1(n) = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$, $g_2(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, как нам уже известно, имеют своим пределом по базе $n \to \infty$, $n \in \mathbb{N}$ число e.

По теореме о пределе композиции функций можно утверждать, что тогда функции

$$(g \circ f)(x) = \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]}, \qquad (g_1 \circ f)(x) = \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]},$$

$$(g_2 \circ f)(x) = \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

также имеют своим пределом по базе $x \to +\infty$ число e.

Теперь остается заметить, что при $x \geqslant 1$

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

и так как при $x \to +\infty$ крайние члены стремятся к e, то по свойствам предела (теорема 3) получаем $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

Используя теорему о пределе композиции функций, покажем теперь, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

Запишем

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{(-t)\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{(-t)}\right)^{(-t)} = \lim_{t\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t} = \lim_{t\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\lim_{t\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{t-1}\right) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} = \lim_{u\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u} = e.$$

Написанные равенства с учетом произведенных замен $u = t - 1$ и $t = -x$ обосновываются с конца (!) на основе теоремы о пределе композиции функций. Действительно, только тогда, когда мы пришли к пределу $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u}$, существование которого уже доказано, теорема позволяет утверждать, что предыдущий предел тоже существует и равен этому. Тогда и стоящий перед ним предел существует, и конечным числом таких переходов придем к исходному пределу. Это довольно типичный пример процедуры использования теоремы о пределе сложной функции при вычислении пределов.

Итак, мы имеем

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Действительно, пусть задано число $\varepsilon > 0$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, найдется число $c_1 \in \mathbb{R}$ такое, что при $x < c_1$ будет $\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, найдется число $c_2 \in \mathbb{R}$ такое, что при $c_2 < x$ будет $\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon$.

Тогда при $|x| > c = \max\{|c_1|, |c_2|\}$ будем иметь $\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon$. Тем самым проверено, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. ►

Пример 21.

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e.$$

◄ После замены $x = 1/t$ возвращаемся к пределу, рассмотренному в предыдущем примере. ►

Пример 22.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{q^x} = 0, \quad \text{если } \ q > 1.$$

◄ Мы знаем (см. § 1, пример 11), что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{q^n} = 0$, если $q > 1$.

Теперь, как и в примере 3, можно рассмотреть вспомогательное отображение $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{N}$, осуществляемое функцией $[x]$ (целая часть x).

Воспользовавшись неравенствами

$$\frac{1}{q}\cdot\frac{[x]}{q^{[x]}} < \frac{x}{q^x} < \frac{[x]+1}{q^{[x]+1}}\cdot q$$

и учитывая, что по теореме о пределе сложной функции крайние члены стремятся к нулю при $x \to +\infty$, заключаем, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{q^x} = 0$. ►

Пример 23.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x} = 0.$$

◄ Пусть $a > 1$. Полагаем $t = \log_a x$, находим $x = a^t$. По свойствам показательной и логарифмической функций (учитывая неограниченность

a^n, $n \in \mathbb{N}$) имеем $(x \to +\infty) \Leftrightarrow (t \to +\infty)$. Используя теорему о пределе сложной функции и результат примера 22, получаем

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{a^t} = 0.$$

Если $0 < a < 1$, то положим $-t = \log_a x$, $x = a^{-t}$. Тогда $(x \to +\infty) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (t \to +\infty)$, и так как $1/a > 1$, то снова

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{-t}{a^{-t}} = -\lim_{t \to +\infty} \frac{t}{(1/a)^t} = 0. \quad \blacktriangleright$$

c. Предел монотонной функции. Рассмотрим теперь один частный, но весьма полезный класс числовых функций — монотонные функции.

Определение 17. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$, определенная на числовом множестве $E \subset \mathbb{R}$, называется

возрастающей на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2));$$

неубывающей на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2));$$

невозрастающей на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2));$$

убывающей на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)).$$

Функции перечисленных типов называются *монотонными* на множестве E.

Предположим, что числа (или символы $-\infty$, $+\infty$) $i = \inf E$ и $s =$ $= \sup E$ являются предельными точками множества E и $f\colon E \to \mathbb{R}$ — монотонная функция на E. Имеет место следующая

Теорема 6 (критерий существования предела монотонной функции). *Для того чтобы неубывающая на множестве E функция $f\colon E \to$ $\to \mathbb{R}$ имела предел при $x \to s$, $x \in E$, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена сверху, а для того чтобы она имела предел при*

$x \to i$, $x \in E$, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена снизу.

◀ Докажем теорему для предела $\lim\limits_{E \ni x \to s} f(x)$.

Если этот предел существует, то, как и всякая функция, имеющая предел, функция f оказывается финально ограниченной при базе $E \ni \ni x \to s$.

Поскольку f — неубывающая на E функция, отсюда следует, что f ограничена сверху. На самом деле можно утверждать даже, что $f(x) \leqslant \leqslant \lim\limits_{E \ni x \to s} f(x)$ для любого $x \in E$. Это будет видно из дальнейшего.

Перейдем к доказательству существования предела $\lim\limits_{E \ni x \to s} f(x)$ при условии ограниченности f сверху.

Если f ограничена сверху, то существует верхняя грань значений, которые функция принимает на множестве E. Пусть $A = \sup\limits_{x \in E} f(x)$; покажем, что $\lim\limits_{E \ni x \to s} f(x) = A$. По $\varepsilon > 0$, на основании определения верхней грани множества, найдем точку $x_0 \in E$, для которой $A - \varepsilon < f(x_0) \leqslant A$. Тогда ввиду неубывания f на E получаем, что при $x_0 < x \in E$ будет $A - \varepsilon < f(x) \leqslant A$. Но множество $\{x \in E \mid x_0 < x\}$, очевидно, есть элемент базы $x \to s$, $x \in E$ (ибо $s = \sup E$). Таким образом, доказано, что $\lim\limits_{E \ni x \to s} f(x) = A$.

Для предела $\lim\limits_{E \ni x \to i} f(x)$ все рассуждения аналогичны. В этом случае имеем $\lim\limits_{E \ni x \to i} f(x) = \inf\limits_{x \in E} f(x)$. ▶

d. Сравнение асимптотического поведения функций. Этот пункт мы начнем поясняющими тему примерами.

Пусть $\pi(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих данного вещественного числа $x \in \mathbb{R}$. Имея возможность при любом фиксированном x найти (хотя бы перебором) значение $\pi(x)$, мы тем не менее не в состоянии сразу ответить, например, на вопрос о том, как ведет себя функция $\pi(x)$ при $x \to +\infty$ или, что то же самое, каков асимптотический закон распределения простых чисел. От Евклида нам известно, что $\pi(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, но доказать, что $\pi(x)$ растет примерно как $\frac{x}{\ln x}$, удалось только в XIX веке П. Л. Чебышёву[1)].

[1)] П. Л. Чебышёв (1821 – 1894) — великий русский математик и механик, основатель большой математической школы в России.

Когда возникает вопрос об описании поведения функции вблизи некоторой точки (или бесконечности), в которой, как правило, сама функция не определена, говорят, что интересуются *асимптотикой* или *асимптотическим поведением* функции в окрестности этой точки.

Асимптотическое поведение функции обычно характеризуют с помощью другой, более простой или более изученной функции, которая в окрестности исследуемой точки с малой относительной погрешностью воспроизводит значения изучаемой функции.

Так, $\pi(x)$ при $x \to +\infty$ ведет себя как $\frac{x}{\ln x}$; функция $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to \to 0$ ведет себя как постоянная функция, равная 1; говоря о поведении функции $x^2+x+\sin\frac{1}{x}$ при $x \to \infty$, мы, ясно, скажем, что она в основном ведет себя как функция x^2, а при $x \to 0$ — как $\sin\frac{1}{x}$.

Дадим теперь точные определения некоторых элементарных понятий, относящихся к асимптотическому поведению функций. Этими понятиями мы будем систематически пользоваться уже на первом этапе изучения анализа.

Определение 18. Условимся говорить, что некоторое свойство функций или соотношение между функциями *выполнено финально при данной базе* $\mathcal{B}$, если найдется элемент $B \in \mathcal{B}$ базы, на котором оно имеет место.

Именно в этом смысле мы до сих пор понимали финальное постоянство или финальную ограниченность функции при данной базе. В этом же смысле мы дальше будем говорить, например, о том, что финально выполнено соотношение $f(x) = g(x)h(x)$ между некоторыми функциями f, g, h. Эти функции могут даже иметь разные исходные области определения, но если мы интересуемся их асимптотическим поведением при базе $\mathcal{B}$, то нам важно только, чтобы все они были определены на некотором элементе базы $\mathcal{B}$.

Определение 19. Говорят, что функция f есть *бесконечно малая по сравнению с функцией g при базе* $\mathcal{B}$ и пишут $f \underset{\mathcal{B}}{=} o(g)$ или $f = o(g)$ при $\mathcal{B}$, если финально при базе $\mathcal{B}$ выполнено соотношение $f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$, где α — функция, бесконечно малая при базе $\mathcal{B}$.

Пример 24. $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$, так как $x^2 = x \cdot x$.

Пример 25. $x = o(x^2)$ при $x \to \infty$, так как финально, когда уже $x \neq 0$, $x = \frac{1}{x} \cdot x^2$.

Из этих примеров надо сделать вывод, что указание базы, при которой $f = o(g)$, совершенно необходимо.

Обозначение $f = o(g)$ читается «f есть o малое от g».

Из определения следует, в частности, что получающаяся при $g(x) \equiv \equiv 1$ запись $f \underset{\mathcal{B}}{=} o(1)$ означает просто, что f есть бесконечно малая при базе $\mathcal{B}$.

Определение 20. Если $f \underset{\mathcal{B}}{=} o(g)$ и функция g сама есть бесконечно малая при базе $\mathcal{B}$, то говорят, что f есть *бесконечно малая более высокого по сравнению с g порядка при базе $\mathcal{B}$*.

Пример 26. $x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$ при $x \to \infty$ есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с бесконечно малой $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

Определение 21. Функцию, стремящуюся к бесконечности при данной базе, называют *бесконечно большой функцией* или просто *бесконечно большой при данной базе*.

Определение 22. Если f и g — бесконечно большие при базе $\mathcal{B}$ и $f \underset{\mathcal{B}}{=} o(g)$, то говорят, что g есть *бесконечно большая более высокого порядка по сравнению с f*.

Пример 27. $\frac{1}{x} \to \infty$ при $x \to 0$, $\dfrac{1}{x^2} \to \infty$ при $x \to 0$ и $\frac{1}{x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ при $x \to 0$, поэтому $\dfrac{1}{x^2}$ есть бесконечно большая более высокого порядка по сравнению с $\frac{1}{x}$ при $x \to 0$.

Вместе с тем при $x \to \infty$ функция x^2 есть бесконечно большая более высокого порядка, чем x.

Не следует думать, что, выбрав степени x^n для описания асимптотического поведения функций, мы сможем каждую бесконечно малую или бесконечно большую характеризовать некоторым числом n — ее степенью.

Пример 28. Покажем, что при $a > 1$ и любом $n \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0,$$

т. е. $x^n = o(a^x)$ при $x \to +\infty$.

◀ Если $n \leqslant 0$, то утверждение очевидно. Если же $n \in \mathbb{N}$, то, полагая $q = \sqrt[n]{a}$, имеем $q > 1$ и $\dfrac{x^n}{a^x} = \left(\dfrac{x}{q^x}\right)^n$, поэтому

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{q^x}\right)^n = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{q^x} \cdot \ldots \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{q^x}}_{n \text{ раз}} = 0.$$

Мы воспользовались, по индукции, теоремой о пределе произведения и результатом примера 22. ►

Таким образом, при любом $n \in \mathbb{Z}$ получаем $x^n = o(a^x)$ при $x \to +\infty$, если $a > 1$.

Пример 29. Развивая предыдущий пример, покажем, что при $a > 1$ и любом $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0,$$

т. е. $x^\alpha = o(a^x)$ при $x \to +\infty$.

◄ Действительно, возьмем число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n > \alpha$. Тогда при $x > 1$ получим

$$0 < \frac{x^\alpha}{a^x} < \frac{x^n}{a^x}.$$

Опираясь на свойства предела и результат предыдущего примера, получаем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$. ►

Пример 30. Покажем, что при $a > 1$ и любом $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\mathbb{R}_+ \ni x\to 0} \frac{a^{-1/x}}{x^\alpha} = 0,$$

т. е. $a^{-1/x} = o(x^\alpha)$ при $x \to 0$, $x \in \mathbb{R}_+$.

◄ Полагая в этом случае $x = -1/t$, по теореме о пределе сложной функции, используя результат предыдущего примера, находим

$$\lim_{\mathbb{R}_+ \ni x\to 0} \frac{a^{-1/x}}{x^\alpha} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^\alpha}{a^t} = 0. \ ►$$

Пример 31. Покажем, что при $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0,$$

т. е. при любом положительном показателе степени α имеем $\log_a x = o(x^\alpha)$ при $x \to +\infty$.

◀ Если $a > 1$, то положим $x = a^{t/\alpha}$. Тогда по свойствам показательной функции и логарифма, опираясь на теорему о пределе композиции функций и результат примера 29, находим

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = \lim_{t\to+\infty} \frac{(t/\alpha)}{a^t} = \frac{1}{\alpha} \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{a^t} = 0.$$

Если $0 < a < 1$, то $1/a > 1$ и после замены $x = a^{-t/\alpha}$ получаем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = \lim_{t\to+\infty} \frac{(-t/\alpha)}{a^{-t}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{(1/a)^t} = 0. \ \blacktriangleright$$

Пример 32. Покажем еще, что при любом $\alpha > 0$

$$x^\alpha \log_a x = o(1) \quad \text{при} \quad x \to 0, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

◀ Нам нужно показать, что $\lim\limits_{\mathbb{R}_+\ni x\to 0} x^\alpha \log_a x = 0$ при $\alpha > 0$. Полагая $x = 1/t$, применяя теорему о пределе композиции функций и результат предыдущего примера, находим

$$\lim_{\mathbb{R}_+\ni x\to 0} x^\alpha \log_a x = \lim_{t\to+\infty} \frac{\log_a (1/t)}{t^\alpha} = -\lim_{t\to+\infty} \frac{\log_a t}{t^\alpha} = 0. \ \blacktriangleright$$

Определение 23. Условимся, что запись $f \underset{\mathcal{B}}{=} O(g)$ или $f = O(g)$ при базе $\mathcal{B}$ (читается «f есть O большое от g при базе $\mathcal{B}$») будет означать, что финально при базе $\mathcal{B}$ выполнено соотношение $f(x) = \beta(x)g(x)$, где $\beta(x)$ — финально ограниченная при базе $\mathcal{B}$ функция.

В частности, запись $f \underset{\mathcal{B}}{=} O(1)$ означает, что функция f финально ограничена при базе $\mathcal{B}$.

Пример 33. $\left(\frac{1}{x} + \sin x\right) x = O(x)$ при $x \to \infty$.

Определение 24. Говорят, что функции f и g *одного порядка при базе* $\mathcal{B}$ и пишут $f \asymp g$ при базе $\mathcal{B}$, если одновременно $f \underset{\mathcal{B}}{=} O(g)$ и $g \underset{\mathcal{B}}{=} O(f)$.

Пример 34. Функции $(2 + \sin x)x$ и x одного порядка при $x \to \infty$, но $(1 + \sin x)x$ и x не являются функциями одного порядка при $x \to \infty$.

Условие, что функции f и g одного порядка при базе $\mathcal{B}$, очевидно, равносильно тому, что найдутся числа $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ и элемент B базы $\mathcal{B}$ такие, что на B имеют место соотношения

$$c_1|g(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant c_2|g(x)|$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{c_2}|f(x)| \leqslant |g(x)| \leqslant \frac{1}{c_1}|f(x)|.$$

Определение 25. Если между функциями f и g финально при базе $\mathcal{B}$ выполнено соотношение $f(x) = \gamma(x)g(x)$, где $\lim\limits_{\mathcal{B}} \gamma(x) = 1$, то говорят, что *при базе $\mathcal{B}$ функция f асимптотически ведет себя как функция g* или, короче, что *f эквивалентна g при базе $\mathcal{B}$*.

Будем в этом случае писать $f \underset{\mathcal{B}}{\sim} g$ или $f \sim g$ при базе $\mathcal{B}$.

Употребление термина «эквивалентна» оправдано тем, что

$$\Big(f \underset{\mathcal{B}}{\sim} f\Big),$$
$$\Big(f \underset{\mathcal{B}}{\sim} g\Big) \Rightarrow \Big(g \underset{\mathcal{B}}{\sim} f\Big),$$
$$\Big(f \underset{\mathcal{B}}{\sim} g\Big) \wedge \Big(g \underset{\mathcal{B}}{\sim} h\Big) \Rightarrow \Big(f \underset{\mathcal{B}}{\sim} h\Big).$$

Действительно, соотношение $f \underset{\mathcal{B}}{\sim} f$ очевидно, в этом случае $\gamma(x) \equiv \equiv 1$. Далее, если $\lim\limits_{\mathcal{B}} \gamma(x) = 1$, то $\lim\limits_{\mathcal{B}} \frac{1}{\gamma(x)} = 1$ и $g(x) = \frac{1}{\gamma(x)} f(x)$. Здесь надо только объяснить, почему можно считать, что $\gamma(x) \neq 0$. Если соотношение $f(x) = \gamma(x)g(x)$ имеет место на элементе $B_1 \in \mathcal{B}$, а соотношение $\frac{1}{2} < |\gamma(x)| < \frac{3}{2}$ — на элементе $B_2 \in \mathcal{B}$, то мы можем взять элемент $B \subset B_1 \cap B_2$, на котором будет выполнено и то и другое. Всюду вне B, если угодно, можно вообще считать, что $\gamma(x) \equiv 1$. Таким образом, действительно $(f \sim g) \Rightarrow (g \sim f)$.

Наконец, если $f(x) = \gamma_1(x)g(x)$ на $B_1 \in \mathcal{B}$ и $g(x) = \gamma_2(x)h(x)$ на $B_2 \in \mathcal{B}$, то на элементе $B \in \mathcal{B}$ базы $\mathcal{B}$ таком, что $B \subset B_1 \cap B_2$, оба эти соотношения выполнены одновременно, поэтому $f(x) = \gamma_1(x)\gamma_2(x)h(x)$ на B. Но $\lim\limits_{\mathcal{B}} \gamma_1(x)\gamma_2(x) = \lim\limits_{\mathcal{B}} \gamma_1(x) \cdot \lim\limits_{\mathcal{B}} \gamma_2(x) = 1$ и тем самым проверено, что $f \underset{\mathcal{B}}{\sim} h$.

Полезно заметить, что поскольку соотношение $\lim\limits_{\mathcal{B}} \gamma(x) = 1$ равносильно тому, что $\gamma(x) = 1 + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{\mathcal{B}} \alpha(x) = 0$, то соотношение $f \underset{\mathcal{B}}{\sim} g$ равносильно тому, что $f(x) = g(x) + \alpha(x)g(x) = g(x) + o(g(x))$ при базе $\mathcal{B}$.

Мы видим, что относительная погрешность $|\alpha(x)| = \left|\frac{f(x) - g(x)}{g(x)}\right|$ приближения функции с помощью функции $g(x)$, эквивалентной $f(x)$ при базе $\mathcal{B}$, есть величина бесконечно малая при базе $\mathcal{B}$.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 35. $x^2 + x = \left(1 + \frac{1}{x}\right) x^2 \sim x^2$ при $x \to \infty$.

Абсолютная величина разности этих функций

$$\left|(x^2 + x) - x^2\right| = |x|$$

стремится к бесконечности, однако относительная погрешность $\frac{|x|}{x^2} = \frac{1}{|x|}$ замены функции $x^2 + x$ на эквивалентную величину x^2 стремится к нулю при $x \to \infty$.

Пример 36. В начале этого пункта мы говорили о знаменитом асимптотическом законе распределения простых чисел. Теперь мы в состоянии записать его точную формулировку:

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + o\left(\frac{x}{\ln x}\right) \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Пример 37. Поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, что можно написать также в виде равенства $\sin x = x + o(x)$ при $x \to 0$.

Пример 38. Покажем, что $\ln(1 + x) \sim x$ при $x \to 0$.

$$◀ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right) = \ln e = 1.$$

Мы воспользовались в первом равенстве тем, что $\log_a(b^\alpha) = \alpha \log_a b$, а во втором тем, что $\lim\limits_{t\to b} \log_a t = \log_a b = \log_a \left(\lim\limits_{t\to b} t\right)$. ▶

Итак, $\ln(1 + x) = x + o(x)$ при $x \to 0$.

Пример 39. Покажем, что $e^x = 1 + x + o(x)$ при $x \to 0$.

$$◀ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1.$$

Мы сделали замену $x = \ln(1 + t)$, $e^x - 1 = t$ и воспользовались тем, что $e^x \to e^0 = 1$ при $x \to 0$, причем $e^x \neq 1$ при $x \neq 0$. Таким образом, на основании теоремы о пределе композиции и результата предыдущего примера утверждение доказано. ▶

Итак, $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$.

Пример 40. Покажем, что $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ при $x \to 0$.

$$\blacktriangleleft \ \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} =$$
$$= \alpha \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \alpha.$$

В этой выкладке мы, предполагая $\alpha \neq 0$, сделали замену $\alpha \ln(1+x) = t$ и воспользовались результатами двух предыдущих примеров.

Если же $\alpha = 0$, то утверждение очевидно. ▶

Таким образом, $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ при $x \to 0$.

При вычислении пределов иногда бывает полезно следующее простое

Утверждение 3. *Если $f \underset{\mathcal{B}}{\sim} \widetilde{f}$, то $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x)g(x) = \lim\limits_{\mathcal{B}} \widetilde{f}(x)g(x)$, если один из этих пределов существует.*

◀ Действительно, коль скоро $f(x) = \gamma(x)\widetilde{f}(x)$ и $\lim\limits_{\mathcal{B}} \gamma(x) = 1$, то

$$\lim_{\mathcal{B}} f(x)g(x) = \lim_{\mathcal{B}} \gamma(x)\widetilde{f}(x)g(x) = \lim_{\mathcal{B}} \gamma(x) \cdot \lim_{\mathcal{B}} \widetilde{f}(x)g(x) = \lim_{\mathcal{B}} \widetilde{f}(x)g(x). \ \blacktriangleright$$

Пример 41.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\sin x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos^2 x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-\sin^2 x)}{x^2} =$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Мы воспользовались тем, что $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$ при $\alpha \to 0$, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, $\frac{1}{\sin\beta} \sim \frac{1}{\beta}$ при $\beta \to 0$ и $\sin^2 x \sim x^2$ при $x \to 0$.

Мы доказали, что в одночленах при вычислении пределов можно заменять функции на им эквивалентные при данной базе. Не следует распространять это правило на суммы и разности функций.

Пример 42. $\sqrt{x^2+x} \sim x$ при $x \to +\infty$, но

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) \neq \lim_{x\to+\infty} (x - x) = 0.$$

В самом деле,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Отметим еще следующие широко используемые в анализе правила обращения с символами $o(\cdot)$, $O(\cdot)$.

Утверждение 4. *При данной базе*

a) $o(f) + o(f) = o(f)$;

b) $o(f)$ *есть также* $O(f)$;

c) $o(f) + O(f) = O(f)$;

d) $O(f) + O(f) = O(f)$;

e) *если* $g(x) \neq 0$, *то* $\frac{o(f(x))}{g(x)} = o\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ *и* $\frac{O(f(x))}{g(x)} = O\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$.

Обратите внимание на особенности действий с символами $o(\cdot)$, $O(\cdot)$, вытекающие из смысла этих символов. Например, $2o(f) = o(f)$, или $o(f) + O(f) = O(f)$ (хотя, вообще говоря, $o(f) \neq 0$), или $o(f) = O(f)$, но $O(f) \neq o(f)$. Здесь знак равенства всюду имеет значение слова «есть». Сами символы $o(\cdot)$, $O(\cdot)$ обозначают не столько функцию, сколько указание на характер ее асимптотического поведения, которым, кстати, обладают сразу многие функции, например, и f, и $2f$, и т. п.

◀ a) После сделанного уточнения утверждение a) перестает выглядеть неожиданным. Первый символ $o(f)$ в нем означает некоторую функцию вида $\alpha_1(x)f(x)$, где $\lim\limits_{\mathcal{B}} \alpha_1(x) = 0$. Второй символ $o(f)$, который можно (или нужно) было бы снабдить пометкой, отличающей его от первого, означает некоторую функцию вида $\alpha_2(x)f(x)$, где $\lim\limits_{\mathcal{B}} \alpha_2(x) = 0$. Тогда $\alpha_1(x)f(x) + \alpha_2(x)f(x) = (\alpha_1(x) + \alpha_2(x))f(x) = \alpha_3(x)f(x)$, где $\lim\limits_{\mathcal{B}} \alpha_3(x) = 0$.

b) Следует из того, что всякая функция, имеющая предел, является финально ограниченной.

c) Следует из b) и d).

d) Следует из того, что сумма финально ограниченных функций финально ограничена.

e) $\frac{o(f(x))}{g(x)} = \frac{\alpha(x)f(x)}{g(x)} = \alpha(x)\frac{f(x)}{g(x)} = o\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$.

Аналогично проверяется и вторая часть утверждения e). ▶

Пользуясь этими правилами и эквивалентностями, полученными в примере 40, теперь можно следующим прямым методом искать предел из примера 42:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+x\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)=\frac{1}{2}.$$

Несколько позже мы докажем следующие важные соотношения, которые уже сейчас стоит запомнить как таблицу умножения:

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots \qquad \text{при}\quad x\in\mathbb{R},$$
$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\ldots+\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+\ldots \qquad \text{при}\quad x\in\mathbb{R},$$
$$\sin x=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\ldots+\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\ldots \qquad \text{при}\quad x\in\mathbb{R},$$
$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\ldots \qquad \text{при}\quad |x|<1,$$
$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots \qquad \text{при}\quad |x|<1.$$

Эти соотношения, с одной стороны, уже могут служить вычислительными формулами, а с другой стороны, как будет видно, содержат в себе следующие асимптотические формулы, обобщающие формулы, полученные в примерах 37 – 40:

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+O\left(x^{n+1}\right) \qquad \text{при}\quad x\to 0,$$
$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\ldots+\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+O\left(x^{2k+2}\right) \qquad \text{при}\quad x\to 0,$$

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + O\left(x^{2k+3}\right) \qquad \text{при} \quad x \to 0,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + O\left(x^{n+1}\right) \qquad \text{при} \quad x \to 0,$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + O\left(x^{n+1}\right) \qquad \text{при} \quad x \to 0.$$

Эти формулы обычно являются наиболее эффективным средством при отыскании пределов элементарных функций. При этом полезно иметь в виду, что $O\left(x^{m+1}\right) = x^{m+1} \cdot O(1) = x^m \cdot x \cdot O(1) = x^m \cdot o(1) = o(x^m)$ при $x \to 0$.

Рассмотрим в заключение несколько примеров, показывающих эти формулы в работе.

Пример 43.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + O\left(x^5\right)\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3!} + O\left(x^2\right)\right) = \frac{1}{3!}.$$

Пример 44. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \left(\sqrt[7]{\dfrac{x^3+x}{1+x^3}} - \cos\frac{1}{x}\right) = ?$

Имеем при $x \to \infty$:

$$\frac{x^3+x}{1+x^3} = \frac{1+x^{-2}}{1+x^{-3}} = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^{-1} = \\ = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^6}\right)\right) = 1 + \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

$$\sqrt[7]{\frac{x^3+x}{1+x^3}} = \left(1 + \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)^{1/7} = 1 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

$$\cos\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

откуда получаем

$$\sqrt[7]{\frac{x^3+x}{1+x^3}} - \cos\frac{1}{x} = \frac{9}{14} \cdot \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Таким образом, искомый предел равен

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{9}{14x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)=\frac{9}{14}.$$

Пример 45.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x=\lim_{x\to\infty}\exp\left\{x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-1\right)\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\exp\left\{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\exp\left\{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-x\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right\}=e^{-1/2}.$$

Задачи и упражнения

1. a) Докажите, что существует и притом единственная определенная на $\mathbb{R}$ функция, удовлетворяющая требованиям

$$f(1)=a\quad(a>0,\ a\neq 1),$$
$$f(x_1)\cdot f(x_2)=f(x_1+x_2),$$
$$f(x)\to f(x_0)\quad\text{при}\quad x\to x_0.$$

b) Докажите, что существует и притом единственная определенная на $\mathbb{R}_+$ функция, удовлетворяющая требованиям

$$f(a)=1\quad(a>0,\ a\neq 1),$$
$$f(x_1)+f(x_2)=f(x_1\cdot x_2),$$
$$f(x)\to f(x_0)\quad\text{при}\ \ x_0\in\mathbb{R}_+\ \ \text{и}\ \ \mathbb{R}_+\ni x\to x_0.$$

Указание. Просмотрите еще раз конструкцию показательной и логарифмической функций, разобранную в примере 10.

2. a) Установите взаимно однозначное соответствие $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ так, чтобы для любых $x,y\in\mathbb{R}$ было $\varphi(x+y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$, т. е. чтобы операции сложения в прообразе (в $\mathbb{R}$) отвечала операция умножения в образе (в $\mathbb{R}_+$). Наличие такого отображения означает, что группы $(\mathbb{R},+)$ и $(\mathbb{R}_+,\cdot)$ как алгебраические объекты одинаковы, или, как говорят, *изоморфны*.

b) Докажите, что группы $(\mathbb{R},+)$ и $(\mathbb{R}\setminus 0_+,\cdot)$ не изоморфны.

3. Найдите пределы

a) $\lim\limits_{x\to+0} x^x$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$.

4. Покажите, что

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln n+c+o(1) \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

где c — постоянная. (Число $c=0{,}57721\ldots$ называется постоянной Эйлера.)

Указание. Можно воспользоваться тем, что

$$\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

5. Покажите, что

a) если два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ с положительными членами таковы, что $a_n \sim b_n$ при $n\to\infty$, то эти ряды сходятся или расходятся одновременно;

b) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{1}{n^p}$ сходится только при $p>1$.

6. Покажите, что

a) если $a_n \geqslant a_{n+1} > 0$ при любом $n\in\mathbb{N}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n\to\infty$;

b) если $b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то всегда можно построить сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ такой, что $b_n = o(a_n)$ при $n\to\infty$;

c) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_n=\sqrt{\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k}-\sqrt{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k}$, тоже сходится, причем $a_n=o(A_n)$ при $n\to\infty$;

d) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами расходится, то ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} A_n$, где $A_n=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}-\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k}$, тоже расходится, причем $A_n=o(a_n)$ при $n\to\infty$.

Из c) и d) следует, что никакой сходящийся (расходящийся) ряд не может служить универсальным эталоном для установления сходимости (расходимости) других рядов путем сравнения с ним.

7. Покажите, что

a) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$, где $a_n > 0,\ n \in \mathbb{N}$, сходится тогда и только тогда, когда последовательность $\{\Pi_n = a_1 \dots a_n\}$ имеет отличный от нуля предел;

b) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\alpha_n)$, где $|\alpha_n| < 1$, абсолютно сходится тогда и только тогда, когда сходится абсолютно ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

Указание. См. задачу 5a).

8. Говорят, что бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty} e_k$ сходится, если последовательность чисел $\Pi_n = \prod\limits_{k=1}^{n} e_k$ имеет конечный, отличный от нуля предел Π. Тогда полагают $\Pi = \prod\limits_{k=1}^{\infty} e_k$.

Покажите, что

a) если бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} e_n$ сходится, то $e_n \to 1$ при $n \to \infty$;

b) если $\forall n \in \mathbb{N}\ \ (e_n > 0)$, то бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} e_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln e_n$;

c) если $e_n = 1 + \alpha_n$ и все α_n одного знака, то бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

9. a) Найдите $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + x^{2n-1})$.

b) Найдите $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n}$ и докажите следующую формулу Виета[1]:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots}.$$

c) Найдите функцию $f(x)$, если

$$f(0) = 1,$$
$$f(2x) = \cos^2 x \cdot f(x),$$
$$f(x) \to f(0) \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Указание: $x = 2 \cdot \frac{x}{2}$.

[1] Ф. Виет (1540 – 1603) — французский математик, один из создателей современной алгебраической символики.

10. Покажите, что

a) если $\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \beta_n$, $n = 1, 2, \ldots$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$ абсолютно сходится, то существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$;

b) если $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + \alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$, причем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ абсолютно сходится, то $a_n \sim \frac{c}{n^p}$ при $n \to \infty$;

c) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ таков, что $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + \alpha_n$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ абсолютно сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$ (*признак Гаусса абсолютной сходимости ряда*).

11. Покажите, что для любой последовательности $\{a_n\}$ с положительными членами

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} \right)^n \geqslant e$$

и эта оценка неулучшаема.

ГЛАВА IV

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Основные определения и примеры

1. Непрерывность функции в точке. Пусть f — вещественнозначная функция, определенная в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$.

Описательно говоря, функция f *непрерывна* в точке a, если ее значения $f(x)$ по мере приближения аргумента x к точке a приближаются к значению $f(a)$ функции в самой точке a.

Уточним теперь это описание понятия непрерывности функции в точке.

Определение 0. Функция f называется *непрерывной в точке* a, если для любой окрестности $V(f(a))$ значения $f(a)$ функции в точке a найдется такая окрестность $U(a)$ точки a, образ которой при отображении f содержится в $V(f(a))$.

Приведем формально-логическую запись этого определения вместе с двумя его вариациями, часто используемыми в анализе:

$$\big(f \text{ непрерывна в точке } a\big) := \big(\forall V(f(a))\ \exists U(a)\ \ (f(U(a)) \subset V(f(a)))\big),$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists U(a)\ \forall x \in U(a)\ \ (|f(x) - f(a)| < \varepsilon),$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Эквивалентность этих формулировок для вещественнозначных функций следует из того, что (как уже неоднократно отмечалось) любая окрестность точки содержит некоторую симметричную окрестность этой точки.

Например, если по любой ε-окрестности $V^\varepsilon(f(a))$ точки $f(a)$ можно подобрать окрестность $U(a)$ точки a так, что $\forall x \in U(a)$ $(|f(x) - f(a)| < \varepsilon)$, т. е. $f(U(a)) \subset V^\varepsilon(f(a))$, то и для любой окрестности $V(f(a))$ тоже можно подобрать соответствующую окрестность точки a. Действительно, достаточно сначала взять $V^\varepsilon(f(a)) \subset V(f(a))$, а затем по $V^\varepsilon(f(a))$ найти $U(a)$. Тогда $f(U(a)) \subset V^\varepsilon(f(a)) \subset V(f(a))$.

Таким образом, если функция непрерывна в точке a в смысле второго из приведенных определений, то она непрерывна в ней и в смысле исходного определения. Обратное очевидно, поэтому эквивалентность первых двух формулировок проверена.

Дальнейшую проверку оставляем читателю.

Чтобы не отвлекаться от основного определяемого понятия непрерывности функции в точке, мы сначала для простоты предположили, что функция f определена в целой окрестности точки a. Рассмотрим теперь общий случай.

Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ — вещественнозначная функция, определенная на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}$, и a — точка области определения функции.

Определение 1. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной в точке* $a \in E$, если для любой окрестности $V(f(a))$ значения $f(a)$ функции, принимаемого ею в точке a, найдется такая окрестность $U_E(a)$ точки a в множестве[1] E, образ которой $f(U_E(a))$ содержится в $V(f(a))$.

Итак,

$$\boxed{\begin{aligned}&\big(f\colon E \to \mathbb{R} \text{ непрерывна в } a \in E\big) := \\ &\qquad = \big(\forall V(f(a))\ \exists U_E(a)\ \ (f(U_E(a)) \subset V(f(a)))\big).\end{aligned}}$$

Разумеется, определение 1 тоже можно записать в $\varepsilon - \delta$-форме, рассмотренной выше. Там, где нужны числовые оценки, это бывает полезно и даже необходимо.

Запишем эти вариации определения 1:

$$\begin{aligned}&(f\colon E \to \mathbb{R} \text{ непрерывна в } a \in E) := \\ &\qquad = \big(\forall \varepsilon > 0\ \exists U_E(a)\ \forall x \in U_E(a)\ \ (|f(x) - f(a)| < \varepsilon)\big),\end{aligned}$$

или

[1] Напомним, что $U_E(a) = E \cap U(a)$.

$$\big(f\colon E \to \mathbb{R} \text{ непрерывна в } a \in E\big) := \\ = \big(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ \ (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)\big).$$

Обсудим теперь детально понятие непрерывности функции в точке.

1° Если a — изолированная, т. е. не предельная, точка множества E, то найдется такая окрестность $U(a)$ точки a, в которой нет других точек множества E, кроме самой точки a. В этом случае $U_E(a) = a$, и поэтому $f(U_E(a)) = f(a) \subset V(f(a))$, какова бы ни была окрестность $V(f(a))$. Таким образом, в любой изолированной точке области определения функция, очевидно, непрерывна. Но это вырожденный случай.

2° Содержательная часть понятия непрерывности относится, таким образом, к тому случаю, когда $a \in E$ и a — предельная точка множества E. Из определения 1 видно, что

$$(f\colon E \to \mathbb{R} \textit{ непрерывна } \text{в } a \in E,\ \textit{где } a \textit{ — предельная точка } E) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\lim_{E \ni x \to a} f(x) = f(a)\right).$$

◀ В самом деле, если a — предельная точка E, то определена база $E \ni x \to a$ проколотых окрестностей $\overset{\circ}{U}_E(a) = U_E(a) \setminus a$ точки a.

Если f непрерывна в точке a, то, найдя для окрестности $V(f(a))$ окрестность $U_E(a)$ такую, что $f(U_E(a)) \subset V(f(a))$, мы одновременно будем иметь $f(\overset{\circ}{U}_E(a)) \subset V(f(a))$ и в силу определения предела, таким образом, $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = f(a)$.

Обратно, если известно, что $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = f(a)$, то по окрестности $V(f(a))$ найдем проколотую окрестность $\overset{\circ}{U}_E(a)$ так, что $f(\overset{\circ}{U}_E(a)) \subset \subset V(f(a))$. Но поскольку $f(a) \in V(f(a))$, то тогда и $f(U_E(a)) \subset V(f(a))$. В силу определения 1 это означает, что функция f непрерывна в точке $a \in E$. ▶

3° Поскольку соотношение $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = f(a)$ можно переписать в форме

$$\boxed{\lim_{E \ni x \to a} f(x) = f\left(\lim_{E \ni x \to a} x\right),}$$

мы теперь приходим к полезному заключению, что непрерывные в точке функции (операции) и только они перестановочны с операцией предельного перехода. Это означает, что то число $f(a)$, которое получается при выполнении операции f над числом a, можно сколь угодно точно аппроксимировать значениями, получаемыми при выполнении операции f над соответствующими заданной точности приближенными значениями x величины a.

4° Если заметить, что при $a \in E$ окрестности $U_E(a)$ точки a образуют базу $\mathcal{B}_a$ (независимо от того, является ли a предельной или изолированной точкой множества), то мы увидим, что само определение 1 непрерывности функции в точке a совпадает с определением того, что число $f(a)$ — значение функции в точке a — является пределом функции f по этой базе, т. е.

$$(f\colon E \to \mathbb{R} \text{ непрерывна в } a \in E) \Leftrightarrow \left(\lim_{\mathcal{B}_a} f(x) = f(a)\right).$$

5° Заметим, однако, что если $\lim\limits_{\mathcal{B}_a} f(x)$ существует, то, поскольку $a \in U_E(a)$ для любой окрестности $U_E(a)$, этот предел неизбежно оказывается равным $f(a)$.

Таким образом, непрерывность функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ в точке $a \in E$ равносильна существованию предела этой функции по базе $\mathcal{B}_a$ окрестностей (но не проколотых окрестностей) $U_E(a)$ точки a в E.

Итак,

$$(f\colon E \to \mathbb{R} \text{ непрерывна в } a \in E) \Leftrightarrow \left(\exists \lim_{\mathcal{B}_a} f(x)\right).$$

6° В силу критерия Коши существования предела теперь можно сказать, что функция непрерывна в точке $a \in E$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $U_E(a)$ точки a в E такая, на которой колебание $\omega(f; U_E(a))$ функции меньше ε.

Определение 2. Величина $\omega(f; a) = \lim\limits_{\delta \to +0} \omega(f; U_E^\delta(a))$ (где $U_E^\delta(a)$ есть δ-окрестность точки a в множестве E) называется *колебанием функции* $f\colon E \to \mathbb{R}$ *в точке* a.

Формально символ $\omega(f; X)$ уже занят, он обозначает колебание функции на множестве X. Однако мы никогда не будем рассматривать колебание функции на множестве, состоящем из одной точки (это колебание, очевидно, равно нулю); поэтому символ $\omega(f; a)$, где a — точка, всегда будет обозначать то понятие колебания функции в точке, которое мы только что ввели определением 2.

Колебание функции на подмножестве не превышает колебания функции на множестве, поэтому величина $\omega(f; U_E^\delta(a))$ есть неубывающая функция от δ. Поскольку она неотрицательна, то либо она имеет конечный предел при $\delta \to +0$, либо при любом $\delta > 0$ выполнено $\omega(f; U_E^\delta(a)) = +\infty$. В последнем случае естественно полагают $\omega(f; a) = +\infty$.

7° Используя определение 2, сказанное в 6° теперь можно резюмировать так: функция непрерывна в точке тогда и только тогда, когда ее колебание в этой точке равно нулю. Зафиксируем это:

$$(f\colon E \to \mathbb{R} \text{ непрерывна в } a \in E) \Leftrightarrow (\omega(f; a) = 0).$$

Определение 3. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной на множестве* E, если она непрерывна в каждой точке множества E.

Совокупность всех вещественнозначных функций, непрерывных на множестве E, условимся обозначать символом $C(E; \mathbb{R})$ или, короче, $C(E)$.

Мы обсудили понятие непрерывности функции.

Рассмотрим теперь некоторые примеры.

Пример 1. Если $f\colon E \to \mathbb{R}$ — постоянная функция, то $f \in C(E)$. Это утверждение очевидно, ибо $f(E) = c \subset V(c)$, какова бы ни была окрестность $V(c)$ точки $c \in \mathbb{R}$.

Пример 2. Функция $f(x) = x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Действительно, для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ имеем $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$, как только $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

Пример 3. Функция $f(x) = \sin x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

В самом деле, для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ имеем

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\cos\frac{x + x_0}{2}\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| = |x - x_0| < \varepsilon,$$

как только $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

Мы воспользовались неравенством $|\sin x| \leqslant |x|$, доказанным в гл. III, § 2, п. 2d, пример 9.

Пример 4. Функция $f(x) = \cos x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Действительно, как и в предыдущем примере, для любой точки $x_0 \in \in \mathbb{R}$ имеем

$$|\cos x - \cos x_0| = \left| -2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2} \right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant |x - x_0| < \varepsilon,$$

как только $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

Пример 5. Функция $f(x) = a^x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Действительно, по свойству 3) показательной функции (см. гл. III, § 2, п. 2d, пример 10a) в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ имеем

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0},$$

что, как мы теперь знаем, равносильно непрерывности функции a^x в точке x_0.

Пример 6. Функция $f(x) = \log_a x$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \in \mathbb{R}_+$ области определения $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

В самом деле, по свойству 3) логарифмической функции (см. гл. III, § 2, п. 2d, пример 10b) в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}_+$ имеем

$$\lim_{\mathbb{R}_+ \ni x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0,$$

что равносильно непрерывности функции $\log_a x$ в точке x_0.

Попробуем, кстати, по заданному $\varepsilon > 0$ найти окрестность $U_{\mathbb{R}_+}(x_0)$ точки x_0 так, чтобы в любой точке $x \in U_{\mathbb{R}_+}(x_0)$ иметь

$$|\log_a x - \log_a x_0| < \varepsilon.$$

Это неравенство равносильно соотношению

$$-\varepsilon < \log_a \frac{x}{x_0} < \varepsilon.$$

Пусть для определенности $a > 1$; тогда последнее соотношение равносильно условию

$$x_0 a^{-\varepsilon} < x < x_0 a^{\varepsilon}.$$

Интервал $]x_0a^{-\varepsilon}, x_0a^{\varepsilon}[$ и есть искомая окрестность точки x_0. Полезно обратить внимание на то, что эта окрестность зависит как от величины ε, так и от самой точки x_0, чего не наблюдалось в примерах 1–4.

Пример 7. Любая последовательность $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ есть функция, непрерывная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел, поскольку каждая точка множества $\mathbb{N}$ является его изолированной точкой.

2. Точки разрыва. Для того чтобы лучше освоиться с понятием непрерывности, выясним, что происходит с функцией в окрестности той точки, где она не является непрерывной.

Определение 4. Если функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ не является непрерывной в некоторой точке множества E, то эта точка называется *точкой разрыва* функции f.

Построив отрицание к утверждению «функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in E$», мы получаем следующую запись определения того, что a — точка разрыва функции f:

$$(a \in E \text{ — точка разрыва функции } f) := \\ = \big(\exists V(f(a))\ \forall U_E(a)\ \exists x \in U_E(a)\ \ (f(x) \notin V(f(a)))\big).$$

Иными словами, $a \in E$ — точка разрыва функции $f\colon E \to \mathbb{R}$, если найдется такая окрестность $V(f(a))$ значения $f(a)$ функции в точке a, что в любой окрестности $U_E(a)$ точки a в множестве E найдется точка $x \in U_E(a)$, образ которой не содержится в $V(f(a))$.

В ε–δ-форме это же определение выглядит так:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in E\ \ (|x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| > \varepsilon).$$

Рассмотрим примеры.

Пример 8. Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ постоянна и, значит, непрерывна в окрестности любой точки $a \in \mathbb{R}$, отличной от нуля. В любой же окрестности нуля ее колебание равно 2. Значит, 0 — точка разрыва функции $\operatorname{sgn} x$. Заметим, что функция имеет в точке 0 и предел слева $\lim\limits_{x\to -0} \operatorname{sgn} x = -1$, и предел справа $\lim\limits_{x\to +0} \operatorname{sgn} x = 1$, но, во-первых, они не совпадают между собой, а во-вторых, ни один из них не совпадает со значением $\operatorname{sgn} 0 = 0$ функции в точке 0. Это прямая проверка того, что 0 — точка разрыва функции.

Пример 9. Функция $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$ имеет предел $\lim\limits_{x\to 0} |\operatorname{sgn} x| = 1$ при $x \to 0$, но $f(0) = |\operatorname{sgn} 0| = 0$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$ и 0 — точка разрыва функции.

Заметим, однако, что в данном случае, изменяя значение функции в точке 0 и полагая его равным 1, мы получим функцию, непрерывную в точке 0, т. е. устраним разрыв.

Определение 5. Если точка разрыва $a \in E$ функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ такова, что существует непрерывная функция $\tilde{f}\colon E \to \mathbb{R}$ такая, что $f|_{E\setminus a} = \tilde{f}|_{E\setminus a}$, то a называется *точкой устранимого разрыва функции* $f\colon E \to \mathbb{R}$.

Таким образом, точка устранимого разрыва характеризуется тем, что существует предел $\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x) = A$, но $A \neq f(a)$, и достаточно положить

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in E, \quad x \neq a, \\ A & \text{при } x = a, \end{cases}$$

как мы уже получим непрерывную в точке a функцию $\tilde{f}\colon E \to \mathbb{R}$.

Пример 10. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

разрывна в точке 0. При этом она даже не имеет предела при $x \to 0$, ибо, как было показано в гл. III, § 2, п. 1, пример 5, не существует предела $\lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$. График функции $\sin \frac{1}{x}$ изображен на рис. 12.

Примеры 8, 9 и 10 поясняют следующую терминологию.

Определение 6. Точка $a \in E$ называется точкой разрыва *первого рода* для функции $f\colon E \to \mathbb{R}$, если существуют пределы[1)]

$$\lim_{E\ni x\to a-0} f(x) =: f(a-0), \qquad \lim_{E\ni x\to a+0} f(x) =: f(a+0),$$

[1)] Если a — точка разрыва, то a — предельная точка множества E. Однако может случиться, что все точки множества E в некоторой окрестности точки a лежат по одну сторону от точки a. В этом случае рассматривается только один из указанных в определении пределов.

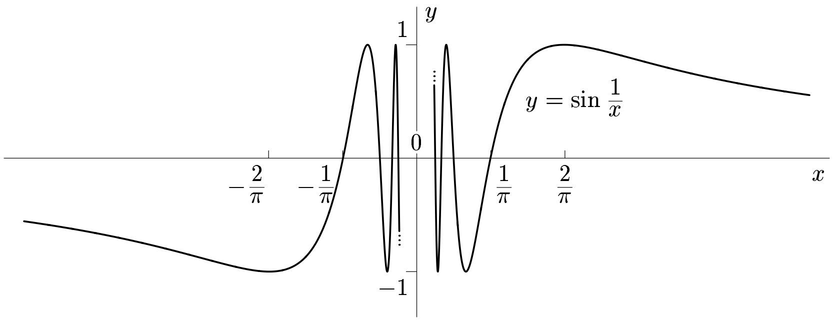


Рис. 12.

но по крайней мере один из этих пределов не совпадает со значением $f(a)$ функции в точке a.

Определение 7. Если $a \in E$ — точка разрыва функции $f\colon E \to \to \mathbb{R}$ и в этой точке не существует по меньшей мере один из пределов, указанных в определении 6, то a называется точкой разрыва *второго рода*.

Таким образом, имеется в виду, что всякая точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва первого рода, является точкой разрыва второго рода.

Приведем еще два классических примера.

Пример 11. Функция

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

называется *функцией Дирихле*[1)].

Эта функция разрывна во всех точках, причем, очевидно, все ее точки разрыва — второго рода, так как на любом интервале есть как рациональные, так и иррациональные числа.

[1)] П. Г. Дирихле (1805 – 1859) — крупный немецкий математик-аналитик, занявший пост ординарного профессора Геттингенского университета после смерти К. Гаусса (1855).

Пример 12. Рассмотрим *функцию Римана*[1)]

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \text{ где } \frac{m}{n} \text{ — несократимая дробь}, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Заметим, что, каковы бы ни были точка $a \in \mathbb{R}$ и ее ограниченная окрестность $U(a)$ и каково бы ни было число $N \in \mathbb{N}$, в $U(a)$ имеется только конечное число рациональных чисел $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, таких, что $n < N$.

Уменьшая окрестность, можно, таким образом, считать, что знаменатели всех рациональных чисел, попадающих в нее (кроме, быть может, числа a, если $a \in \mathbb{Q}$), уже больше чем N. Таким образом, в любой точке $x \in \overset{\circ}{U}(a)$ $|\mathcal{R}(x)| < 1/N$.

Мы показали тем самым, что в любой точке $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$\lim_{x \to a} \mathcal{R}(x) = 0.$$

Значит, функция Римана непрерывна в любой иррациональной точке. В остальных точках, т. е. в точках $x \in \mathbb{Q}$, функция разрывна, и все эти точки являются точками разрыва первого рода.

§ 2. Свойства непрерывных функций

1. Локальные свойства. *Локальными* называют такие свойства функций, которые определяются поведением функции в сколь угодно малой окрестности точки области определения.

Таким образом, сами локальные свойства характеризуют поведение функции в каком-то предельном отношении, когда аргумент функции стремится к исследуемой точке. Например, непрерывность функции в некоторой точке области определения, очевидно, есть локальное свойство функции.

Укажем основные локальные свойства непрерывных функций.

Теорема 1. *Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ — функция, непрерывная в точке $a \in E$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1° *функция f ограничена в некоторой окрестности $U_E(a)$ точки a*;

[1)] Б. Ф. Риман (1826 – 1866) — выдающийся немецкий математик, фундаментальные работы которого легли в основу целых областей современной геометрии и анализа.

2° *если* $f(a) \neq 0$, *то в некоторой окрестности* $U_E(a)$ *точки* a *все значения функции положительны или отрицательны вместе с* $f(a)$;

3° *если функция* $g\colon U_E(a) \to \mathbb{R}$ *определена в некоторой окрестности точки* a *и, как и* $f\colon E \to \mathbb{R}$, *непрерывна в самой точке* a, *то функции*:

a) $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$,

b) $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$,

c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ (*при условии, что* $g(x) \neq 0$)

определены в некоторой окрестности точки a *и непрерывны в точке* a;

4° *если функция* $g\colon Y \to \mathbb{R}$ *непрерывна в точке* $b \in Y$, *а функция* f *такова, что* $f\colon E \to Y$, $f(a) = b$ *и* f *непрерывна в точке* a, *то композиция* $(g \circ f)$ *определена на* E *и также непрерывна в точке* a.

◄ Для доказательства теоремы достаточно вспомнить (см. § 1), что непрерывность функции f или g в некоторой точке a области определения равносильна тому, что предел этой функции по базе $\mathcal{B}_a$ окрестностей точки a существует и равен значению функции в самой точке a: $\lim\limits_{\mathcal{B}_a} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{\mathcal{B}_a} g(x) = g(a)$.

Таким образом, утверждения 1°, 2°, 3° теоремы 1 непосредственно вытекают из определения непрерывности функции в точке и соответствующих свойств предела функции.

В пояснении нуждается только то, что отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ в самом деле определено в некоторой окрестности $\tilde{U}_E(a)$ точки a. Но, по условию, $g(a) \neq 0$ и в силу утверждения 2° теоремы найдется окрестность $\tilde{U}_E(a)$, в любой точке которой $g(x) \neq 0$, т. е. $\frac{f(x)}{g(x)}$ определено в $\tilde{U}_E(a)$.

Утверждение 4° теоремы 1 является следствием теоремы о пределе композиции, в силу которой

$$\lim_{\mathcal{B}_a} (g \circ f)(x) = \lim_{\mathcal{B}_b} g(y) = g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a),$$

что равносильно непрерывности $(g \circ f)$ в точке a.

Однако для применения теоремы о пределе композиции нужно проверить, что для любого элемента $U_Y(b)$ базы $\mathcal{B}_b$ найдется элемент $U_E(a)$ базы $\mathcal{B}_a$ такой, что $f(U_E(a)) \subset U_Y(b)$. Но в самом деле, если $U_Y(b) = Y \cap U(b)$, то по определению непрерывности функции $f\colon E \to Y$ в точке a для окрестности $U(b) = U(f(a))$ найдется окрестность $U_E(a)$ точки a в множестве E такая, что $f(U_E(a)) \subset U(f(a))$. Поскольку f

действует из E в Y, то $f(U_E(a)) \subset Y \cap U(f(a)) = U_Y(b)$ и мы проверили законность применения теоремы о пределе композиции. ►

Пример 1. Алгебраический многочлен $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ является функцией, непрерывной на $\mathbb{R}$.

Действительно, из пункта 3° теоремы 1 по индукции следует, что сумма и произведение конечного числа непрерывных в некоторой точке функций есть функция непрерывная в этой точке. Мы проверили в примерах 1 и 2 § 1, что постоянная функция и функции $f(x) = x$ непрерывны на $\mathbb{R}$. Тогда на $\mathbb{R}$ непрерывны и функции $ax^m = a \cdot \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ раз}}$, а следовательно, и полином $P(x)$.

Пример 2. Рациональная функция $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ — отношение полиномов — непрерывна всюду, где она определена, т. е. где $Q(x) \neq 0$. Это следует из примера 1 и утверждения 3° теоремы 1.

Пример 3. Композиция конечного числа непрерывных функций непрерывна в любой точке области своего определения. Это по индукции вытекает из утверждения 4° теоремы 1. Например, функция $e^{\sin^2(\ln|\cos x|)}$ непрерывна всюду на $\mathbb{R}$, за исключением точек $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, где она не определена.

2. Глобальные свойства непрерывных функций. *Глобальным* свойством функции, описательно говоря, называется свойство, связанное со всей областью определения функции.

Теорема 2 (теорема Больцано – Коши о промежуточном значении). *Если функция, непрерывная на отрезке, принимает на его концах значения разных знаков, то на отрезке есть точка, в которой функция обращается в нуль.*

В логической символике эта теорема имеет следующую запись[1]:

$$(f \in C[a,b]) \wedge (f(a) \cdot f(b) < 0) \Rightarrow \exists c \in [a,b] \ \ (f(c) = 0).$$

◄ Делим отрезок $[a,b]$ пополам. Если в точке деления функция не равна нулю, то на концах одного из двух полученных в результате деления отрезков функция снова принимает значения разных знаков. С этим

[1] Напомним, что символ $C(E)$ обозначает совокупность всех функций, непрерывных на множестве E. В случае $E = [a,b]$ вместо $C([a,b])$ часто пишут сокращенно $C[a,b]$.

отрезком поступаем теперь так же, как и с исходным отрезком $[a, b]$, т. е. делим его пополам, и продолжаем процесс дальше.

Тогда мы либо на каком-то шаге попадем в точку $c \in [a, b]$, где $f(c) = 0$, либо получим последовательность $\{I_n\}$ вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю и на концах которых f принимает значения разных знаков. В последнем случае на основании леммы о вложенных отрезках найдется единственная точка $c \in [a, b]$, общая для всех этих отрезков. По построению существуют две последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ концов отрезков I_n такие, что $f(x'_n) < 0$, $f(x''_n) > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} x''_n = c$. По свойствам предела и определению непрерывности получаем $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = f(c) \leqslant 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = f(c) \geqslant 0$. Таким образом, $f(c) = 0$. ►

Замечания к теореме 2. 1° Доказательство теоремы доставляет простейший алгоритм отыскания корня уравнения $f(x) = 0$ на отрезке, в концах которого непрерывная функция имеет значения разных знаков.

2° Теорема 2, таким образом, утверждает, что при непрерывном изменении нельзя перейти от положительных значений к отрицательным или наоборот, не приняв по дороге значения нуль.

3° К описательным высказываниям типа 2° следует относиться с разумной осторожностью, поскольку в них обычно подразумевается больше, чем высказывается. Рассмотрим, например, функцию, равную -1 на отрезке $[0, 1]$ и равную 1 на отрезке $[2, 3]$. Ясно, что эта функция непрерывна на области своего определения, принимает там значения разных знаков, но нигде не обращается в нуль. Это замечание показывает, что свойство непрерывной функции, выраженное теоремой 2, действительно проистекает от некоторого свойства ее области определения (которое, как впоследствии выяснится, состоит в том, что это множество должно быть *связным*).

Следствие теоремы 2. *Если функция φ непрерывна на интервале и в каких-то точках a и b интервала принимает значения $\varphi(a) = A$ и $\varphi(b) = B$, то для любого числа C, лежащего между A и B, найдется точка c, лежащая между точками a и b, в которой $\varphi(c) = C$.*

◄ Отрезок I с концами a, b лежит в нашем интервале, поэтому функция $f(x) = \varphi(x) - C$ определена, непрерывна на I и, поскольку $f(a) \cdot f(b) = (A - C)(B - C) < 0$, по теореме 2 между a и b найдется точка c, в которой $f(c) = \varphi(c) - C = 0$. ►

Теорема 3 (теорема Вейерштрасса о максимальном значении). *Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на нем. При этом на отрезке есть точка, где функция принимает максимальное значение, и есть точка, где она принимает минимальное значение.*

◀ Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция на отрезке $E = [a, b]$. В силу локальных свойств непрерывной функции (см. теорему 1) для любой точки $x \in E$ найдется окрестность $U(x)$ такая, что на множестве $U_E(x) = E \cap U(x)$ функция ограничена. Совокупность таких окрестностей $U(x)$, построенных для всех точек $x \in E$, образует покрытие отрезка $[a, b]$ интервалами, из которого по лемме о конечном покрытии можно извлечь конечную систему $U(x_1), \ldots, U(x_n)$ интервалов, покрывающих в совокупности отрезок $[a, b]$. Поскольку на множестве $E \cap U(x_k) = U_E(x_k)$ функция ограничена, т. е. $m_k \leqslant f(x) \leqslant M_k$, где $m_k, M_k \in \mathbb{R}$ и $x \in U_E(x_k)$, то в любой точке $x \in E = [a, b]$ имеем

$$\min\{m_1, \ldots, m_n\} \leqslant f(x) \leqslant \max\{M_1, \ldots, M_n\}.$$

Ограниченность функции на отрезке $[a, b]$ установлена.

Пусть теперь $M = \sup\limits_{x \in E} f(x)$. Предположим, что в любой точке $x \in E$ $(f(x) < M)$. Тогда непрерывная на E функция $M - f(x)$ нигде на E не обращается в нуль, хотя (в силу определения M) может принимать значения, сколь угодно близкие к нулю. Тогда функция $\frac{1}{M - f(x)}$, с одной стороны, в силу локальных свойств непрерывных функций, непрерывна на E, а с другой — не ограничена на E, что противоречит уже доказанной ограниченности функции, непрерывной на отрезке.

Итак, существует точка $x_M \in [a, b]$, в которой $f(x_M) = M$.

Аналогичным образом, рассмотрев $m = \inf\limits_{x \in E} f(x)$ и вспомогательную функцию $\frac{1}{f(x) - m}$, докажем, что существует точка $x_m \in [a, b]$, в которой $f(x_m) = m$. ▶

Заметим, что, например, функции $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$ непрерывны на интервале $E =]0, 1[$, но f_1 не имеет на E ни максимального, ни минимального значений, а функция f_2 не ограничена на E. Таким образом, выраженные теоремой 3 свойства непрерывной функции также связаны с некоторым свойством области определения, а именно с тем, что из покрытия множества E окрестностями его точек можно извлечь конечное покрытие. Такие множества мы впоследствии назовем *компактами.*

Прежде чем перейти к следующей теореме, дадим

Определение 1. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной* на множестве $E \subset \mathbb{R}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для любых точек $x_1, x_2 \in E$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$, выполнено $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Короче,

$$\bigl(f\colon E \to \mathbb{R} \text{ равномерно непрерывна}\bigr) := \\ = \bigl(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_1 \in E \ \forall x_2 \in E \quad (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)\bigr).$$

Обсудим понятие равномерной непрерывности.

1° Если функция равномерно непрерывна на множестве, то она непрерывна в любой его точке. Действительно, достаточно в приведенном определении положить $x_1 = x$ и $x_2 = a$ и мы видим, что определение непрерывности функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ в точке $a \in E$ удовлетворено.

2° Непрерывность функции, вообще говоря, не влечет ее равномерную непрерывность.

Пример 4. Уже неоднократно встречавшаяся нам функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ на интервале $]0, 1[= E$ непрерывна. Однако в любой окрестности точки 0 в множестве E функция принимает как значение -1, так и значение 1, поэтому при $\varepsilon < 2$ для нее уже не выполнено условие $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Полезно в этой связи записать в явном виде отрицание свойства функции быть равномерно непрерывной:

$$\bigl(f\colon E \to \mathbb{R} \text{ не является равномерно непрерывной}\bigr) := \\ = \bigl(\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x_1 \in E \ \exists x_2 \in E \quad (|x_1 - x_2| < \delta \wedge \\ \wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon)\bigr).$$

Рассмотренный пример делает наглядным различие между непрерывностью и равномерной непрерывностью функции на множестве. Чтобы указать то место в определении равномерной непрерывности, откуда проистекает это различие, приведем подробную запись того, что значит, что функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ непрерывна на множестве E:

$$\bigl(f\colon E \to \mathbb{R} \text{ непрерывна на } E\bigr) := \\ = \bigl(\forall a \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in E \quad (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)\bigr).$$

Таким образом, здесь число δ выбирается по точке $a \in E$ и числу ε и потому при фиксированном ε может меняться от точки к точке, как это и происходит в случае функции $\sin \frac{1}{x}$, рассмотренной в примере 1, или в случае функции $\log_a x$ или a^x, рассматриваемых на полной области их определения.

В случае же равномерной непрерывности гарантируется возможность выбора δ только по числу $\varepsilon > 0$ так, что во всех точках $a \in E$ из $|x - a| < \delta$ при $x \in E$ будет следовать $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Пример 5. Если функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ не ограничена в любой окрестности фиксированной точки $x_0 \in E$, то она не является равномерно непрерывной.

Действительно, тогда при любом $\delta > 0$ в $\frac{\delta}{2}$-окрестности x_0 найдутся точки $x_1, x_2 \in E$ такие, что $|f(x_1) - f(x_2)| > 1$, хотя $|x_1 - x_2| < \delta$.

Так обстоит дело с функцией $f(x) = \frac{1}{x}$, рассматриваемой на множестве $\mathbb{R} \setminus 0$. В данном случае $x_0 = 0$.

Так обстоит дело и с функцией $\log_a x$, определенной на множестве положительных чисел и неограниченной в окрестности точки $x_0 = 0$.

Пример 6. Функция $f(x) = x^2$, непрерывная на $\mathbb{R}$, не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$.

В самом деле, в точках $x'_n = \sqrt{n+1}$, $x''_n = \sqrt{n}$, где $n \in \mathbb{N}$, имеем $f(x'_n) = n + 1$, $f(x''_n) = n$, поэтому $f(x'_n) - f(x''_n) = 1$. Но

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0,$$

поэтому при любом $\delta > 0$ найдутся точки x'_n, x''_n такие, что $|x'_n - x''_n| < \delta$, в то время как $f(x'_n) - f(x''_n) = 1$.

Пример 7. Функция $f(x) = \sin x^2$, непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}$, не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$. Действительно, в точках $x'_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}(n+1)}$, $x''_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}n}$, где $n \in \mathbb{N}$, имеем $|f(x'_n) - f(x''_n)| = 1$, в то время как $\lim\limits_{n\to\infty} |x'_n - x''_n| = 0$.

После этого обсуждения понятия равномерной непрерывности функции и сопоставления непрерывности и равномерной непрерывности мы можем теперь оценить следующую теорему.

Теорема 4 (теорема Кантора – Гейне о равномерной непрерывности). *Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на этом отрезке.*

Отметим, что в имеющейся литературе эту теорему обычно называют теоремой Кантора. Чтобы избежать разночтений, мы в дальнейшем при ссылках сохраняем это распространенное наименование.

◀ Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ — данная функция; $E = [a,b]$ и $f \in C(E)$. Поскольку f непрерывна в любой точке $x \in E$, то (см. § 1, п. 1, 6°) по $\varepsilon > 0$ можно найти такую δ-окрестность $U^\delta(x)$ точки x, что колебание $\omega(f; U_E^\delta(x))$ функции f на множестве $U_E^\delta(x) = E \cap U^\delta(x)$ точек области определения функции, лежащих в $U^\delta(x)$, окажется меньше ε. Для каждой точки $x \in E$ построим окрестность $U^\delta(x)$, обладающую этим свойством. Величина δ при этом может меняться от точки к точке, поэтому правильнее, хотя и более громоздко, обозначить построенную окрестность символом $U^{\delta(x)}(x)$, но, поскольку весь символ определяется точкой x, можно условиться в следующей сокращенной записи: $U(x) = U^{\delta(x)}(x)$ и $V(x) = U^{\delta(x)/2}(x)$.

Интервалы $V(x)$, $x \in E$, в совокупности образуют покрытие отрезка $E = [a,b]$, из которого по лемме о конечном покрытии можно выделить конечное покрытие $V(x_1), \ldots, V(x_n)$. Пусть $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}\delta(x_1), \ldots, \frac{1}{2}\delta(x_n)\right\}$. Покажем, что для любых точек $x', x'' \in E$ таких, что $|x' - x''| < \delta$, выполнено $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Действительно, поскольку система интервалов $V(x_1), \ldots, V(x_n)$ покрывает E, найдется интервал $V(x_i)$ этой системы, который содержит точку x', т. е. $|x' - x_i| < \frac{1}{2}\delta(x_i)$. Но в таком случае

$$|x'' - x_i| \leqslant |x' - x''| + |x' - x_i| < \delta + \frac{1}{2}\delta(x_i) \leqslant \frac{1}{2}\delta(x_i) + \frac{1}{2}\delta(x_i) = \delta(x_i).$$

Следовательно, $x', x'' \in U_E^{\delta(x_i)}(x_i) = E \cap U^{\delta(x_i)}(x_i)$ и потому $|f(x') - f(x'')| \leqslant \omega(f; U_E^{\delta(x_i)}(x_i)) < \varepsilon$. ▶

Приведенные выше примеры показывают, что теорема Кантора существенно опирается на некоторое свойство области определения функции. Из доказательства видно, что, как и в теореме 3, это свойство состоит в том, что из любого покрытия множества E окрестностями его точек можно извлечь конечное покрытие.

Теперь, после того как теорема 4 доказана, полезно вновь вернуться к разобранным выше примерам непрерывных, но не равномерно непрерывных функций и выяснить, как, например, функция $\sin x^2$, равномерно непрерывная по теореме Кантора на каждом отрезке вещественной прямой, оказывается не равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$. Причина здесь вполне аналогична той, по которой вообще непрерывная функция может оказаться не равномерно непрерывной. На сей раз мы предоставляем читателю возможность самостоятельно разобраться в этом вопросе.

Теперь перейдем к последней теореме параграфа — теореме об обратной функции. Нам предстоит выяснить условия, при которых непрерывная на отрезке вещественнозначная функция имеет обратную и в каких случаях эта обратная функция непрерывна.

Утверждение 1. *Непрерывное отображение $f\colon E \to \mathbb{R}$ отрезка $E = [a,b]$ в $\mathbb{R}$ инъективно в том и только в том случае, когда функция f строго монотонна на отрезке $[a,b]$.*

◀ Если функция f возрастает или убывает на произвольном множестве $E \subset \mathbb{R}$, то отображение $f\colon E \to \mathbb{R}$, очевидно, инъективно: в различных точках множества E функция принимает различные значения.

Таким образом, наиболее содержательная часть утверждения 1 состоит в том, что всякое непрерывное инъективное отображение $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ отрезка осуществляется строго монотонной функцией.

Предположив, что это не так, мы найдем три точки $x_1 < x_2 < x_3$ отрезка $[a,b]$ такие, что $f(x_2)$ не лежит между $f(x_1)$ и $f(x_3)$. В таком случае либо $f(x_3)$ лежит между $f(x_1)$ и $f(x_2)$, либо $f(x_1)$ лежит между $f(x_2)$ и $f(x_3)$. Пусть для определенности имеет место последняя из двух указанных возможностей. По условию функция f непрерывна на отрезке $[x_2,x_3]$, и потому (см. следствие теоремы 2) на нем есть точка x_1' такая, что $f(x_1') = f(x_1)$. Таким образом, $x_1 < x_1'$ и $f(x_1) = f(x_1')$, что несовместимо с инъективностью отображения. Случай, когда $f(x_3)$ лежит между $f(x_1)$ и $f(x_2)$, разбирается аналогично. ▶

Утверждение 2. *Каждая строго монотонная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$, определенная на числовом множестве $X \subset \mathbb{R}$, обладает обратной функцией $f^{-1}\colon Y \to \mathbb{R}$, которая определена на множестве $Y = f(X)$ значений функции f и имеет на Y тот же характер монотонности, какой имеет функция f на множестве X.*

◀ Отображение $f\colon X \to Y = f(X)$ сюръективно, т. е. является отображением *на* множество Y. Пусть для определенности $f\colon X \to Y$ возрастает на X. В этом случае

$$\forall x_1 \in X \ \ \forall x_2 \in X \quad (x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2))\,. \tag{1}$$

Таким образом, отображение $f\colon X \to Y$ в различных точках принимает различные значения, т. е. оно инъективно. Следовательно, $f\colon X \to Y$ биективно, т. е. f — взаимно однозначное отображение X на Y. Значит, определено обратное отображение $f^{-1}\colon Y \to X$, задаваемое формулой $x = f^{-1}(y)$, если $y = f(x)$.

Сопоставляя определение отображения $f^{-1}\colon Y \to X$ с соотношением (1), приходим к соотношению

$$\forall y_1 \in Y \ \ \forall y_2 \in Y \quad \bigl(f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \Leftrightarrow y_1 < y_2\bigr)\,, \tag{2}$$

означающему, что функция f^{-1} возрастает на области своего определения.

Случай, когда $f\colon X \to Y$ убывает на X, очевидно, разбирается аналогично. ►

В соответствии с доказанным утверждением 2, если интересоваться непрерывностью функции, обратной к вещественнозначной функции, полезно исследовать условия непрерывности монотонных функций.

Утверждение 3. *Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$, монотонная на множестве $E \subset \mathbb{R}$, может иметь на E разрывы только первого рода.*

◄ Пусть, для определенности, f — неубывающая функция. Предположим, что $a \in E$ есть точка разрыва функции f. Поскольку a не может быть изолированной точкой множества E, то a — предельная точка по крайней мере для одного из двух множеств $E_a^- = \{x \in E \mid x < a\}$, $E_a^+ = \{x \in E \mid x > a\}$. Поскольку f — неубывающая функция, для любой точки $x \in E_a^-$ имеем $f(x) \leqslant f(a)$ и ограничение $f\big|_{E_a^-}$ функции f на множество E_a^- оказывается неубывающей ограниченной сверху функцией. Тогда существует предел

$$\lim_{E_a^- \ni x \to a} \left(f\big|_{E_a^-}\right)(x) = \lim_{E \ni x \to a-0} f(x) = f(a-0).$$

Аналогично доказывается существование предела $\lim\limits_{E \ni x \to a+0} f(x) = f(a+0)$, если a — предельная точка множества E_a^+.

Случай, когда f — невозрастающая функция, можно либо разобрать, повторив проведенное доказательство, либо, перейдя к функции $-f$, свести дело к уже рассмотренному случаю. ►

Следствие 1. *Если a — точка разрыва монотонной функции*

$f\colon E \to \mathbb{R}$, то по крайней мере один из пределов

$$\lim_{E \ni x \to a-0} f(x) = f(a-0), \qquad \lim_{E \ni x \to a+0} f(x) = f(a+0)$$

определен; по крайней мере в одном из неравенств $f(a-0) \leqslant f(a) \leqslant \leqslant f(a+0)$, если f — неубывающая (или $f(a-0) \geqslant f(a) \geqslant f(a+0)$, если f — невозрастающая) функция, имеет место знак строгого неравенства; в интервале, определяемом этим строгим неравенством, нет ни одного значения функции; указанные интервалы, отвечающие различным точкам разрыва монотонной функции, не пересекаются.

◀ Действительно, если a — точка разрыва, то она предельная для множества E и в силу утверждения 3 является точкой разрыва первого рода. Таким образом, по крайней мере одна из баз $E \ni x \to a-0$, $E \ni x \to a+0$ определена и по ней (а в случае определенности обеих баз — по каждой из них) существует предел функции f. Пусть, для определенности, f — неубывающая функция. Поскольку a — точка разрыва, то по крайней мере в одном из неравенств $f(a-0) \leqslant f(a) \leqslant \leqslant f(a+0)$ на самом деле имеет место строгое неравенство. Поскольку $f(x) \leqslant \lim\limits_{E \ni x \to a-0} f(x) = f(a-0)$, если $x \in E$ и $x < a$, и, аналогично, $f(a+0) \leqslant f(x)$, если $x \in E$ и $a < x$, то интервал, определяемый строгим неравенством $f(a-0) < f(a)$ или $f(a) < f(a+0)$, действительно свободен от значений функции. Пусть a_1, a_2 — две различные точки разрыва функции, и пусть $a_1 < a_2$. Тогда, в силу неубывания функции f, имеем

$$f(a_1-0) \leqslant f(a_1) \leqslant f(a_1+0) \leqslant f(a_2-0) \leqslant f(a_2) \leqslant f(a_2+0).$$

Отсюда следует, что не содержащие значений функции интервалы, отвечающие различным точкам разрыва, не пересекаются. ▶

Следствие 2. *Множество точек разрыва монотонной функции не более чем счетно.*

◀ С каждой точкой разрыва монотонной функции свяжем, по следствию 1, интервал, определяемый значением функции в точке разрыва и одним из пределов функции при приближении аргумента справа или слева к точке разрыва. Эти интервалы не пересекаются. Но на прямой может быть не более чем счетное множество непересекающихся интервалов. В самом деле, в каждом из них можно выбрать по рациональной точке, и тогда множество интервалов окажется равномощным подмножеству счетного множества $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел. Значит, оно само не более чем счетно. Вместе с ним, таким образом, не более чем счетно и равномощное ему по построению множество точек разрыва монотонной функции. ►

Утверждение 4 (критерий непрерывности монотонной функции). *Монотонная функция $f\colon E \to \mathbb{R}$, заданная на отрезке $E = [a, b]$, непрерывна на нем тогда и только тогда, когда множество $f(E)$ ее значений само является отрезком с концами*[1] $f(a)$ *и* $f(b)$.

◄ Если f — непрерывная монотонная функция, то ввиду монотонности f все значения, которые функция принимает на отрезке $[a, b]$, лежат между значениями $f(a)$ и $f(b)$, которые она принимает в концах отрезка. Ввиду непрерывности функции она обязана принимать также и все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$. Таким образом, множество значений функции, монотонной и непрерывной на отрезке $[a, b]$, действительно является отрезком с концами $f(a)$ и $f(b)$.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть f — монотонная на отрезке $[a, b]$ функция. Если она разрывна в некоторой точке $c \in [a, b]$, то по следствию 1 утверждения 3 один из интервалов $]f(c - 0), f(c)[$, $]f(c), f(c+0)[$ заведомо определен и в нем нет значений нашей функции. Но ввиду монотонности функции этот интервал содержится в отрезке с концами $f(a)$, $f(b)$, поэтому если на отрезке $[a, b]$ монотонная функция имеет хотя бы одну точку разрыва, то весь отрезок с концами $f(a)$, $f(b)$ не может лежать в области значений функции. ►

Теорема 5 (теорема об обратной функции). *Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$, строго монотонная на множестве $X \subset \mathbb{R}$, имеет обратную функцию $f^{-1}\colon Y \to \mathbb{R}$, определенную на множестве $Y = f(X)$ значений функции f. Функция $f^{-1}\colon Y \to \mathbb{R}$ монотонна и имеет на Y тот же вид монотонности, какой имеет функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ на множестве X.*

Если, кроме того, X есть отрезок $[a, b]$ и функция f непрерывна на нем, то множество $Y = f(X)$ есть отрезок с концами $f(a)$, $f(b)$ и функция $f^{-1}\colon Y \to \mathbb{R}$ непрерывна на нем.

◄ Утверждение теоремы о том, что в случае $X = [a, b]$ и непрерывности f множество $Y = f(X)$ есть отрезок с концами $f(a)$, $f(b)$, следует

[1] При этом $f(a) \leqslant f(b)$, если f — неубывающая, и $f(b) \leqslant f(a)$, если f — невозрастающая функция.

из доказанного выше утверждения 4. Остается проверить, что $f^{-1}\colon Y \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Но f^{-1} монотонна на Y, Y есть отрезок и $f^{-1}(Y) = X = [a, b]$ — тоже отрезок. В силу утверждения 4 заключаем, что функция f^{-1} непрерывна на отрезке Y с концами $f(a)$, $f(b)$. ►

Пример 8. Функция $y = f(x) = \sin x$ возрастает и непрерывна на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, ограничение этой функции на отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ имеет обратную функцию $x = f^{-1}(y)$, обозначаемую $x = \arcsin y$, определенную на отрезке $\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-1, 1]$, возрастающую от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ и непрерывную на этом отрезке.

Пример 9. Аналогично, ограничение функции $y = \cos x$ на отрезок $[0, \pi]$ есть убывающая непрерывная функция, которая в силу теоремы 5 имеет обратную функцию, обозначаемую $x = \arccos y$, определенную на отрезке $[-1, 1]$, непрерывную и убывающую на нем от значения π до значения 0.

Пример 10. Ограничение функции $y = \operatorname{tg} x$ на интервал $X = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ есть возрастающая от $-\infty$ до $+\infty$ непрерывная функция, которая в силу первой части теоремы 5 имеет обратную функцию, обозначаемую $x = \operatorname{arctg} y$, определенную на всей числовой прямой $y \in \mathbb{R}$ и возрастающую на ней в пределах интервала $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ своих значений. Чтобы доказать непрерывность функции $x = \operatorname{arctg} y$ в любой точке y_0 ее области определения, возьмем точку $x_0 = \operatorname{arctg} y_0$ и отрезок $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, содержащий x_0 внутри и содержащийся в интервале $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Если $x_0 - \varepsilon = \operatorname{arctg}(y_0 - \delta_1)$ и $x_0 + \varepsilon = \operatorname{arctg}(y_0 + \delta_2)$, то ввиду возрастания функции $x = \operatorname{arctg} y$ можно утверждать, что при любом $y \in \mathbb{R}$ таком, что $y_0 - \delta_1 < y < y_0 + \delta_2$, будем иметь $x_0 - \varepsilon < \operatorname{arctg} y < x_0 + \varepsilon$. Итак, $|\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} y_0| < \varepsilon$ при $-\delta_1 < y - y_0 < \delta_2$ и тем более при $|y - y_0| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, что и проверяет непрерывность функции $x = \operatorname{arctg} y$ в точке $y_0 \in \mathbb{R}$.

Пример 11. Рассуждениями, аналогичными проведенным в предыдущем примере, устанавливаем, что поскольку ограничение функции $y = \operatorname{ctg} x$ на интервале $]0, \pi[$ есть убывающая от $+\infty$ до $-\infty$ непрерывная функция, то она имеет обратную функцию, обозначаемую $x = \operatorname{arcctg} y$, определенную на всей числовой оси $\mathbb{R}$, убывающую на ней в пределах интервала своих значений $]0, \pi[$ от π до 0 и непрерывную на $\mathbb{R}$.

Замечание. При построении графиков взаимно обратных функций

$y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ полезно иметь в виду, что точки плоскости с координатами $(x, f(x)) = (x, y)$ и $(y, f^{-1}(y)) = (y, x)$ в одной и той же координатной системе (в которой лишь указана первая и вторая оси координат, а не ось x или ось y) симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла.

Таким образом, графики взаимно обратных функций, изображенные в одной системе координат, оказываются симметричными относительно этой биссектрисы.

Задачи и упражнения

1. Покажите, что

a) если $f \in C(A)$ и $B \subset A$, то $f|_B \in C(B)$;

b) если функция $f\colon E_1 \cup E_2 \to \mathbb{R}$ такова, что $f|_{E_i} \in C(E_i)$, $i = 1, 2$, то не всегда $f \in C(E_1 \cup E_2)$;

c) функция Римана $\mathcal{R}$, как и ее ограничение $\mathcal{R}|_{\mathbb{Q}}$ на множество рациональных чисел, разрывна в каждой точке множества $\mathbb{Q}$, кроме нуля, и все точки разрыва при этом устранимые (см. § 1, пример 12).

2. Покажите, что если функция $f \in C[a, b]$, то функции

$$m(x) = \min_{a \leqslant t \leqslant x} f(t), \qquad M(x) = \max_{a \leqslant t \leqslant x} f(t)$$

также непрерывны на отрезке $[a, b]$.

3. a) Докажите, что функция, обратная функции, монотонной на интервале, непрерывна на области своего определения.

b) Постройте монотонную функцию со счетным множеством точек разрыва.

c) Покажите, что если функции $f\colon X \to Y$ и $f^{-1}\colon Y \to X$ взаимно обратны (здесь X, Y — подмножества $\mathbb{R}$) и f непрерывна в точке $x_0 \in X$, то из этого еще не следует непрерывность функции f^{-1} в точке $y_0 = f(x_0) \in Y$.

4. Покажите, что

a) если $f \in C[a, b]$ и $g \in C[a, b]$, причем $f(a) < g(a)$ и $f(b) > g(b)$, то существует точка $c \in [a, b]$, в которой $f(c) = g(c)$;

b) любое непрерывное отображение $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ отрезка в себя имеет неподвижную точку, т. е. точку $x \in [0, 1]$ такую, что $f(x) = x$;

c) если два непрерывных отображения f и g отрезка в себя коммутируют, т. е. $f \circ g = g \circ f$, то они не всегда имеют общую неподвижную точку, хотя, например, для линейных отображений и, вообще, для полиномов такая точка всегда есть.

d) непрерывное отображение $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ может не иметь неподвижной точки;

e) непрерывное отображение $f\colon]0, 1[\to]0, 1[$ может не иметь неподвижной точки;

f) если отображение $f\colon [0,1] \to [0,1]$ непрерывно, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $(f \circ f)(x) \equiv x$ на $[0,1]$, то $f(x) \equiv x$.

5. Покажите, что множеством значений любой непрерывной на отрезке функции является отрезок.

6. Покажите, что

a) Если отображение $f\colon [0,1] \to [0,1]$ непрерывно, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и при некотором $n \in \mathbb{N}$ $f^n(x) := (\underbrace{f\circ \ldots \circ f}_{n \text{ раз}})(x) \equiv x$ на $[0,1]$, то $f(x) \equiv x$.

b) Если функция $f\colon [0,1] \to [0,1]$ непрерывна и не убывает, то для любой точки $x \in [0,1]$ реализуется по крайней мере одна из двух возможностей: либо x — неподвижная точка, либо $f^n(x)$ стремится к неподвижной точке (здесь $f^n(x) = f \circ \ldots \circ f$ — n-я итерация f).

7. Пусть $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция такая, что $f(0) = f(1)$. Покажите, что

a) при любом $n \in \mathbb{N}$ существует горизонтальный отрезок с концами на графике этой функции, длина которого равна $\frac{1}{n}$;

b) если число l не имеет вида $\frac{1}{n}$, то найдется функция указанного вида, в график которой уже нельзя вписать горизонтальный отрезок длины l.

8. *Модулем непрерывности* функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется функция $\omega(\delta)$, определяемая при $\delta > 0$ следующим образом:

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{|x_1 - x_2| < \delta \\ x_1, x_2 \in E}} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Таким образом, верхняя грань берется по всевозможным парам точек x_1, x_2 множества E, удаленным друг от друга меньше чем на δ.

Покажите, что

a) модуль непрерывности — неубывающая неотрицательная функция, имеющая предел[1)] $\omega(+0) = \lim\limits_{\delta \to +0} \omega(\delta)$;

b) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых точек $x_1, x_2 \in E$ соотношение $|x_1 - x_2| < \delta$ влечет $|f(x_1) - f(x_2)| < \omega(+0) + \varepsilon$;

c) если E — отрезок, интервал или полуинтервал, то для модуля непрерывности функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ имеет место соотношение

$$\omega(\delta_1 + \delta_2) \leqslant \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2);$$

d) модулем непрерывности функций x и $\sin x^2$, рассматриваемых на всей числовой прямой, являются соответственно функция $\omega(\delta) = \delta$ и постоянная $\omega(\delta) = 2$ в области $\delta > 0$;

[1)] Поэтому модуль непрерывности обычно рассматривают при $\delta \geqslant 0$, полагая $\omega(0) = \omega(+0)$.

e) функция f равномерно непрерывна на множестве E тогда и только тогда, когда $\omega(+0) = 0$.

9. Пусть f и g — ограниченные функции, определенные на одном и том же множестве X. Величина $\Delta = \sup\limits_{x\in X} |f(x) - g(x)|$ называется расстоянием между функциями f и g. Она показывает, насколько хорошо одна функция аппроксимирует другую на данном множестве X. Пусть X — отрезок $[a, b]$. Покажите, что если $f, g \in C[a, b]$, то $\exists x_0 \in [a, b]$, где $\Delta = |f(x_0) - g(x_0)|$, и что для произвольных ограниченных функций это, вообще говоря, не так.

10. Пусть $P_n(x)$ — многочлен (полином) степени n. Будем приближать ограниченную функцию $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ многочленами. Пусть

$$\Delta(P_n) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \qquad \text{и} \qquad E_n(f) = \inf_{P_n} \Delta(P_n),$$

где нижняя грань берется по всевозможным многочленам степени n. Многочлен P_n называется *многочленом* (*полиномом*) *наилучшего приближения* функции f, если для него $\Delta(P_n) = E_n(f)$.

Покажите, что

a) существует многочлен $P_0(x) \equiv a_0$ наилучшего приближения степени нуль;

b) среди многочленов $Q_\lambda(x)$ вида $\lambda P_n(x)$, где P_n — фиксированный многочлен, найдется такой многочлен Q_{λ_0}, что

$$\Delta(Q_{\lambda_0}) = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} \Delta(Q_\lambda);$$

c) если существует многочлен наилучшего приближения степени n, то существует также многочлен наилучшего приближения степени $n + 1$;

d) для любой ограниченной на отрезке функции и любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ найдется многочлен наилучшего приближения степени n.

11. Покажите, что

a) Многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один вещественный корень.

b) Если P_n — многочлен степени n, то функция $\operatorname{sgn} P_n(x)$ имеет не более n точек разрыва.

c) Если на отрезке $[a, b]$ имеется $n + 2$ точки $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ такие, что величина

$$\operatorname{sgn}\left[(f(x_i) - P_n(x_i))(-1)^i\right]$$

постоянна при $i = 0, \ldots, n + 1$, то $E_n(f) \geqslant \min\limits_{0\leqslant i\leqslant n+1} |f(x_i) - P_n(x_i)|$ (*теорема Валле Пуссена*[1]). (Определение $E_n(f)$ см. в задаче 10.)

[1] Ш. Ж. де ла Валле Пуссен (1866 – 1962) — бельгийский математик и механик.

12. a) Покажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$ функция $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, определенная на отрезке $[-1, 1]$, является алгебраическим многочленом степени n (*полиномы Чебышёва*).

b) Найдите явное алгебраическое выражение полиномов T_1, T_2, T_3, T_4 и нарисуйте их графики.

c) Найдите корни многочлена $T_n(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ и те точки отрезка, где величина $|T_n(x)|$ достигает максимума.

d) Покажите, что среди многочленов $P_n(x)$ степени n с коэффициентом 1 при x^n многочлен $T_n(x)$ является единственным многочленом, наименее уклоняющимся от нуля, т. е. $E_n(0) = \max\limits_{|x| \leqslant 1} |T_n(x)|$ (определение $E_n(f)$ см. в задаче 10).

13. Пусть $f \in C[a, b]$.

a) Покажите, что если для полинома $P_n(x)$ степени n найдутся $n+2$ точки $x_0 < \ldots < x_{n+1}$ (называемые *точками чебышёвского альтернанса*) такие, что $f(x_i) - P_n(x_i) = (-1)^i \Delta(P_n) \cdot \alpha$, где $\Delta(P_n) = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - P_n(x)|$, а α — постоянная, равная 1 или -1, то $P_n(x)$ является и притом единственным полиномом наилучшего приближения функции f степени n (см. задачу 10).

b) Докажите теорему Чебышёва: многочлен $P_n(x)$ степени n тогда и только тогда является многочленом наилучшего приближения функции $f \in C[a, b]$, когда на отрезке $[a, b]$ найдется по крайней мере $n + 2$ точки чебышёвского альтернанса.

c) Покажите, что для разрывных функций предыдущее утверждение, вообще говоря, не верно.

d) Найдите многочлены наилучшего приближения нулевой и первой степени для функции $|x|$ на отрезке $[-1, 2]$.

14. В § 2 мы обсуждали локальные свойства непрерывных функций. Настоящая задача уточняет понятие локального свойства.

Две функции f и g будем считать эквивалентными, если найдется такая окрестность $U(a)$ фиксированной точки $a \in \mathbb{R}$, что $\forall x \in U(a)$ имеем $f(x) = g(x)$. Это отношение между функциями, очевидно, рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. действительно является отношением эквивалентности.

Класс эквивалентных между собой в точке a функций называется *ростком функций* в данной точке a. Если рассматривают только непрерывные функции, то говорят о ростке непрерывных функций в точке a.

Локальные свойства функций — это свойства ростков функций.

a) Определите арифметические операции над ростками числовых функций, заданными в одной и той же точке.

b) Покажите, что арифметические операции над ростками непрерывных функций не выводят из этого класса ростков.

c) Покажите, учитывая a) и b), что ростки непрерывных функций образуют кольцо — кольцо ростков непрерывных функций.

d) Подкольцо I некоторого кольца K называется *идеалом* кольца K, если произведение любого элемента кольца K и элемента подкольца I лежит в I. Найдите идеал кольца ростков функций, непрерывных в точке a.

15. Идеал кольца называется *максимальным*, если он не содержится ни в каком большем идеале, кроме самого кольца. Множество $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке, образует кольцо относительно обычных операций сложения и умножения числовых функций. Найдите максимальные идеалы этого кольца.

ГЛАВА V

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Дифференцируемая функция

1. Задача и наводящие соображения. Предположим, что, следуя Ньютону[1)], мы хотим решить кеплерову[2)] задачу двух тел, т. е. хотим объяснить закон движения одного небесного тела m (планета) относительно другого тела M (звезда). Выберем в плоскости движения декартову систему координат с началом в M (рис. 13). Тогда положение m в момент времени t можно охарактеризовать численно координатами $(x(t), y(t))$ точки m в этой системе координат. Мы хотим найти функции $x(t)$, $y(t)$.

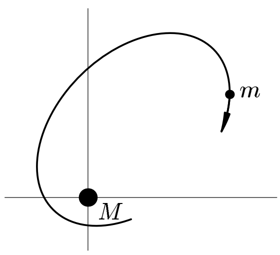


Рис. 13.

Движением m относительно M управляют два знаменитых закона Ньютона:

общий закон движения

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}, \tag{1}$$

[1)] И. Ньютон (1642 – 1727) — английский физик, механик, астроном и математик, крупнейший ученый, сформулировавший основные законы классической механики, открывший закон всемирного тяготения, разработавший (наряду с Лейбницем) основы дифференциального и интегрального исчисления. Оценен был уже современниками, которые на его могиле начертали: «Здесь покоится то, что было смертного у Ньютона».

[2)] И. Кеплер (1571 – 1630) — знаменитый немецкий астроном, открывший законы движения планет (законы Кеплера).

связывающий вектор силы с вектором вызванного ею ускорения через коэффициент пропорциональности m — инертную массу тела[1)], и

закон всемирного тяготения, позволяющий найти гравитационное воздействие тел m и M друг на друга по формуле

$$\boldsymbol{F} = G\frac{mM}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{r}$ — вектор с началом в теле приложения силы и концом в другом теле, $|\boldsymbol{r}|$ — длина вектора $\boldsymbol{r}$, или расстояние между m и M.

Зная массы m, M, по формуле (2) без труда выражаем правую часть уравнения (1) через координаты $x(t)$, $y(t)$ тела m в момент t, чем исчерпываем всю специфику данного движения.

Чтобы получить теперь соотношения на $x(t)$, $y(t)$, заключенные в уравнении (1), необходимо научиться выражать левую часть уравнения (1) через функции $x(t)$, $y(t)$.

Ускорение есть характеристика изменения скорости $\boldsymbol{v}(t)$, точнее, просто скорость изменения скорости; поэтому для решения задачи прежде всего необходимо научиться вычислять скорость $\boldsymbol{v}(t)$, которую имеет в момент t тело, движение которого задается радиус-вектором $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$.

Итак, мы хотим определить и научиться вычислять ту мгновенную скорость тела, которую подразумевает закон движения (1).

Измерить — значит сравнить с эталоном. Что же в нашем случае может служить эталоном для определения мгновенной скорости движения?

Наиболее простым видом движения является такое, которое совершает по инерции свободное тело. Это движение, при котором за любые равные промежутки времени происходят равные (как векторы) перемещения тела в пространстве. Это так называемое равномерное (прямолинейное) движение. Если точка движется равномерно, $\boldsymbol{r}(0)$ и $\boldsymbol{r}(1)$ — ее радиус-векторы относительно инерциальной системы координат в моменты $t = 0$ и $t = 1$ соответственно, то в любой момент времени будем иметь

$$\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{v} \cdot t, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}(1) - \boldsymbol{r}(0)$. Таким образом, перемещение $\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(0)$ оказы-

[1)] Мы обозначили массу символом самого тела, но это не приведет к недоразумениям. Заметим также, что если $m \ll M$, то выбранную систему координат можно считать инерциальной.

вается в простейшем случае *линейной функцией* времени, причем роль множителя пропорциональности между перемещением $\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(0)$ и временем t играет в данном случае вектор $\boldsymbol{v}$ перемещения за единицу времени. Этот вектор и называется скоростью равномерного движения. То, что движение прямолинейно, видно из параметрического уравнения его траектории: $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(0) + \boldsymbol{v} \cdot t$, являющегося (см. курс аналитической геометрии) уравнением прямой.

Мы знаем, таким образом, скорость $\boldsymbol{v}$ равномерного прямолинейного движения, задаваемого формулой (3). По закону инерции, если на тело не действуют внешние силы, оно движется равномерно и прямолинейно. Значит, если в момент t экранировать действие тела M на тело m, то последнее продолжит свое движение уже равномерно с некоторой определенной скоростью. Таким образом, естественно считать, что именно она является (мгновенной) скоростью нашего тела в момент t.

Однако такое определение мгновенной скорости оставалось бы чистой абстракцией, не дающей никаких рекомендаций для конкретного вычисления этой величины, если бы не следующее обстоятельство первостепенной важности, которое мы сейчас обсудим.

Оставаясь в рамках того (как сказали бы логики, «порочного») круга, в который мы вошли, написав уравнение движения (1), а затем принявшись выяснять, что такое мгновенная скорость и ускорение, мы все же заметим, что при самом общем представлении об этих понятиях из уравнения (1) можно сделать следующие эвристические выводы. Если силы отсутствуют, т. е. $\boldsymbol{F} \equiv 0$, то ускорение тоже равно нулю. Но если скорость $\boldsymbol{a}(t)$ изменения скорости $\boldsymbol{v}(t)$ равна нулю, то, по-видимому, сама скорость $\boldsymbol{v}(t)$ вообще не меняется со временем. И мы приходим к закону инерции, по которому свободное тело действительно движется в пространстве с постоянной во времени скоростью.

Из того же уравнения (1) видно, что ограниченные по величине силы способны создать только ограниченные по величине ускорения. Но если на отрезке времени $[0, t]$ абсолютная величина скорости изменения некоторой величины $P(t)$ не превышала некоторой постоянной c, то, по нашим представлениям, изменение $|P(t) - P(0)|$ величины P за время t не превышает $c \cdot t$, т. е. в этой ситуации за малый промежуток времени величина мало меняется (во всяком случае, функция $P(t)$ оказывается непрерывной). Значит, реальная механическая система за малый промежуток времени мало меняет свои параметры.

В частности, *скорость* $\boldsymbol{v}(t)$ *тела* m *во все моменты времени* t*, близ-*

кие к некоторому моменту t_0*, должна быть близка к значению* $\boldsymbol{v}(t_0)$, которое мы желаем определить. Но в таком случае само *движение в малой окрестности момента* t_0 *должно мало отличаться от равномерного движения со скоростью* $\boldsymbol{v}(t_0)$, причем тем меньше отличаться, чем меньше мы уходим от t_0.

Если бы мы сфотографировали траекторию тела m через телескоп, то в зависимости от его силы мы получили бы примерно следующее:

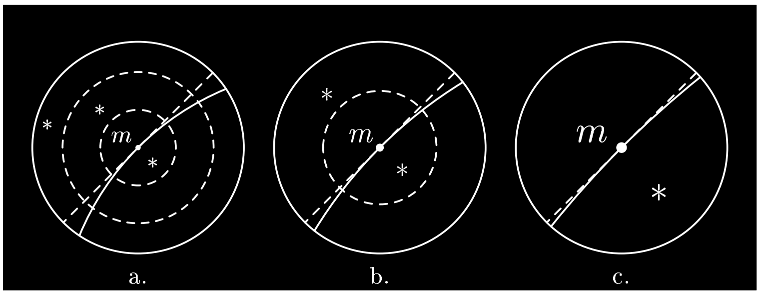


Рис. 14.

Представленный на фотографии c участок траектории соответствует столь малому интервалу времени, что на нем уже трудно отличить истинную траекторию от прямолинейной, так как она и в самом деле на этом участке похожа на прямолинейную, а движение — на равномерное прямолинейное. Из этого наблюдения, кстати, можно заключить, что, решив задачу об определении мгновенной скорости (а скорость — векторная величина), мы одновременно решим и чисто геометрический вопрос об определении и нахождении касательной к кривой (кривой в данном случае служит траектория движения).

Итак, мы заметили, что в нашей задаче должно быть $\boldsymbol{v}(t) \approx \boldsymbol{v}(t_0)$ при t, близких к t_0, т. е. $\boldsymbol{v}(t) \to \boldsymbol{v}(t_0)$ при $t \to t_0$ или, что то же самое, $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(t_0) + o(1)$ при $t \to t_0$. Тогда должно быть также

$$\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0) \approx \boldsymbol{v}(t_0) \cdot (t - t_0)$$

при t, близких к t_0, точнее, величина смещения $\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)$ эквивалентна $\boldsymbol{v}(t_0)(t - t_0)$ при $t \to t_0$, или

$$\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{v}(t_0)(t - t_0) + o(\boldsymbol{v}(t_0)(t - t_0)), \tag{4}$$

где $o(\boldsymbol{v}(t_0)(t - t_0))$ есть поправочный вектор, величина которого при $t \to$ $\to t_0$ стремится к нулю быстрее, чем величина вектора $\boldsymbol{v}(t_0)(t - t_0)$. Тут следует, естественно, оговорить тот случай, когда $\boldsymbol{v}(t_0) = 0$. Чтобы не исключать этот случай из общего рассмотрения, полезно заметить, что[1) $|\boldsymbol{v}(t_0)(t-t_0)| = |\boldsymbol{v}(t_0)||t-t_0|$. Таким образом, если $|\boldsymbol{v}(t_0)| \neq 0$, то величина $|\boldsymbol{v}(t_0)(t-t_0)|$ того же порядка, что и $|t-t_0|$, и поэтому $o(\boldsymbol{v}(t_0)(t-t_0)) = o(t-t_0)$. Значит, вместо (4) можно записать соотношение

$$\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{v}(t_0)(t-t_0) + o(t-t_0), \tag{5}$$

которое не исключает также случая $\boldsymbol{v}(t_0) = 0$.

Таким образом, от самых общих и, быть может, расплывчатых представлений о скорости мы пришли к соотношению (5), которому скорость должна удовлетворять. Но из (5) величина $\boldsymbol{v}(t_0)$ находится однозначно:

$$\boldsymbol{v}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0}, \tag{6}$$

поэтому как само фундаментальное соотношение (5), так и равносильное ему соотношение (6) можно теперь принять за определения величины $\boldsymbol{v}(t_0)$ — мгновенной скорости тела в момент t_0.

Мы не станем сейчас отвлекаться на подробное обсуждение вопроса о пределе векторнозначной функции и ограничимся сведéнием его к уже рассмотренному во всех подробностях случаю предела вещественнозначной функции. Поскольку вектор $\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)$ имеет координаты $(x(t)-x(t_0), y(t)-y(t_0))$, то $\frac{\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{t-t_0} = \left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}, \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\right)$ и, значит, если считать, что векторы близки, если их координаты близки, то предел в (6) следует понимать так:

$$\boldsymbol{v}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0} = \left(\lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}\right),$$

а $o(t-t_0)$ в (5) надо понимать как вектор, зависящий от t и такой, что вектор $\frac{o(t-t_0)}{t-t_0}$ стремится (покоординатно) к нулю при $t \to t_0$.

Наконец, заметим, что если $\boldsymbol{v}(t_0) \neq 0$, то уравнение

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{v}(t_0) \cdot (t - t_0) \tag{7}$$

задает прямую, которая в силу указанных выше обстоятельств должна быть признана *касательной* к траектории в точке $(x(t_0), y(t_0))$.

[1)] Здесь $|t-t_0|$ — модуль числа $t-t_0$, а $|\boldsymbol{v}|$ — модуль, или длина вектора $\boldsymbol{v}$.

Итак, *эталоном для определения скорости движения служит скорость равномерного прямолинейного движения, задаваемого линейным соотношением* (7). *Эталонное движение* (7) *подгоняется к исследуемому так, как этого требует соотношение* (5). *То значение* $\boldsymbol{v}(t_0)$, *при котором* (5) *выполнено, может быть найдено предельным переходом* (6) *и называется скоростью движения в момент* t_0. Рассматриваемые в классической механике движения, описываемые законом (1), должны допускать сравнение с таким эталоном, т. е. должны допускать линейную аппроксимацию, указанную в (5).

Если $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$ — радиус-вектор движущейся точки m в момент t, $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \boldsymbol{v}(t)$ — вектор скорости изменения $\boldsymbol{r}(t)$ в момент t, а $\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) = \boldsymbol{a}(t)$ — вектор скорости изменения $\boldsymbol{v}(t)$, или ускорение в момент t, то уравнение (1) можно записать в виде

$$m \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{F}(t),$$

откуда для нашего движения в поле тяжести получаем в координатном виде

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -GM\dfrac{x(t)}{[x^2(t)+y^2(t)]^{3/2}}, \\ \ddot{y}(t) = -GM\dfrac{y(t)}{[x^2(t)+y^2(t)]^{3/2}}. \end{cases} \tag{8}$$

Это точная математическая запись нашей исходной задачи. Поскольку мы знаем, как по $\boldsymbol{r}(t)$ искать $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ и далее $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$, то уже сейчас мы в состоянии ответить на вопрос, может ли какая-то пара функций $(x(t), y(t))$ задавать движение тела m вокруг M. Для этого надо найти $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$ и проверить, выполнены ли соотношения (8). Система (8) является примером системы так называемых дифференциальных уравнений. Пока что мы можем только проверять, является ли некоторый набор функций решением системы. Как искать решение или, лучше сказать, как исследовать свойства решений дифференциальных уравнений, изучается в специальном и, как уже сейчас можно понять, весьма ответственном отделе анализа — теории дифференциальных уравнений.

Операция отыскания скорости изменения векторной величины, как было показано, сводится к отысканию скорости изменения нескольких числовых функций — координат вектора. Таким образом, эту операцию следует прежде всего научиться свободно выполнять в простейшем случае вещественнозначных функций вещественного аргумента, чем мы теперь и займемся.

2. Функция, дифференцируемая в точке. Начнем с двух предварительных определений, которые мы чуть ниже несколько уточним.

Определение 0_1. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}$, называется *дифференцируемой* в точке $a \in E$, предельной для множества E, если существует такая линейная относительно приращения $x - a$ аргумента функция $A \cdot (x-a)$, что приращение $f(x) - f(a)$ функции f представляется в виде

$$f(x) - f(a) = A \cdot (x-a) + o(x-a) \quad \text{при} \quad x \to a,\ x \in E. \tag{9}$$

Иными словами, функция дифференцируема в точке a, если изменение ее значений в окрестности исследуемой точки линейно с точностью до поправки, бесконечно малой по сравнению с величиной $x - a$ смещения от точки a.

Замечание. Как правило, дело приходится иметь с функциями, определенными в целой окрестности рассматриваемой точки, а не только на каком-то подмножестве этой окрестности.

Определение 0_2. Линейная функция $A \cdot (x-a)$ из (9) называется *дифференциалом* функции f в точке a.

Дифференциал функции в точке определен однозначно, ибо из (9) следует

$$\lim_{E \ni x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{E \ni x \to a} \left(A + \frac{o(x-a)}{x-a} \right) = A$$

и в силу единственности предела число A определено однозначно.

Определение 1. Величина

$$f'(a) = \lim_{E \ni x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{10}$$

называется *производной* функции f в точке a.

Соотношение (10) можно переписать в эквивалентной форме

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, $x \in E$, что в свою очередь равносильно соотношению

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + o(x-a) \quad \text{при} \quad x \to a,\ x \in E. \tag{11}$$

Таким образом, дифференцируемость функции равносильна наличию у нее производной в соответствующей точке.

Если сопоставить эти определения с тем, что было сказано в пункте 1, то можно заключить, что производная характеризует скорость изменения функции в рассматриваемой точке, а дифференциал доставляет наилучшую линейную аппроксимацию приращения функции в окрестности рассматриваемой точки.

Если функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ дифференцируема в различных точках множества E, то при переходе от одной точки к другой как величина A, так и функция $o(x-a)$ в (9) могут меняться (к чему мы уже явно пришли в (11)). Указанное обстоятельство следует отметить уже в самом определении дифференцируемой функции, и мы приведем теперь это основное определение в его полной записи.

Определение 2. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$, заданная на множестве $E \subset \subset \mathbb{R}$, называется *дифференцируемой* в точке $x \in E$, предельной для множества E, если

$$\boxed{f(x+h) - f(x) = A(x)h + \alpha(x;h),} \tag{12}$$

где $h \mapsto A(x)h$ — линейная относительно h функция, а $\alpha(x;h) = o(h)$ при $h \to 0$, $x + h \in E$.

Величины

$$\Delta x(h) := (x+h) - x = h$$

и

$$\Delta f(x;h) := f(x+h) - f(x)$$

называют соответственно *приращением аргумента* и *приращением функции* (соответствующим этому приращению аргумента).

Их часто (правда, не вполне законно) обозначают символами Δx и $\Delta f(x)$ самих функций от h.

Итак, функция дифференцируема в точке, если ее приращение в этой точке как функция приращения аргумента h является линейной с точностью до поправки, бесконечно малой при $h \to 0$ в сравнении с приращением аргумента.

Определение 3. Линейная по h функция $h \mapsto A(x)h$ из определения 2 называется *дифференциалом функции* $f\colon E \to \mathbb{R}$ в точке $x \in E$ и обозначается символом $df(x)$ или $Df(x)$.

Таким образом, $df(x)(h) = A(x)h$.

Из определений 2, 3 имеем

$$\Delta f(x;h) - df(x)(h) = \alpha(x;h),$$

причем $\alpha(x;h) = o(h)$ при $h \to 0$, $x + h \in E$, т. е. разность между приращением функции, вызванным приращением h ее аргумента, и значением при том же h линейной по h функции $df(x)$ оказывается бесконечно малой выше чем первого порядка по h.

По этой причине говорят, что дифференциал есть (*главная*) *линейная часть приращения функции*.

Как следует из соотношения (12) и определения 1,

$$A(x) = f'(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ x+h,\, x \in E}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

поэтому дифференциал можно записать в виде

$$df(x)(h) = f'(x)h. \tag{13}$$

В частности, если $f(x) \equiv x$, то, очевидно, $f'(x) \equiv 1$ и

$$dx(h) = 1 \cdot h = h,$$

поэтому иногда говорят, что «дифференциал независимой переменной совпадает с ее приращением».

Учитывая это равенство, из (13) получаем

$$df(x)(h) = f'(x)dx(h), \tag{14}$$

т. е.

$$df(x) = f'(x)dx. \tag{15}$$

Равенство (15) надо понимать как равенство функций от h.

Из (14) получаем

$$\frac{df(x)(h)}{dx(h)} = f'(x), \tag{16}$$

т. е. функция $\frac{df(x)}{dx}$ (отношение функций $df(x)$ и dx) постоянна и равна $f'(x)$. По этой причине, следуя Лейбницу, производную часто обозначают символом $\frac{df(x)}{dx}$ наряду с предложенным впоследствии Лагранжем[1)] символом $f'(x)$.

[1)] Ж. Л. Лагранж (1736 – 1813) — знаменитый французский математик и механик.

В механике, кроме указанных символов, для обозначения производной от функции $\varphi(t)$ по времени t используется символ $\dot{\varphi}(t)$ (читается «φ с точкой от t»).

3. Касательная; геометрический смысл производной и дифференциала. Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}$, и x_0 — фиксированная предельная точка множества E. Мы хотим подобрать постоянную c_0 так, чтобы она лучше всех остальных констант характеризовала поведение функции в окрестности точки x_0. Точнее, мы хотим, чтобы разность $f(x) - c_0$ при $x \to x_0$, $x \in E$ была бесконечно малой в сравнении уже с любой не нулевой постоянной, т. е.

$$f(x) = c_0 + o(1) \quad \text{при} \quad x \to x_0,\ x \in E. \tag{17}$$

Последнее соотношение равносильно тому, что $\lim\limits_{E \ni x \to x_0} f(x) = c_0$. Если, в частности, функция непрерывна в точке x_0, то $\lim\limits_{E \ni x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ и, естественно, $c_0 = f(x_0)$.

Попробуем теперь подобрать функцию $c_0 + c_1(x - x_0)$ так, чтобы иметь

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{при} \quad x \to x_0,\ x \in E. \tag{18}$$

Очевидно, это — обобщение предыдущей задачи, поскольку формулу (17) можно переписать в виде

$$f(x) = c_0 + o((x - x_0)^0) \quad \text{при} \quad x \to x_0,\ x \in E.$$

Из (18) при $x \to x_0$, $x \in E$ немедленно следует, что $c_0 = \lim\limits_{E \ni x \to x_0} f(x)$, и если функция непрерывна в точке, то $c_0 = f(x_0)$.

Если c_0 найдено, то из (18) следует, что

$$c_1 = \lim_{E \ni x \to x_0} \frac{f(x) - c_0}{x - x_0}.$$

И вообще, если бы мы искали такой полином $P_n(x_0; x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n$, что

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \quad \text{при} \quad x \to x_0,\ x \in E, \tag{19}$$

то мы последовательно и вполне однозначно нашли бы

$$c_0 = \lim_{E \ni x \to x_0} f(x),$$
$$c_1 = \lim_{E \ni x \to x_0} \frac{f(x) - c_0}{x - x_0},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$c_n = \lim_{E \ni x \to x_0} \frac{f(x) - \left[c_0 + \ldots + c_{n-1}(x - x_0)^{n-1}\right]}{(x - x_0)^n}$$

при условии, что все указанные пределы существуют; в противном случае условие (19) невыполнимо и задача решения не имеет.

Если функция f непрерывна в точке x_0, то из (18), как уже отмечалось, следует, что $c_0 = f(x_0)$ и мы приходим к соотношению

$$f(x) - f(x_0) = c_1(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{при} \quad x \to x_0,\ x \in E,$$

равносильному условию дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x_0.

Отсюда находим

$$c_1 = \lim_{E \ni x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Таким образом, доказано

Утверждение 1. *Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$, непрерывная в точке $x_0 \in E$, предельной для множества $E \subset \mathbb{R}$, допускает линейное приближение* (18) *в том и только в том случае, когда она дифференцируема в этой точке.*

Функция
$$\varphi(x) = c_0 + c_1(x - x_0) \tag{20}$$
при $c_0 = f(x_0)$ и $c_1 = f'(x_0)$ является единственной функцией вида (20), удовлетворяющей соотношению (18).

Итак, функция

$$\varphi(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{21}$$

доставляет наилучшее линейное приближение функции f в окрестности точки x_0 в том смысле, что для любой другой функции вида (20) $f(x) - \varphi(x) \neq o(x - x_0)$ при $x \to x_0$, $x \in E$.

Графиком функции (21) является прямая

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \tag{22}$$

проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$.

Поскольку прямая (22) доставляет наилучшее возможное линейное приближение графика функции $y = f(x)$ в окрестности точки $(x_0, f(x_0))$, то естественно принять

Определение 4. Если функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ определена на множестве $E \subset \mathbb{R}$ и дифференцируема в точке $x_0 \in E$, то прямая, задаваемая уравнением (22), называется *касательной* к графику этой функции в точке $(x_0, f(x_0))$.

Рисунок 15 иллюстрирует все основные понятия, связанные с дифференцируемостью функции в точке, которые мы к настоящему моменту ввели: приращение аргумента и соответствующие ему приращение функции и значение дифференциала; на рисунке изображены график функции, касательная к графику в точке $P_0 = (x_0, f(x_0))$ и, для сравнения, произвольная прямая (называемая обычно *секущей*), проходящая через P_0 и некоторую точку $P \neq P_0$ графика функции.

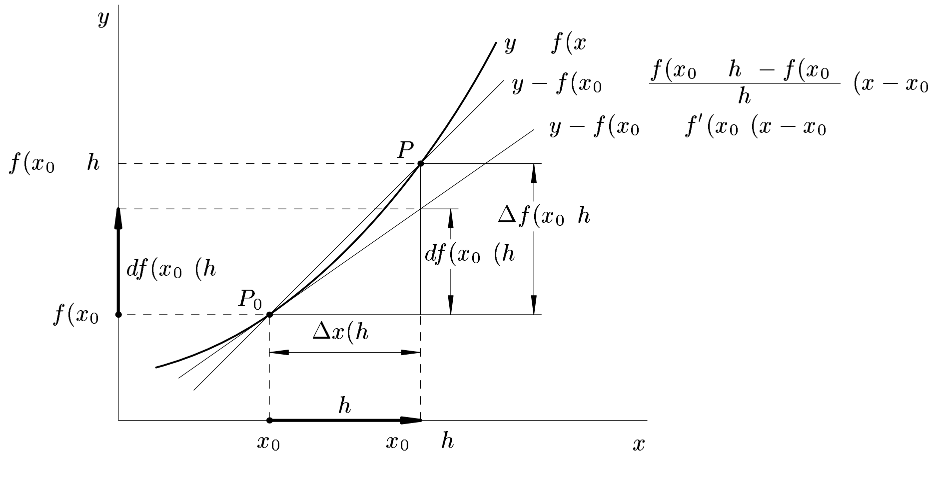


Рис. 15.

Развитием определения 4 является

Определение 5. Если отображения $f\colon E \to \mathbb{R}$, $g\colon E \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке $x_0 \in E$, предельной для множества $E \subset \mathbb{R}$, и $f(x)-g(x) = o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$, $x \in E$, то говорят, что f и g имеют в точке x_0 *касание порядка* n (или, точнее, *порядка не ниже* n).

При $n = 1$ говорят, что отображения f и g *касаются* друг друга в точке x_0.

В соответствии с определением 5 отображение (21) касается в точке $x_0 \in E$ отображения $f\colon E \to \mathbb{R}$, дифференцируемого в этой точке.

Теперь можно также сказать, что полином $P_n(x_0; x) = c_0 + c_1(x-x_0) + \ldots + c_n(x-x_0)^n$ из соотношения (19) имеет с функцией f касание не ниже чем порядка n.

Число $h = x - x_0$, т. е. приращение аргумента, можно рассматривать как вектор, приложенный к точке x_0 и определяющий переход из x_0 в $x = x_0 + h$. Обозначим совокупность таких векторов через $T\mathbb{R}(x_0)$ или $T\mathbb{R}_{x_0}$.[1)] Аналогично, обозначим через $T\mathbb{R}(y_0)$ или $T\mathbb{R}_{y_0}$ совокупность векторов смещения от точки y_0 по оси y (см. рис. 15). Тогда из определения дифференциала видно, что отображение

$$df(x_0)\colon T\mathbb{R}(x_0) \to T\mathbb{R}(f(x_0)), \tag{23}$$

задаваемое дифференциалом $h \mapsto f'(x_0)h = df(x_0)(h)$, касается отображения

$$h \mapsto f(x_0 + h) - f(x_0) = \Delta f(x_0; h), \tag{24}$$

задаваемого приращением дифференцируемой функции.

Заметим (см. рис. 15), что если отображение (24) есть приращение ординаты графика функции $y = f(x)$ при переходе аргумента из точки x_0 в точку $x_0 + h$, то дифференциал (23) дает приращение ординаты касательной к графику функции при том же приращении h аргумента.

4. Роль системы координат. Аналитическое определение 4 касательной может вызвать некоторую не вполне осознанную неудовлетворенность. Мы постараемся сформулировать, что именно может составить предмет этой неудовлетворенности. Однако прежде укажем одну

[1)] Это — небольшое отклонение от наиболее распространенного обозначения $T_{x_0}\mathbb{R}$ или $T_{x_0}(\mathbb{R})$.

более геометрическую конструкцию касательной к кривой в некоторой ее точке P_0 (см. рис. 15).

Возьмем произвольную точку P кривой, отличную от P_0. Прямая, определяемая парой точек P_0, P, как уже отмечалось, называется секущей по отношению к кривой. Заставим теперь точку P вдоль кривой стремиться к точке P_0. Если при этом секущая будет стремиться к некоторому предельному положению, то это предельное положение секущей и есть касательная к кривой в точке P_0.

Такое определение касательной при всей его наглядности в данный момент для нас неприемлемо потому, что мы не знаем, что такое кривая, что значит «точка стремится к другой точке вдоль кривой» и, наконец, в каком смысле надо понимать «предельное положение секущей».

Вместо того чтобы уточнять сейчас все эти понятия, мы отметим основную разницу между двумя рассмотренными определениями касательной. Второе было чисто геометрическим, не связанным (во всяком случае, до уточнений) с какой бы то ни было системой координат. В первом же случае мы определили касательную к кривой, являющейся в некоторой системе координат графиком дифференцируемой функции. Естественно может возникнуть вопрос, не получится ли так, что если эту кривую записать в другой системе координат, то, например, соответствующая функция перестанет быть дифференцируемой или будет дифференцируемой, но в результате новых вычислений мы получим другую прямую в качестве касательной.

Этот вопрос об инвариантности, т. е. независимости от системы координат, всегда возникает, когда понятие вводится с помощью некоторой системы координат.

В равной степени этот вопрос относится и к понятию скорости, которое мы обсуждали в пункте 1 и которое, кстати, как это уже отмечалось, включает в себя понятие касательной.

Точка, вектор, прямая и т. д. имеют в разных системах координат разные численные характеристики (координаты точки, координаты вектора, уравнение прямой). Однако, зная формулы, связывающие две системы координат, всегда можно по двум однотипным числовым представлениям выяснить, являются ли они записью в разных системах координат одного и того же геометрического объекта или нет. Интуиция подсказывает нам, что процедура определения скорости, описанная в пункте 1, приводит к одному и тому же вектору независимо от системы координат, в которой проводились вычисления. В свое время, при изучении функций многих переменных, мы подробно обсудим подобного рода вопросы. Инвариантность определения скорости относительно различных систем координат будет проверена уже в следующем параграфе.

Прежде чем переходить к рассмотрению конкретных примеров, подведем некоторые итоги.

Мы столкнулись с задачей математического описания мгновенной скорости движущегося тела.

Эта задача привела к задаче аппроксимации заданной функции в окрестности исследуемой точки линейной функцией, что в геометрическом плане привело к понятию *касательной*. Функции, описывающие движение реальной механической системы, предполагаются допускающими такую линейную аппроксимацию.

Тем самым среди всех функций естественно выделился класс *дифференцируемых функций*.

Было введено понятие *дифференциала* функции в точке как линейного отображения, определенного на смещениях от рассматриваемой точки, которое с точностью до величины бесконечно малой по сравнению с величиной смещения описывает поведение приращения дифференцируемой функции в окрестности рассматриваемой точки.

Дифференциал $df(x_0)h = f'(x_0)h$ вполне определяется числом $f'(x_0)$ — *производной* функции f в точке x_0, которое может быть найдено предельным переходом

$$f'(x_0) = \lim_{E \ni x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Физический смысл производной — *скорость* изменения величины $f(x)$ в момент x_0; геометрический смысл производной — *угловой коэффициент касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

5. Некоторые примеры

Пример 1. Пусть $f(x) = \sin x$. Покажем, что $f'(x) = \cos x$.

$$◀ \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} = \cos x. ▶$$

Мы воспользовались теоремой о пределе произведения, непрерывностью функции $\cos x$, эквивалентностью $\sin t \sim t$ при $t \to 0$ и теоремой о пределе композиции.

Пример 2. Покажем, что $\cos' x = -\sin x$.

$$◀ \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} =$$
$$= -\lim_{h\to 0} \sin\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} = -\sin x. ▶$$

Пример 3. Покажем, что если $f(t) = r\cos\omega t$, то $f'(t) = -r\omega\sin\omega t$.

$$◀ \lim_{h\to 0} \frac{r\cos\omega(t+h) - r\cos\omega t}{h} = r\lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\left(\frac{\omega h}{2}\right)\sin\omega\left(t+\frac{h}{2}\right)}{h} =$$
$$= -r\lim_{h\to 0} \sin\omega\left(t+\frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\omega h}{2}\right)}{\left(\frac{\omega h}{2}\right)} = -r\omega\sin\omega t. ▶$$

Пример 4. Если $f(t) = r\sin\omega t$, то $f'(t) = r\omega\cos\omega t$.

◀ Доказательство аналогично разобранным в примерах 1 и 3. ▶

Пример 5. *Мгновенная скорость и ускорение материальной точки.* Пусть материальная точка движется в плоскости и в фиксированной системе координат закон ее движения описывается дифференцируемыми функциями от времени

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

или, что то же самое, вектором

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)).$$

Как мы выяснили в пункте 1 настоящего параграфа, скорость точки в момент t есть вектор

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)),$$

где $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ — производные функций $x(t)$, $y(t)$ по времени t.

Ускорение $\boldsymbol{a}(t)$ есть скорость изменения вектора $\boldsymbol{v}(t)$, поэтому

$$\boldsymbol{a}(t) = \dot{\boldsymbol{v}}(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)),$$

где $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$ — производные по t функций $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, или так называемые вторые производные функций $x(t)$, $y(t)$.

Таким образом, по смыслу физической задачи функции $x(t)$, $y(t)$, описывающие движение материальной точки, должны иметь и первые и вторые производные.

Рассмотрим, в частности, равномерное движение точки по окружности радиуса r. Пусть ω — угловая скорость точки, т. е. величина центрального угла, на который перемещается точка за единицу времени.

В декартовых координатах (в силу определений функций $\cos x$, $\sin x$) это движение запишется в виде

$$\boldsymbol{r}(t) = (r\cos(\omega t + \alpha), r\sin(\omega t + \alpha)),$$

а если $\boldsymbol{r}(0) = (r, 0)$, то в виде

$$\boldsymbol{r}(t) = (r\cos\omega t, r\sin\omega t).$$

Без ограничения общности дальнейших выводов и для сокращения записи будем считать, что $\boldsymbol{r}(0) = (r, 0)$.

Тогда в силу результатов примеров 3 и 4

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = (-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t).$$

Из подсчета скалярного произведения

$$(\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{r}(t)) = -r^2\omega\sin\omega t\cos\omega t + r^2\omega\cos\omega t\sin\omega t = 0,$$

как и следовало в этом случае ожидать, получаем, что вектор $\boldsymbol{v}(t)$ скорости ортогонален радиус-вектору $\boldsymbol{r}(t)$ и направлен по касательной к окружности.

Далее, для ускорения имеем

$$\boldsymbol{a}(t) = \dot{\boldsymbol{v}}(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = (-r\omega^2\cos\omega t, -r\omega^2\sin\omega t),$$

т. е. $\boldsymbol{a}(t) = -\omega^2\cdot\boldsymbol{r}(t)$ и ускорение, таким образом, действительно центростремительное, ибо имеет направление, противоположное направлению вектора $\boldsymbol{r}(t)$.

Далее,

$$|\boldsymbol{a}(t)| = \omega^2|\boldsymbol{r}(t)| = \omega^2 r = \frac{|\boldsymbol{v}(t)|^2}{r} = \frac{v^2}{r},$$

где $v = |\boldsymbol{v}(t)|$.

Подсчитаем, исходя из этих формул, например, величину скорости низкого спутника Земли. В этом случае r совпадает с радиусом Земли, т. е. $r \approx 6400$ км, а $|\boldsymbol{a}(t)| \approx g$, где $g \approx 10\,\text{м/с}^2$ — ускорение свободного падения у поверхности Земли.

Таким образом, $v^2 = |\boldsymbol{a}(t)|r \approx 10\,\text{м/с}^2 \times 64 \cdot 10^5\,\text{м} = 64 \cdot 10^6\,(\text{м/с})^2$ и $v \approx 8 \cdot 10^3\,\text{м/с}$.

Пример 6. *Оптическое свойство параболического зеркала.* Рассмотрим (рис. 16) параболу $y = \frac{1}{2p}x^2$ $(p > 0)$ и построим касательную к ней в точке $(x_0, y_0) = \left(x_0, \frac{1}{2p}x_0^2\right)$.

Поскольку $f(x) = \frac{1}{2p}x^2$, то

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{2p}x^2 - \frac{1}{2p}x_0^2}{x - x_0} = \frac{1}{2p}\lim_{x \to x_0}(x + x_0) = \frac{1}{p}x_0.$$

Значит, искомая касательная имеет уравнение

$$y - \frac{1}{2p}x_0^2 = \frac{1}{p}x_0(x - x_0)$$

или

$$\frac{1}{p}x_0(x - x_0) - (y - y_0) = 0, \tag{25}$$

где $y_0 = \frac{1}{2p}x_0^2$.

Вектор $\boldsymbol{n} = \left(-\frac{1}{p}x_0, 1\right)$, как видно из последнего уравнения, ортогонален прямой (25). Покажем, что векторы $\boldsymbol{e}_y = (0, 1)$ и $\boldsymbol{e}_f = \left(-x_0, \frac{p}{2} - y_0\right)$ образуют с $\boldsymbol{n}$ равные углы. Вектор $\boldsymbol{e}_y$ есть единичный вектор направления оси Oy, а $\boldsymbol{e}_f$ — вектор, направленный из точки касания $(x_0, y_0) = \left(x_0, \frac{1}{2p}x_0^2\right)$ в точку $\left(0, \frac{p}{2}\right)$ — фокус параболы. Итак,

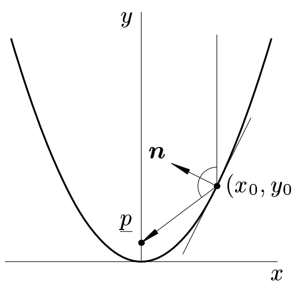


Рис. 16.

$$\cos\widehat{\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{n}} = \frac{\langle \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{n}\rangle}{|\boldsymbol{e}_y||\boldsymbol{n}|} = \frac{1}{|\boldsymbol{n}|},$$

$$\cos\widehat{\boldsymbol{e}_f\boldsymbol{n}} = \frac{\langle \boldsymbol{e}_f, \boldsymbol{n}\rangle}{|\boldsymbol{e}_f||\boldsymbol{n}|} = \frac{\frac{1}{p}x_0^2 + \frac{p}{2} - \frac{1}{2p}x_0^2}{|\boldsymbol{n}|\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{p}{2} - \frac{1}{2p}x_0^2\right)^2}} = \frac{\frac{p}{2} + \frac{1}{2p}x_0^2}{|\boldsymbol{n}|\sqrt{\left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2p}x_0^2\right)^2}} = \frac{1}{|\boldsymbol{n}|}.$$

Таким образом, показано, что волновой источник, помещенный в точке $\left(0, \frac{p}{2}\right)$ — в фокусе параболического зеркала, даст пучок, параллельный оси Oy зеркала, а приходящий параллельно оси Oy пучок зеркало пропустит через фокус (см. рис. 16).

Пример 7. Этим примером мы покажем, что касательная является всего-навсего лучшим линейным приближением графика функции в окрестности точки касания и вовсе не обязана иметь с ним единственную общую точку, как это было в случае окружности и как это вообще имеет место в случае выпуклых кривых. (О выпуклых кривых будет специальный разговор.)

Пусть функция $f(x)$ задана в виде

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

График этой функции изображен жирной линией на рис. 17.

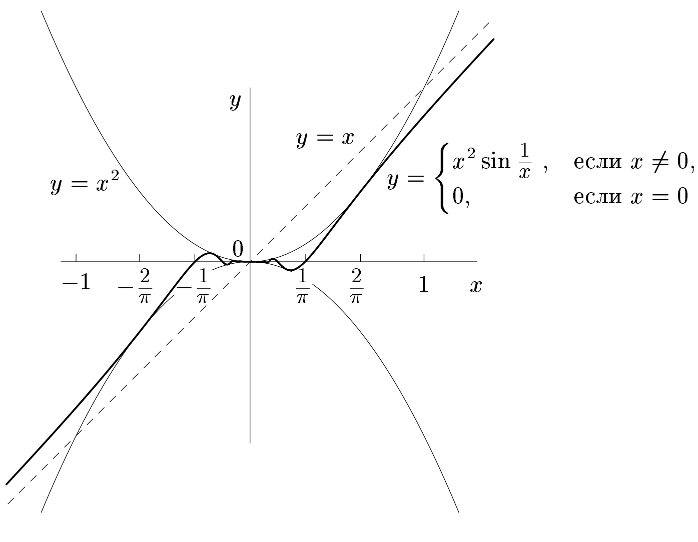


Рис. 17.

Найдем касательную к графику в точке $(0,0)$. Поскольку

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0,$$

то касательная имеет уравнение $y - 0 = 0\cdot(x-0)$, или просто $y = 0$.

Таким образом, в нашем примере касательная совпадает с осью Ox, с которой график имеет бесконечное количество точек пересечения в любой окрестности точки касания.

В силу определения дифференцируемости функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ в точке $x_0 \in E$ имеем

$$f(x) - f(x_0) = A(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \quad \text{при} \quad x \to x_0,\ \ x \in E.$$

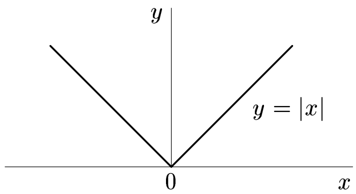


Рис. 18.

Поскольку правая часть этого равенства стремится к нулю при $x \to x_0$, $x \in E$, то $\lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, так что дифференцируемая в точке функция обязана быть непрерывной в этой точке.

Покажем, что обратное, конечно, не всегда имеет место.

Пример 8. Пусть $f(x) = |x|$ (рис. 18). Тогда в точке $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to -0} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to -0} \frac{-x}{x} = -1,$$
$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to +0} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to +0} \frac{x}{x} = 1.$$

Следовательно, в этой точке функция не имеет производной, а значит, и не дифференцируема в этой точке.

Пример 9. Покажем, что $e^{x+h} - e^x = e^x h + o(h)$ при $h \to 0$.

Таким образом, функция $\exp(x) = e^x$ дифференцируема, причем $d\exp(x)h = \exp(x)h$, или $de^x = e^x dx$, и тем самым $\exp' x = \exp x$, или $\frac{de^x}{dx} = e^x$.

◄ $e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1) = e^x(h + o(h)) = e^x h + o(h)$.

Мы воспользовались полученной в примере 39, гл. III, § 2, п. 4 формулой $e^h - 1 = h + o(h)$ при $h \to 0$. ►

Пример 10. $a^{x+h} - a^x = a^x \ln a h + o(h)$ при $h \to 0$ и $a > 0$.

Таким образом, $da^x = a^x \ln a\, dx$ и $\frac{da^x}{dx} = a^x \ln a$.

$$◀\ a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1) = a^x(e^{h\ln a} - 1) =$$
$$= a^x(h\ln a + o(h\ln a)) = a^x \ln a h + o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0. \ ▶$$

Пример 11. $\ln|x+h| - \ln|x| = \frac{1}{x}h + o(h)$ при $h \to 0$ и $x \neq 0$.
Таким образом, $d\ln|x| = \frac{1}{x}dx$ и $\frac{d\ln|x|}{dx} = \frac{1}{x}$.
◀ $\ln|x+h| - \ln|x| = \ln\left|1 + \frac{h}{x}\right|$.

При $|h| < |x|$ имеем $\left|1 + \frac{h}{x}\right| = 1 + \frac{h}{x}$, поэтому для достаточно малых значений h можно написать

$$\ln|x+h| - \ln|x| = \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{h}{x} + o\left(\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}h + o(h)$$

при $h \to 0$. Мы воспользовались здесь тем, что, как показано в примере 38, гл. III, § 2, п. 4, $\ln(1+t) = t + o(t)$ при $t \to 0$. ▶

Пример 12. $\log_a|x+h| - \log_a|x| = \frac{1}{x\ln a}h + o(h)$ при $h \to 0$, $x \neq 0$, $0 < a \neq 1$.

Таким образом, $d\log_a|x| = \frac{1}{x\ln a}dx$ и $\frac{d\log_a|x|}{dx} = \frac{1}{x\ln a}$.

$$◀\ \log_a|x+h| - \log_a|x| = \log_a\left|1 + \frac{h}{x}\right| = \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right) =$$
$$= \frac{1}{\ln a}\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{\ln a}\left(\frac{h}{x} + o\left(\frac{h}{x}\right)\right) = \frac{1}{x\ln a}h + o(h).$$

Мы воспользовались формулой перехода к другому основанию логарифмов и соображениями, изложенными при рассмотрении примера 11. ▶

Задачи и упражнения

1. Покажите, что
а) касательная к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в точке (x_0, y_0) имеет уравнение

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1;$$

b) световые лучи от источника, помещенного в одном из двух фокусов $F_1 = \left(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$, $F_2 = \left(\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ эллипса с полуосями $a > b > 0$, собираются эллиптическим зеркалом в другом фокусе.

2. Напишите формулы для приближенного вычисления значений

a) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$ при значениях α, близких к нулю;

b) $\sin(30^\circ + \alpha^\circ)$ при значениях α°, близких к нулю;

c) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ при значениях α, близких к нулю;

d) $\cos(45^\circ + \alpha^\circ)$ при значениях α°, близких к нулю.

3. Стакан с водой вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω. Пусть $y = f(x)$ — уравнение кривой, получающейся в сечении поверхности жидкости плоскостью, проходящей через ось вращения.

a) Покажите, что $f'(x) = \frac{\omega^2}{g}x$, где g — ускорение свободного падения (см. пример 5).

b) Подберите $f(x)$ так, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла условию, указанному в a) (см. пример 5).

c) Изменится ли приведенное в a) условие на функцию $f(x)$, если ось вращения не будет совпадать с осью стакана?

4. Тело, которое можно считать материальной точкой, под действием силы тяжести скатывается с гладкой горки, являющейся графиком дифференцируемой функции $y = f(x)$.

a) Найдите горизонтальную и вертикальную компоненты вектора ускорения, которое имеет тело в точке (x_0, y_0).

b) В случае, когда $f(x) = x^2$ и тело скатывается с большой высоты, найдите ту точку параболы $y = x^2$, в которой горизонтальная составляющая ускорения максимальна.

5. Положим

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \text{если } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

и продолжим эту функцию на всю числовую прямую с периодом 1. Эту продолженную функцию обозначим через φ_0. Пусть, далее,

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{4^n}\varphi_0(4^n x).$$

Функция φ_n имеет период 4^{-n} и производную, равную $+1$ или -1 всюду, кроме точек $x = \frac{k}{2^{2n+1}}$, $n \in \mathbb{Z}$. Пусть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x).$$

Покажите, что функция f определена и непрерывна на $\mathbb{R}$, но ни в одной точке не имеет производной. (Этот пример принадлежит известному голландскому математику Б. Л. Ван дер Вардену (1903-1996). Первые примеры непрерывных функций, не имеющих производной, были построены Больцано (1830 г.) и Вейерштрассом (1860 г.).)

§ 2. Основные правила дифференцирования

Построение дифференциала заданной функции или, что равносильно, отыскание ее производной называется операцией *дифференцирования* функции[1)].

1. Дифференцирование и арифметические операции

Теорема 1. *Если функции $f\colon X \to \mathbb{R}$, $g\colon X \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $x \in X$, то*

a) *их сумма дифференцируема в x, причем*

$$(f+g)'(x) = (f'+g')(x);$$

b) *их произведение дифференцируемо в x, причем*

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$$

c) *их отношение дифференцируемо в x, если $g(x) \neq 0$, причем*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

◀ В доказательстве мы будем опираться на определение дифференцируемой функции и свойства символа $o(\cdot)$, установленные в гл. III, § 2, п. 4.

[1)] При математической равносильности задачи отыскания дифференциала и задачи отыскания производной, все же производная и дифференциал — не одно и то же, и поэтому, например, во французском математическом языке имеются два термина: dérivation — «деривация», нахождение производной (скорости), и différentiation — «дифференцирование», нахождение дифференциала.

a) $$(f+g)(x+h)-(f+g)(x)=(f(x+h)+g(x+h))-$$
$$-(f(x)+g(x))=(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))=$$
$$=(f'(x)h+o(h))+(g'(x)h+o(h))=(f'(x)+g'(x))h+o(h)=$$
$$=(f'+g')(x)h+o(h).$$

b) $$(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)=f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)=$$
$$=(f(x)+f'(x)h+o(h))(g(x)+g'(x)h+o(h))-f(x)g(x)=$$
$$=(f'(x)g(x)+f(x)g'(x))h+o(h).$$

c) Поскольку функция, дифференцируемая в некоторой точке $x \in X$, непрерывна в этой точке, то, учитывая, что $g(x) \neq 0$, на основании свойств непрерывных функций можем гарантировать, что при достаточно малых значениях h также $g(x+h) \neq 0$. В следующих выкладках предполагается, что h мало:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}=$$
$$=\frac{1}{g(x)g(x+h)}(f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h))=$$
$$=\left(\frac{1}{g^2(x)}+o(1)\right)\big((f(x)+f'(x)h+o(h))g(x)-f(x)(g(x)+g'(x)h+o(h))\big)=$$
$$=\left(\frac{1}{g^2(x)}+o(1)\right)\big((f'(x)g(x)-f(x)g'(x))h+o(h)\big)=$$
$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}h+o(h).$$

Мы воспользовались тем, что в силу непрерывности функции g в точке x и того, что $g(x) \neq 0$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+h)}=\frac{1}{g^2(x)},$$

т. е.

$$\frac{1}{g(x)g(x+h)}=\frac{1}{g^2(x)}+o(1),$$

где $o(1)$ есть бесконечно малая при $h \to 0$, $x+h \in X$. ►

Следствие 1. *Производная от линейной комбинации дифференцируемых функций равна линейной комбинации производных этих функций.*

◀ Поскольку постоянная функция, очевидно, дифференцируема и ее производная всюду равна нулю, то, считая в утверждении b) теоремы 1, что $f \equiv \mathrm{const} = c$, имеем $(cg)'(x) = cg'(x)$.

Используя теперь утверждение a) теоремы 1, можем записать

$$(c_1 f + c_2 g)'(x) = (c_1 f)'(x) + (c_2 g)'(x) = c_1 f'(x) + c_2 g'(x).$$

С учетом доказанного, по индукции проверяем, что

$$(c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n)'(x) = c_1 f_1'(x) + \ldots + c_n f_n'(x). \quad ▶$$

Следствие 2. *Если функции $f_1, \ldots, f_n$ дифференцируемы в точке x, то*

$$(f_1 \ldots f_n)'(x) = f_1'(x) f_2(x) \ldots f_n(x) + \\ + f_1(x) f_2'(x) f_3(x) \ldots f_n(x) + \ldots + f_1(x) \ldots f_{n-1}(x) f_n'(x).$$

◀ Для $n = 1$ утверждение очевидно.

Если оно справедливо для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то в силу утверждения b) теоремы 1 оно справедливо также для $(n+1) \in \mathbb{N}$. В силу принципа индукции заключаем о верности приведенной формулы для любого $n \in \mathbb{N}$. ▶

Следствие 3. *Из взаимосвязи производной и дифференциала следует, что теорема* 1 *может быть записана также через дифференциалы. Именно*:

a) $d(f+g)(x) = df(x) + dg(x)$;

b) $d(f \cdot g)(x) = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$;

c) $d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}$, если $g(x) \neq 0$.

◀ Проверим, например, a). Действительно,

$$d(f+g)(x)h = (f+g)'(x)h = (f'+g')(x)h = \\ = (f'(x) + g'(x))h = f'(x)h + g'(x)h = \\ = df(x)h + dg(x)h = (df(x) + dg(x))h,$$

и совпадение функций $d(f+g)(x)$, $df(x)+dg(x)$ проверено. ►

Пример 1. *Инвариантность определения скорости.* Теперь мы в состоянии проверить, что вектор мгновенной скорости материальной точки, который был определен в п. 1 § 1, не зависит от выбора системы декартовых координат. Мы проверим это даже для любой из аффинных систем координат.

Пусть (x^1, x^2) и $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)$ — координаты одной и той же точки плоскости в двух различных системах координат, связанных между собой соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{x}^1 &= a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + b^1, \\ \tilde{x}^2 &= a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + b^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Поскольку любой вектор (в аффинном пространстве) определяется парой точек, а его координаты суть разности координат конца и начала вектора, то координаты одного и того же вектора в этих двух системах должны быть связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{v}^1 &= a_1^1 v^1 + a_2^1 v^2, \\ \tilde{v}^2 &= a_1^2 v^1 + a_2^2 v^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Если закон движения точки в одной системе задается функциями $x^1(t)$, $x^2(t)$, то в другой — функциями $\tilde{x}^1(t)$, $\tilde{x}^2(t)$, связанными с первыми посредством соотношений (1).

Дифференцируя соотношения (1) по времени t, по правилам дифференцирования находим

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}^1 &= a_1^1 \dot{x}^1 + a_2^1 \dot{x}^2, \\ \dot{\tilde{x}}^2 &= a_1^2 \dot{x}^1 + a_2^2 \dot{x}^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Таким образом, координаты $(v^1, v^2) = (\dot{x}^1, \dot{x}^2)$ вектора скорости в первой системе и координаты $\left(\tilde{v}^1, \tilde{v}^2\right) = \left(\dot{\tilde{x}}^1, \dot{\tilde{x}}^2\right)$ вектора скорости во второй системе оказались связанными соотношениями (2), говорящими нам о том, что мы имеем дело с двумя различными записями одного и того же вектора.

Пример 2. Пусть $f(x) = \operatorname{tg} x$. Покажем, что $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ всюду, где $\cos x \neq 0$, т. е. в области определения функции $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

В примерах 1 и 2 из § 1 было показано, что $\sin' x = \cos x$, $\cos' x = -\sin x$, поэтому из утверждения c) теоремы 1 получаем при $\cos x \neq 0$:

$$\operatorname{tg}' x = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \\ = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Пример 3. $\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$ при $\sin x \neq 0$, т. е. в области определения функции $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Действительно,

$$\operatorname{ctg}' x = \left(\frac{\cos}{\sin}\right)'(x) = \frac{\cos' x \sin x - \cos x \sin' x}{\sin^2 x} = \\ = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пример 4. Если $P(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$ — полином, то $P'(x) = c_1 + 2c_2 x + \ldots + nc_n x^{n-1}$.

Действительно, поскольку $\frac{dx}{dx} = 1$, то по следствию 2 $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ и теперь утверждение вытекает из следствия 1.

2. Дифференцирование композиции функций

Теорема 2 (теорема о дифференциале композиции функций)**.** *Если функция $f\colon X \to Y \subset \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x \in X$, а функция $g\colon Y \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $y = f(x) \in Y$, то композиция $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ этих функций дифференцируема в точке x, причем дифференциал $d(g \circ f)(x)\colon T\mathbb{R}(x) \to T\mathbb{R}(g(f(x)))$ композиции равен композиции $dg(y) \circ df(x)$ дифференциалов*

$$df(x)\colon T\mathbb{R}(x) \to T\mathbb{R}(y = f(x)), \qquad dg(y = f(x))\colon T\mathbb{R}(y) \to T\mathbb{R}(g(y)).$$

◄ Условия дифференцируемости функций f и g имеют вид

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h) \qquad \text{при} \quad h \to 0, \ \ x + h \in X,$$
$$g(y+t) - g(y) = g'(y)t + o(t) \qquad \text{при} \quad t \to 0, \ \ y + t \in Y.$$

Заметим, что в последнем равенстве функцию $o(t)$ можно считать определенной и при $t = 0$, а в представлении $o(t) = \gamma(t)t$, где $\gamma(t) \to 0$ при $t \to 0$, $y + t \in Y$, можно считать $\gamma(0) = 0$. Полагая $f(x) = y$,

$f(x+h) = y+t$, в силу дифференцируемости, а значит, и непрерывности функции f в точке x заключаем, что при $h \to 0$ также $t \to 0$, и если $x+h \in X$, то $y+t \in Y$. По теореме о пределе композиции теперь имеем

$$\gamma(f(x+h) - f(x)) = \alpha(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0, \ \ x+h \in X,$$

и, таким образом, если $t = f(x+h) - f(x)$, то

$$\begin{aligned} o(t) = \gamma(f(x+h) - f(x))(f(x+h) - f(x)) = \\ = \alpha(h)(f'(x)h + o(h)) = \alpha(h)f'(x)h + \alpha(h)o(h) = \\ = o(h) + o(h) = o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0, \ \ x+h \in X. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x) &= g(f(x+h)) - g(f(x)) = \\ &= g(y+t) - g(y) = g'(y)t + o(t) = \\ &= g'(f(x))(f(x+h) - f(x)) + o(f(x+h) - f(x)) = \\ &= g'(f(x))(f'(x)h + o(h)) + o(f(x+h) - f(x)) = \\ &= g'(f(x))(f'(x)h) + g'(f(x))(o(h)) + o(f(x+h) - f(x)). \end{aligned}$$

Поскольку величину $g'(f(x))(f'(x)h)$ можно интерпретировать как значение $dg(f(x)) \circ df(x)h$ композиции $h \xmapsto{dg(y) \circ df(x)} g'(f(x)) \cdot f'(x)h$ отображений $h \xmapsto{df(x)} f'(x)h$, $\tau \xmapsto{dg(y)} g'(y)\tau$ на смещении h, то для завершения доказательства теоремы остается заметить, что сумма

$$g'(f(x))(o(h)) + o(f(x+h) - f(x))$$

есть величина бесконечно малая в сравнении с h при $h \to 0$, $x+h \in X$, ибо, как мы уже установили,

$$o(f(x+h) - f(x)) = o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0, \ \ x+h \in X.$$

Итак, показано, что

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x) = \\ = g'(f(x)) \cdot f'(x)h + o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0, \ \ x+h \in X. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Следствие 4. *Производная $(g \circ f)'(x)$ композиции дифференцируемых вещественнозначных функций равна произведению $g'(f(x)) \cdot f'(x)$ производных этих функций, вычисленных в соответствующих точках.*

Большим искушением к короткому доказательству последнего утверждения являются содержательные обозначения Лейбница для производной, в которых, если $z = z(y)$, а $y = y(x)$, имеем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$

что представляется вполне естественным, если символ $\frac{dz}{dy}$ или $\frac{dy}{dx}$ рассматривать не как единый, а как отношение dz к dy или, соответственно, dy к dx.

Возникающая в связи с этим идея доказательства состоит в том, чтобы рассмотреть разностное отношение

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

и затем перейти к пределу при $\Delta x \to 0$. Трудность, которая тут появляется (и с которой нам тоже отчасти пришлось считаться!), состоит в том, что Δy может быть нулем, даже если $\Delta x \neq 0$.

Следствие 5. *Если имеется композиция $(f_n \circ \ldots \circ f_1)(x)$ дифференцируемых функций $y_1 = f_1(x), \ldots, y_n = f_n(y_{n-1})$, то*

$$(f_n \circ \ldots \circ f_1)'(x) = f_n'(y_{n-1}) f_{n-1}'(y_{n-2}) \ldots f_1'(x).$$

◀ При $n = 1$ утверждение очевидно.

Если оно справедливо для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то из теоремы 2 следует, что оно справедливо также для $n + 1$, т. е. по принципу индукции установлено, что оно справедливо для любого $n \in \mathbb{N}$. ▶

Пример 5. Покажем, что при $\alpha \in \mathbb{R}$ в области $x > 0$ имеем $\frac{dx^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}$, т. е. $dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} dx$, и

$$(x + h)^\alpha - x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} h + o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

◀ Запишем $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ и применим доказанную теорему с учетом результатов примеров 9 и 11 из § 1 и пункта b) теоремы 1.

Пусть $g(y) = e^y$ и $y = f(x) = \alpha \ln x$. Тогда $x^\alpha = (g \circ f)(x)$ и

$$(g \circ f)'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = e^y \cdot \frac{\alpha}{x} = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}. \quad \blacktriangleright$$

Пример 6. Производная от логарифма модуля дифференцируемой функции часто называется *логарифмической производной.*

Поскольку $F(x) = \ln |f(x)| = (\ln \circ |\ \ | \circ f)(x)$, то в силу результата примера 11 из § 1 $F'(x) = (\ln |f|)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Таким образом,

$$d(\ln |f|)(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{df(x)}{f(x)}.$$

Пример 7. *Абсолютная и относительная погрешности значения дифференцируемой функции, вызванные погрешностями в задании аргумента.*

Если функция f дифференцируема в точке x, то

$$f(x + h) - f(x) = f'(x)h + \alpha(x; h),$$

где $\alpha(x; h) = o(h)$ при $h \to 0$.

Таким образом, если при вычислении значения $f(x)$ функции аргумент x определен с абсолютной погрешностью h, то вызванная этой погрешностью абсолютная погрешность $|f(x+h) - f(x)|$ в значении функции при достаточно малых h может быть заменена модулем значения дифференциала $|df(x)h| = |f'(x)h|$ на смещении h.

Тогда относительная погрешность может быть вычислена как отношение $\frac{|f'(x)h|}{|f(x)|} = \frac{|df(x)h|}{|f(x)|}$ или как модуль произведения $\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| |h|$ логарифмической производной функции на величину абсолютной погрешности аргумента.

Заметим, кстати, что если $f(x) = \ln x$, то $d \ln x = \frac{dx}{x}$ и абсолютная погрешность в определении значения логарифма равна относительной погрешности в определении аргумента. Это обстоятельство прекрасно используется, например, в логарифмической линейке (и многих других приборах с неравномерным масштабом шкал). А именно, представим себе, что с каждой точкой числовой оси, лежащей правее нуля, мы связали ее координату y и записали ее над точкой, а под этой точкой записали число $x = e^y$. Тогда $y = \ln x$. Одна и та же числовая полуось оказалась наделенной одной равномерной шкалой y и одной неравномерной (ее называют логарифмической) шкалой x. Чтобы найти $\ln x$, надо установить визир на числе x и прочитать наверху соответствующее число y. Поскольку точность установки визира на какую-то точку не зависит от числа x или y, ей отвечающего, и измеряется некоторой величиной Δy (длиной отрезка возможного уклонения) в равномерной шкале, то при определении по числу x его логарифма y мы будем иметь примерно одну и ту же абсолютную погрешность, а при определении числа по его логарифму будем иметь примерно одинаковую относительную погрешность во всех частях шкалы.

Пример 8. Продифференцируем функцию $u(x)^{v(x)}$, где $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые функции и $u(x) > 0$. Запишем $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$ и воспользуемся следствием 5. Тогда

$$\frac{de^{v(x)\ln u(x)}}{dx} = e^{v(x)\ln u(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right) = \\ = u(x)^{v(x)} \cdot v'(x)\ln u(x) + v(x)u(x)^{v(x)-1} \cdot u'(x).$$

3. Дифференцирование обратной функции

Теорема 3 (теорема о производной обратной функции). *Пусть функции $f\colon X \to Y$, $f^{-1}\colon Y \to X$ взаимно обратны и непрерывны в точках $x_0 \in X$ и $f(x_0) = y_0 \in Y$ соответственно. Если функция f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, то функция f^{-1} также дифференцируема в точке y_0, причем*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \left(f'(x_0)\right)^{-1}.$$

◂ Поскольку функции $f\colon X \to Y$, $f^{-1}\colon Y \to X$ взаимно обратны, то величины $f(x) - f(x_0)$, $f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)$ при $y = f(x)$ не обращаются в нуль, если $x \neq x_0$. Из непрерывности f в x_0 и f^{-1} в y_0 можно, кроме того, заключить, что $(X \ni x \to x_0) \Leftrightarrow (Y \ni y \to y_0)$. Используя теперь теорему о пределе композиции функций и арифметические свойства предела, находим

$$\lim_{Y\ni y\to y_0}\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{X\ni x\to x_0}\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \\ = \lim_{X\ni x\to x_0}\frac{1}{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Таким образом, показано, что в точке y_0 функция $f^{-1}\colon Y \to X$ имеет производную и

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \left(f'(x_0)\right)^{-1}. \quad \blacktriangleright$$

Замечание 1. Если бы нам заранее было известно, что функция f^{-1} дифференцируема в точке y_0, то из тождества $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ по теореме о дифференцировании композиции функций мы сразу же нашли бы, что $\left(f^{-1}\right)'(y_0) \cdot f'(x_0) = 1$.

Замечание 2. Условие $f'(x_0) \neq 0$, очевидно, равносильно тому, что отображение $h \mapsto f'(x_0)h$, осуществляемое дифференциалом $df(x_0)\colon T\mathbb{R}(x_0) \to T\mathbb{R}(y_0)$, имеет обратное отображение $[df(x_0)]^{-1}\colon T\mathbb{R}(y_0) \to T\mathbb{R}(x_0)$, задаваемое формулой $\tau \mapsto (f'(x_0))^{-1}\tau$.

Значит, в терминах дифференциалов вторую фразу формулировки теоремы 3 можно было бы записать следующим образом:

Если функция f дифференцируема в точке x_0 и в этой точке ее дифференциал $df(x_0)\colon T\mathbb{R}(x_0) \to T\mathbb{R}(y_0)$ обратим, то дифференциал функции f^{-1}, обратной к f, существует в точке $y_0 = f(x_0)$ и является отображением

$$df^{-1}(y_0) = [df(x_0)]^{-1}\colon T\mathbb{R}(y_0) \to T\mathbb{R}(x_0),$$

обратным к отображению $df(x_0)\colon T\mathbb{R}(x_0) \to T\mathbb{R}(y_0)$.

Пример 9. Покажем, что $\arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ при $|y| < 1$. Функции $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ и $\arcsin\colon [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ взаимно обратны и непрерывны (см. гл. IV, § 2, пример 8), причем $\sin' x = \cos x \neq 0$, если $|x| < \pi/2$. При $|x| < \pi/2$ для значений $y = \sin x$ имеем $|y| < 1$.

Таким образом, по теореме 3

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Знак перед радикалом выбран с учетом того, что $\cos x > 0$ при $|x| < \pi/2$.

Пример 10. Рассуждая, как и в предыдущем примере, можно показать (с учетом примера 9 из § 2 гл. IV), что

$$\arccos' y = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad \text{при} \quad |y| < 1.$$

Действительно,

$$\arccos' y = \frac{1}{\cos' x} = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Знак перед радикалом выбран с учетом того, что $\sin x > 0$, если $0 < < x < \pi$.

Пример 11. $\operatorname{arctg}' y = \frac{1}{1+y^2}$, $y \in \mathbb{R}$.

Действительно,

$$\operatorname{arctg}' y = \frac{1}{\operatorname{tg}' x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Пример 12. $\operatorname{arcctg}' y = -\frac{1}{1+y^2}$, $y \in \mathbb{R}$.

Действительно,

$$\operatorname{arcctg}' y = \frac{1}{\operatorname{ctg}' x} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)} = -\sin^2 x = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x} = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Пример 13. Мы уже знаем (см. примеры 10, 12 из § 1), что функции $y = f(x) = a^x$ и $x = f^{-1}(y) = \log_a x$ имеют производные $f'(x) = = a^x \ln a$ и $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{y \ln a}$.

Проверим, как это согласуется с теоремой 3:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a},$$

$$f'(x) = \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'(y)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{y \ln a}\right)} = y \ln a = a^x \ln a.$$

Пример 14. *Гиперболические, обратные гиперболические функции и их производные.* Функции

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right),$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

называются соответственно *гиперболическим синусом* и *гиперболическим косинусом*[1)] от x.

[1)] От лат. sinus hyperbolici, cosinus hyperbolici.

Эти в данный момент вводимые нами чисто формально функции, как выяснится, во многих вопросах появляются так же естественно, как появляются круговые функции $\sin x$, $\cos x$.

Заметим, что

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x,$$
$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x,$$

т. е. гиперболический синус — нечетная функция, а гиперболический косинус — функция четная.

Кроме того, очевидно следующее основное тождество:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Графики функций $y = \operatorname{sh} x$ и $y = \operatorname{ch} x$ изображены на рис. 19.

Из определения функции $\operatorname{sh} x$ и свойств функции e^x следует, что $\operatorname{sh} x$ — непрерывная строго возрастающая функция, отображающая взаимно однозначно $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$. Обратная функция к $\operatorname{sh} x$, таким образом, существует, определена на $\mathbb{R}$, непрерывна и строго монотонно возрастает.

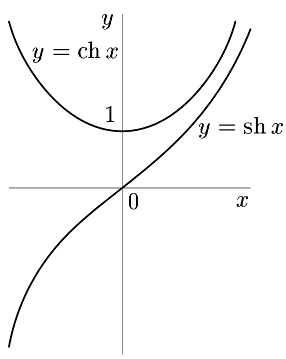


Рис. 19.

Ее обозначают символом

$$\operatorname{arsh} y$$

(читается «*ареа-синус*[2)] от y»). Эту функцию легко выразить через уже известные. Решая уравнение

$$\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = y$$

относительно x, найдем последовательно

$$e^x = y + \sqrt{1+y^2}$$

($e^x > 0$, поэтому $e^x \neq y - \sqrt{1+y^2}$) и

$$x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right).$$

[2)] Полное название — area sinus hyperbolici (*лат.*); почему здесь используется термин «площадь» (area), а не «дуга» (arcus), как в круговых функциях, выяснится несколько позже.

Итак,

$$\operatorname{arsh} y = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right), \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Аналогично, используя монотонность функции $y = \operatorname{ch} x$ на участках $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, можно построить функции $\operatorname{arch}_- y$ и $\operatorname{arch}_+ y$, определенные для $y \geqslant 1$ и обратные к ограничению функции $\operatorname{ch} x$ на $\mathbb{R}_-$ и $\mathbb{R}_+$ соответственно.

Они задаются формулами

$$\operatorname{arch}_- y = \ln\left(y - \sqrt{y^2-1}\right),$$
$$\operatorname{arch}_+ y = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right).$$

Из приведенных определений находим

$$\operatorname{sh}' x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \operatorname{ch} x,$$
$$\operatorname{ch}' x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \operatorname{sh} x,$$

а на основе теоремы о производной обратной функции получаем

$$\operatorname{arsh}' y = \frac{1}{\operatorname{sh}' x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}},$$
$$\operatorname{arch}'_- y = \frac{1}{\operatorname{ch}' x} = \frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{-\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} = -\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}, \qquad y > 1,$$
$$\operatorname{arch}'_+ y = \frac{1}{\operatorname{ch}' x} = \frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}, \qquad y > 1.$$

Последние три соотношения можно проверить, используя явные выражения для обратных гиперболических функций $\operatorname{arsh} y$ и $\operatorname{arch} y$.

Например,

$$\operatorname{arsh}' y = \frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1+y^2\right)^{-1/2} \cdot 2y\right) =$$
$$= \frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+y^2}+y}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Подобно $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ можно рассмотреть функции

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad \text{и} \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x},$$

называемые *гиперболическим тангенсом* и *гиперболическим котангенсом* соответственно, а также обратные им функции *ареа-тангенс*:

$$\operatorname{arth} y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}, \qquad |y| < 1,$$

и *ареа-котангенс*:

$$\operatorname{arcth} y = \frac{1}{2} \ln \frac{y+1}{y-1}, \qquad |y| > 1.$$

Решения элементарных уравнений, приводящие к этим формулам, мы опускаем.

По правилам дифференцирования имеем

$$\operatorname{th}' x = \frac{\operatorname{sh}' x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \operatorname{ch}' x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$
$$\operatorname{cth}' x = \frac{\operatorname{ch}' x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \operatorname{sh}' x}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

По теореме о производной обратной функции

$$\operatorname{arth}' y = \frac{1}{\operatorname{th}' x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right)} = \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 x} = \frac{1}{1-y^2}, \qquad |y| < 1,$$

$$\operatorname{arcth}' y = \frac{1}{\operatorname{cth}' x} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\right)} = -\operatorname{sh}^2 x =$$
$$= -\frac{1}{\operatorname{cth}^2 x - 1} = -\frac{1}{y^2 - 1}, \qquad |y| > 1.$$

Две последние формулы можно проверить и непосредственным дифференцированием явных формул для функций $\operatorname{arth} y$ и $\operatorname{arcth} y$.

4. Таблица производных основных элементарных функций. Выпишем теперь (см. табл. 1) производные основных элементарных функций, подсчитанные в § 1 и § 2.

Таблица 1

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$	Ограничения на область изменения аргумента $x \in \mathbb{R}$
1. C (const)	0	
2. x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0$ при $\alpha \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$ при $\alpha \in \mathbb{N}$
3. a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
4. $\log_a \lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$x \in \mathbb{R} \setminus 0$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
5. $\sin x$	$\cos x$	
6. $\cos x$	$-\sin x$	
7. $\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\quad k \in \mathbb{Z}$
8. $\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq \pi k,\quad k \in \mathbb{Z}$
9. $\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
10. $\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
11. $\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	
12. $\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	
13. $\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	
14. $\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	
15. $\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	
16. $\operatorname{cth} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$x \neq 0$
17. $\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	
18. $\operatorname{arch} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\lvert x\rvert > 1$
19. $\operatorname{arth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$
20. $\operatorname{arcth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+1}{x-1}$	$\dfrac{1}{x^2-1}$	$\lvert x\rvert > 1$

5. Дифференцирование простейшей неявно заданной функции. Пусть $y = y(t)$ и $x = x(t)$ — дифференцируемые функции, определенные в окрестности $U(t_0)$ точки $t_0 \in \mathbb{R}$. Предположим, что функция $x = x(t)$ имеет обратную функцию $t = t(x)$, определенную в окрестности $V(x_0)$ точки $x_0 = x(t_0)$. Тогда величину $y = y(t)$, зависящую от t, можно рассматривать также как функцию, неявно зависящую от x, поскольку $y(t) = y(t(x))$. Найдем производную этой функции по x в точке x_0, предполагая, что $x'(t_0) \neq 0$. Используя теорему о дифференцировании композиции и теорему о дифференцировании обратной функции, получаем

$$y'_x\big|_{x=x_0} = \frac{dy(t(x))}{dx}\bigg|_{x=x_0} = \frac{dy(t)}{dt}\bigg|_{t=t_0} \cdot \frac{dt(x)}{dx}\bigg|_{x=x_0} = \frac{\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=t_0}}{\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=t_0}} = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}.$$

(Здесь использовано стандартное обозначение $f(x)|_{x=x_0} := f(x_0)$.)

Если одна и та же величина рассматривается как функция различных аргументов, то во избежание недоразумений при дифференцировании явно указывают переменную, по которой это дифференцирование проводится, что мы и сделали.

Пример 15. *Закон сложения скоростей.* Движение точки вдоль прямой вполне определяется, если в каждый момент t выбранной нами системы отсчета времени мы знаем координату x точки в выбранной системе координат (числовой оси). Таким образом, пара чисел (x, t) определяет положение точки в пространстве и во времени. Закон движения точки запишется в виде некоторой функции $x = x(t)$.

Предположим, что движение этой же точки мы хотим описать в терминах другой системы координат $(\tilde{x}, \tilde{t})$. К примеру, новая числовая ось движется равномерно со скоростью $-v$ относительно первой (вектор скорости в данном случае можно отождествить с задающим его одним числом). Будем для простоты считать, что координаты $(0, 0)$ и в той и в другой системе относятся к одной и той же точке или, точнее, что в момент $\tilde{t} = 0$ точка $\tilde{x} = 0$ совпадала с точкой $x = 0$, в которой часы показывали $t = 0$.

Тогда один из возможных вариантов связи координат (x, t), $(\tilde{x}, \tilde{t})$, описывающих движение одной и той же точки, наблюдаемое из разных систем координат, доставляют классические преобразования Галилея

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + vt, \\ \tilde{t} &= t. \end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотрим несколько более общую линейную связь

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \alpha x + \quad \beta t, \\ \tilde{t} &= \gamma x + \quad \delta t, \end{aligned} \tag{5}$$

разумеется, в предположении, что эта связь обратима, т. е. определитель матрицы $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ отличен от нуля.

Пусть $x = x(t)$ и $\tilde{x} = \tilde{x}(\tilde{t})$ — закон движения наблюдаемой точки, записанный в этих системах координат.

Зная зависимость $x = x(t)$, из формул (5) найдем

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \alpha x(t) + \beta t, \\ \tilde{t}(t) &= \gamma x(t) + \delta t, \end{aligned} \tag{6}$$

а в силу обратимости преобразований (5), записав

$$\begin{aligned} x &= \tilde{\alpha}\tilde{x} + \tilde{\beta}\tilde{t}, \\ t &= \tilde{\gamma}\tilde{x} + \tilde{\delta}\tilde{t}, \end{aligned} \tag{7}$$

зная $\tilde{x} = \tilde{x}(\tilde{t})$, можно найти

$$\begin{aligned} x(\tilde{t}) &= \tilde{\alpha}\tilde{x}(\tilde{t}) + \tilde{\beta}\tilde{t}, \\ t(\tilde{t}) &= \tilde{\gamma}\tilde{x}(\tilde{t}) + \tilde{\delta}\tilde{t}. \end{aligned} \tag{8}$$

Из соотношений (6) и (8) видно, что для данной точки существуют взаимно обратные зависимости $\tilde{t} = \tilde{t}(t)$ и $t = t(\tilde{t})$.

Рассмотрим теперь вопрос о связи скоростей

$$V(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}_t(t) \qquad \text{и} \qquad \widetilde{V}(\tilde{t}) = \frac{d\tilde{x}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \dot{\tilde{x}}_t(\tilde{t})$$

нашей точки, вычисленных в системах координат (x, t) и $(\tilde{x}, \tilde{t})$ соответственно.

Используя правило дифференцирования неявной функции и формулы (6), имеем

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{\frac{d\tilde{x}}{dt}}{\frac{d\tilde{t}}{dt}} = \frac{\alpha\frac{dx}{dt} + \beta}{\gamma\frac{dx}{dt} + \delta}$$

или

$$\widetilde{V}(\tilde{t}) = \frac{\alpha V(t) + \beta}{\gamma V(t) + \delta}, \tag{9}$$

где $\tilde{t}$ и t — координаты одного и того же момента времени в системах (x, t) и $(\tilde{x}, \tilde{t})$. Это всегда имеется в виду при сокращенной записи

$$\widetilde{V} = \frac{\alpha V + \beta}{\gamma V + \delta} \tag{10}$$

формулы (9).

В случае преобразований (4) Галилея из (10) получаем классический закон сложения скоростей

$$\widetilde{V} = V + v. \tag{11}$$

Экспериментально с достаточной степенью точности установлено (и это стало одним из постулатов специальной теории относительности), что в вакууме свет всегда распространяется с определенной скоростью c, не зависящей от состояния движения излучающего тела. Это означает, что если в момент $t = \tilde{t} = 0$ в точке $x = \tilde{x} = 0$ происходит вспышка, то через время t в системе (x, t) свет достигнет точек с координатами x такими, что $x^2 = (ct)^2$, а в системе $(\tilde{x}, \tilde{t})$ этому событию будут отвечать время $\tilde{t}$ и координаты $\tilde{x}$ точек такие, что опять $\tilde{x}^2 = (c\tilde{t})^2$.

Таким образом, если $x^2 - c^2t^2 = 0$, то и $\tilde{x}^2 - c^2\tilde{t}^2 = 0$, и обратно. В силу некоторых дополнительных физических соображений следует считать, что вообще

$$x^2 - c^2t^2 = \tilde{x}^2 - c^2\tilde{t}^2, \tag{12}$$

если (x, t) и $(\tilde{x}, \tilde{t})$ отвечают одному и тому же событию в различных системах координат, связанных соотношением (5). Условия (12) дают следующие соотношения на коэффициенты α, β, γ, δ преобразования (5):

$$\begin{aligned} \alpha^2 - c^2\gamma^2 &= 1, \\ \alpha\beta - c^2\gamma\delta &= 0, \\ \beta^2 - c^2\delta^2 &= -c^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Если бы было $c = 1$, то вместо (13) мы имели бы

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \gamma^2 &= 1, \\ \frac{\beta}{\delta} &= \frac{\gamma}{\alpha}, \\ \beta^2 - \delta^2 &= -1, \end{aligned} \tag{14}$$

откуда легко следует, что общее (с точностью до перемен знака в парах (α, β), (γ, δ)) решение системы (14) может быть дано в виде

$$\alpha = \operatorname{ch}\varphi, \qquad \gamma = \operatorname{sh}\varphi, \qquad \beta = \operatorname{sh}\varphi, \qquad \delta = \operatorname{ch}\varphi,$$

где φ — некоторый параметр.

Тогда общее решение системы (13) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & c\operatorname{sh}\varphi \\ \frac{1}{c}\operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix}$$

и преобразования (5) конкретизируются:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \operatorname{ch}\varphi\, x + c\operatorname{sh}\varphi\, t, \\ \tilde{t} &= \frac{1}{c}\operatorname{sh}\varphi\, x + \operatorname{ch}\varphi\, t. \end{aligned} \tag{15}$$

Это — *преобразования Лоренца.*

Чтобы уяснить себе, каким образом определяется свободный параметр φ, вспомним, что ось $\tilde{x}$ движется со скоростью $-v$ относительно оси x, т. е. точка $\tilde{x} = 0$ этой оси, наблюдаемая из системы (x, t), имеет скорость $-v$. Полагая в (15) $\tilde{x} = 0$, находим ее закон движения в системе (x, t):

$$x = -c\operatorname{th}\varphi\, t.$$

Таким образом,

$$\operatorname{th}\varphi = \frac{v}{c}. \tag{16}$$

Сопоставляя общий закон (10) преобразования скоростей с преобразованиями Лоренца (15), получаем

$$\widetilde{V} = \frac{\operatorname{ch}\varphi\, V + c\operatorname{sh}\varphi}{\frac{1}{c}\operatorname{sh}\varphi\, V + \operatorname{ch}\varphi},$$

или, с учетом (16),

$$\widetilde{V} = \frac{V + v}{1 + \frac{vV}{c^2}}. \tag{17}$$

Формула (17) есть релятивистский закон сложения скоростей, который при $|vV| \ll c^2$, т. е. при $c \to \infty$, переходит в классический, выраженный формулой (11).

Сами преобразования Лоренца (15) с учетом соотношения (16) можно записать в следующей более естественной форме:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{x + vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \\ \tilde{t} &= \frac{t + \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \end{aligned} \tag{18}$$

откуда видно, что при $|v| \ll c$, т. е. при $c \to \infty$, они превращаются в классические преобразования Галилея (4).

6. Производные высших порядков. Если функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ дифференцируема в любой точке $x \in E$, то на множестве E возникает новая функция $f'\colon E \to \mathbb{R}$, значение которой в точке $x \in E$ равно производной $f'(x)$ функции f в этой точке.

Функция $f'\colon E \to \mathbb{R}$ сама может иметь производную $(f')'\colon E \to \mathbb{R}$ на E, которая по отношению к исходной функции f называется *второй производной* от f и обозначается одним из символов

$$f''(x), \qquad \frac{d^2 f(x)}{dx^2},$$

а если хотят явно указать переменную дифференцирования, то в первом случае еще, например, пишут $f''_{xx}(x)$.

Определение. По индукции, если определена производная $f^{(n-1)}(x)$ порядка $n-1$ от f, то *производная порядка* n определяется формулой

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x).$$

Для производной порядка n приняты обозначения

$$f^{(n)}(x), \qquad \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Условились считать, что $f^{(0)}(x) := f(x)$.

Множество всех функций $f\colon E \to \mathbb{R}$, имеющих на E непрерывные производные до порядка n включительно, будем обозначать символом $C^{(n)}(E, \mathbb{R})$, а когда это не ведет к недоразумению — более простыми символами $C^{(n)}(E)$ или $C^n(E, \mathbb{R})$ и $C^n(E)$ соответственно.

В частности, $C^{(0)}(E) = C(E)$ в силу принятого соглашения, что $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Рассмотрим несколько примеров вычисления производных высших порядков.

Примеры.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$\ldots$	$f^{(n)}(x)$
16.	a^x	$a^x \ln a$	$a^x \ln^2 a$	$\ldots$	$a^x \ln^n a$
17.	e^x	e^x	e^x	$\ldots$	e^x
18.	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$\ldots$	$\sin(x + n\pi/2)$

19.	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\ldots$	$\cos(x + n\pi/2)$
20.	$(1+x)^\alpha$	$\alpha(1+x)^{\alpha-1}$	$\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$	$\ldots$	$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+$ $+1)(1+x)^{\alpha-n}$
21.	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$	$\ldots$	$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+$ $+1)x^{\alpha-n}$
22.	$\log_a \lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{\ln a}x^{-1}$	$\dfrac{-1}{\ln a}x^{-2}$	$\ldots$	$\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\ln a}x^{-n}$
23.	$\ln \lvert x\rvert$	x^{-1}	$(-1)x^{-2}$	$\ldots$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}$

Пример 24. *Формула Лейбница.* Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — функции, имеющие на общем множестве E производные до порядка n включительно. Тогда для n-й производной от их произведения справедлива следующая формула Лейбница:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(n-m)} v^{(m)}. \tag{19}$$

Формула Лейбница очень похожа на формулу бинома Ньютона и на самом деле с нею непосредственно связана.

◀ При $n = 1$ формула (19) совпадает с уже установленным правилом дифференцирования произведения.

Если функции u, v имеют производные до порядка $n+1$ включительно, то, в предположении справедливости формулы (19) для порядка n, после дифференцирования ее левой и правой частей получаем

$$\begin{aligned}(uv)^{(n+1)} &= \sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(n-m+1)} v^{(m)} + \sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(n-m)} v^{(m+1)} = \\ &= u^{(n+1)}v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) u^{((n+1)-k)} v^{(k)} + u^{(0)} v^{(n+1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{((n+1)-k)} v^{(k)}.\end{aligned}$$

Мы объединили слагаемые, содержащие одинаковые произведения производных от функций u, v, и воспользовались тем, что $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$.

Таким образом, по индукции установлена справедливость формулы Лейбница. ▶

Пример 25. Если $P_n(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$, то

$$P_n(0) = c_0,$$
$$P_n'(x) = c_1 + 2c_2 x + \ldots + nc_n x^{n-1} \quad \text{и} \quad P_n'(0) = c_1,$$
$$P_n''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3 x + \ldots + n(n-1)c_n x^{n-2} \quad \text{и} \quad P_n''(0) = 2!\,c_2,$$
$$P_n^{(3)}(x) = 3\cdot 2c_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)c_n x^{n-3} \quad \text{и} \quad P_n^{(3)}(0) = 3!\,c_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 2c_n \quad \text{и} \quad P_n^{(n)}(0) = n!\,c_n,$$
$$P_n^{(k)}(x) = 0 \ \text{ при } \ k > n.$$

Таким образом, полином $P_n(x)$ можно записать в виде

$$P_n(x) = P_n^{(0)}(0) + \tfrac{1}{1!}P_n^{(1)}(0)x + \tfrac{1}{2!}P_n^{(2)}(0)x^2 + \ldots + \tfrac{1}{n!}P_n^{(n)}(0)x^n.$$

Пример 26. Используя формулу Лейбница и то обстоятельство, что производные от полинома, имеющие порядок выше его степени, тождественно равны нулю, можно найти n-ю производную функции $f(x) = x^2\sin x$:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) = \sin^{(n)} x\cdot x^2 + C_n^1 \sin^{(n-1)} x\cdot 2x + C_n^2 \sin^{(n-2)} x\cdot 2 = \\ = x^2\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + 2nx\sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) + \\ + \left(-n(n-1)\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right) = \\ = \left(x^2 - n(n-1)\right)\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) - 2nx\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Пример 27. Пусть $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Найдем значения $f^{(n)}(0)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Поскольку $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, то $(1+x^2)f'(x) = 1$.

Применяя формулу Лейбница к последнему равенству, находим рекуррентную формулу

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0,$$

из которой можно последовательно найти все производные функции $f(x)$.

Полагая $x = 0$, получаем

$$f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)f^{(n-1)}(0).$$

При $n = 1$ имеем $f^{(2)}(0) = 0$, поэтому вообще $f^{(2n)}(0) = 0$. Для производных нечетного порядка имеем

$$f^{(2m+1)}(0) = -2m(2m-1)f^{(2m-1)}(0)$$

и, поскольку $f'(0) = 1$, получаем

$$f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m(2m)!.$$

Пример 28. *Ускорение.* Если $x = x(t)$ — зависимость от времени координаты движущейся вдоль числовой оси материальной точки, то $\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$ есть скорость точки, а тогда $\frac{d\dot{x}(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)$ есть ее ускорение в момент t.

Если $x(t) = \alpha t + \beta$, то $\dot{x}(t) = \alpha$, а $\ddot{x}(t) \equiv 0$, т. е. ускорение в равномерном движении равно нулю. Вскоре мы проверим, что если вторая производная функции равна нулю, то сама функция имеет вид $\alpha t + \beta$. Таким образом, в равномерных движениях и только в них ускорение равно нулю.

Но в том случае, если мы желаем, чтобы наблюдаемое из двух систем координат движущееся по инерции в пустом пространстве тело в обеих системах двигалось равномерно и прямолинейно, нужно, чтобы формулы перехода из одной инерциальной системы в другую были линейными. Именно по этой причине в примере 15 были выбраны линейные формулы (5) преобразования координат.

Пример 29. *Вторая производная простейшей неявно заданной функции.* Пусть $y = y(t)$ и $x = x(t)$ — дважды дифференцируемые функции. Предположим, что функция $x = x(t)$ имеет дифференцируемую обратную функцию $t = t(x)$, тогда величину $y(t)$ можно считать зависящей неявно от x, ибо $y = y(t) = y(t(x))$. Найдем вторую производную y''_{xx} в предположении, что $x'(t) \neq 0$.

По правилу дифференцирования такой функции, рассмотренному в пункте 5, имеем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

поэтому

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{y''_{tt}x'_t - y'_tx''_{tt}}{(x'_t)^2}}{x'_t} = \frac{x'_ty''_{tt} - x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Заметим, что явные выражения всех участвующих здесь функций, в том числе и y''_{xx}, зависят от t, но они дают возможность получить значение y''_{xx} в конкретной точке x после подстановки вместо t значения $t = t(x)$, отвечающего заданному значению x.

Например, если $y = e^t$, $x = \ln t$, то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^t}{1/t} = te^t, \qquad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{e^t + te^t}{1/t} = t(t+1)e^t.$$

Мы специально взяли простой пример, в котором можно явно выразить t через x, $t = e^x$, и, подставив $t = e^x$ в $y(t) = e^t$, найти явную зависимость $y = e^{e^x}$ от x. Дифференцируя последнюю функцию, можно проверить правильность полученных выше результатов.

Ясно, что так можно искать производные любого порядка, последовательно применяя формулу

$$y^{(n)}_{x^n} = \frac{\left(y^{(n-1)}_{x^{n-1}}\right)'_t}{x'_t}.$$

Задачи и упражнения

1. Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — заданные вещественные числа. Укажите многочлен $P_n(x)$ степени n, который в фиксированной точке $x_0 \in \mathbb{R}$ имеет производные $P_n^{(k)}(x_0) = \alpha_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

2. Вычислите $f'(x)$, если

a) $f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$

c) Проверьте, что функция из задачи a) бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, причем $f^{(n)}(0) = 0$.

d) Покажите, что производная функции из задачи b) определена на $\mathbb{R}$, но не является непрерывной функцией на $\mathbb{R}$.

e) Покажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1-x)^2}\right) & \text{при } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{при } \quad 1 \leqslant |x| \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$.

3. Пусть $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Покажите, что при $x \neq 0$

$$\frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

4. Пусть f — дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция. Покажите, что

a) если f — четная, то f' — нечетная функция;

b) если f — нечетная, то f' — четная функция;

c) (f' нечетна) $\Leftrightarrow$ (f четна).

5. Покажите, что

a) функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 в том и только в том случае, когда $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$, где $\varphi(x)$ — функция, непрерывная в x_0 (и в таком случае $\varphi(x_0) = f'(x_0)$);

b) если $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$ и $\varphi \in C^{(n-1)}(U(x_0))$, где $U(x_0)$ — окрестность точки x_0, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f^{(n)}(x_0)$ порядка n.

6. Приведите пример, показывающий, что в теореме 3 условие непрерывности f^{-1} в точке y_0 не является излишним.

7. a) Два тела с массами m_1 и m_2 соответственно перемещаются в пространстве только под действием сил взаимного притяжения. Используя законы Ньютона (формулы (1) и (2) из § 1), проверьте, что величина

$$E = \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2\right) + \left(-G \frac{m_1 m_2}{r}\right) =: K + U,$$

где v_1 и v_2 — скорости тел, а r — расстояние между ними, не меняется при таком движении.

b) Дайте физическую интерпретацию величины $E = K + U$ и ее составляющих.

c) Распространите результат на случай движения n тел.

§ 3. Основные теоремы дифференциального исчисления

1. Лемма Ферма и теорема Ролля

Определение 1. Точка $x_0 \in E \subset \mathbb{R}$ называется *точкой локального максимума* (*минимума*), а значение функции в ней — *локальным максимумом* (*минимумом*) функции $f\colon E \to \mathbb{R}$, если существует окрестность $U_E(x_0)$ точки x_0 в множестве E такая, что в любой точке $x \in U_E(x_0)$ имеем $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно, $f(x) \geqslant f(x_0)$).

Определение 2. Если в любой точке $x \in U_E(x_0) \setminus x_0 = \overset{\circ}{U}_E(x_0)$ имеет место строгое неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$), то точка $x_0 \in E$ называется *точкой строгого локального максимума* (*минимума*), а значение функции в ней — *строгим локальным максимумом* (*минимумом*) функции $f\colon E \to \mathbb{R}$.

Определение 3. Точки локального максимума и минимума называются точками *локального экстремума*, а значения функции в них — *локальными экстремумами функции*.

Пример 1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если} \quad -1 \leqslant x < 2, \\ 4, & \text{если} \quad 2 \leqslant x \end{cases}$$

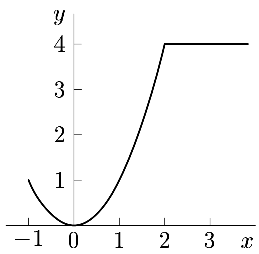


Рис. 20.

(рис. 20). Для этой функции

$x = -1$ — точка строгого локального максимума;

$x = 0$ — точка строгого локального минимума;

$x = 2$ — точка локального максимума;

$x > 2$ — точки экстремума, являющиеся одновременно точками и локального максимума, и локального минимума, поскольку здесь функция локально постоянна.

Пример 2. Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ на множестве $E = \mathbb{R} \setminus 0$.

Точки $x = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^{-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, являются точками строгого локального максимума, а точки $x = \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^{-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, — точками строгого локального минимума для $f(x)$ (см. рис. 12).

Определение 4. Точку $x_0 \in E$ экстремума функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ будем называть точкой *внутреннего экстремума*, если x_0 является предельной точкой как для множества $E_- = \{x \in E \mid x < x_0\}$, так и для множества $E_+ = \{x \in E \mid x > x_0\}$.

В примере 2 все точки экстремума являются точками внутреннего экстремума, а в примере 1 точка $x = -1$ не является точкой внутреннего экстремума.

Лемма 1 (Ферма). *Если функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке внутреннего экстремума $x_0 \in E$, то ее производная в этой точке равна нулю*: $f'(x_0) = 0$.

◀ По определению дифференцируемости функции в точке x_0

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+\alpha(x_0;h)h,$$

где $\alpha(x_0;h)\to 0$ при $h\to 0$, $x_0+h\in E$.

Перепишем это соотношение в виде

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\left[f'(x_0)+\alpha(x_0;h)\right]h. \tag{1}$$

Поскольку x_0 — точка экстремума, то левая часть равенства (1) либо неотрицательна, либо неположительна одновременно для всех достаточно близких к нулю значений h таких, что $x_0+h\in E$.

Если бы было $f'(x_0)\neq 0$, то при h достаточно близких к нулю величина $f'(x_0)+\alpha(x_0;h)$ имела бы тот же знак, что и $f'(x_0)$, ибо $\alpha(x_0;h)\to 0$ при $h\to 0$, $x_0+h\in E$.

Что же касается самого значения h, то оно может быть как положительным, так и отрицательным, коль скоро x_0 — точка внутреннего экстремума.

Таким образом, предположив, что $f'(x_0)\neq 0$, мы получаем, что правая часть (1) меняет знак при изменении знака h (если h достаточно близко к нулю), в то время как левая часть (1) не может менять знака (если h достаточно близко к нулю). Это противоречие завершает доказательство. ▶

Замечания к лемме Ферма. 1° Лемма Ферма дает, таким образом, необходимое условие внутреннего экстремума дифференцируемой функции. Для невнутренних экстремумов (как точка $x=-1$ в примере 1) утверждение о том, что $f'(x_0)=0$, вообще говоря, неверно.

2° Геометрически лемма вполне очевидна, ибо она утверждает, что в точке экстремума дифференцируемой функции касательная к ее графику горизонтальна (ведь $f'(x_0)$ есть тангенс угла наклона касательной к оси Ox).

3° Физически лемма означает, что при движении по прямой в момент начала возврата (экстремум!) скорость равна нулю.

Из доказанной леммы и теоремы о максимуме (минимуме) функции, непрерывной на отрезке, вытекает следующее

Утверждение 1 (теорема Ролля[1]). *Если функция* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *дифференцируема в интервале* $]a,b[$ *и* $f(a) = f(b)$, *то найдется точка* $\xi \in]a,b[$ *такая, что* $f'(\xi) = 0$.

◀ Поскольку функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то найдутся точки $x_m, x_M \in [a,b]$, в которых она принимает соответственно минимальное и максимальное из своих значений на этом отрезке. Если $f(x_m) = f(x_M)$, то функция постоянна на $[a,b]$, и поскольку в этом случае $f'(x) \equiv 0$, то утверждение, очевидно, выполнено. Если же $f(x_m) < f(x_M)$, то, поскольку $f(a) = f(b)$, одна из точек x_m, x_M обязана лежать в интервале $]a,b[$. Ее мы и обозначим через ξ. По лемме Ферма $f'(\xi) = 0$. ▶

2. Теоремы Лагранжа и Коши о конечном приращении. Следующее утверждение является одним из наиболее часто используемых и важных средств исследования числовых функций.

Теорема 1 (теорема Лагранжа о конечном приращении). *Если функция* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и дифференцируема в интервале* $]a,b[$, *то найдется точка* $\xi \in]a,b[$ *такая, что*

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).} \tag{2}$$

◀ Для доказательства рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a),$$

которая, очевидно, непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема в интервале $]a,b[$ и на его концах принимает равные значения: $F(a) = F(b) = f(a)$. Применяя к $F(x)$ теорему Ролля, найдем точку $\xi \in]a,b[$, в которой

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0. \quad ▶$$

Замечания к теореме Лагранжа. 1° Геометрически теорема Лагранжа означает (рис. 21), что в некоторой точке $(\xi, f(\xi))$, где $\xi \in]a,b[$, касательная к графику функции будет параллельна хорде, соединяющей точки $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, ибо угловой коэффициент последней равен $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

[1] М. Ролль (1652 – 1719) — французский математик.

2° Если x интерпретировать как время, а $f(b) - f(a)$ — как величину перемещения за время $b - a$ частицы, движущейся вдоль прямой, то теорема Лагранжа означает, что скорость $f'(x)$ частицы в некоторый момент $\xi \in]a, b[$ такова, что если бы в течение всего промежутка времени $[a, b]$ частица двигалась с постоянной скоростью $f'(\xi)$, то она сместилась бы на ту же величину $f(b) - f(a)$. Величину $f'(\xi)$ естественно считать средней скоростью движения в промежутке $[a, b]$.

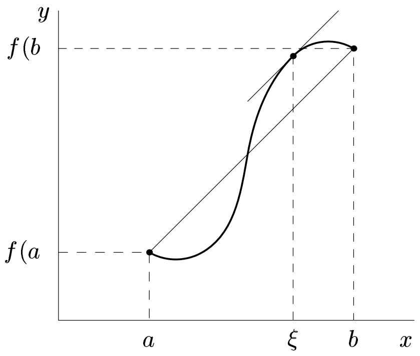


Рис. 21.

3° Отметим, однако, что при движении не по прямой средней скорости в смысле замечания 2° может не быть. Действительно, пусть, например, частица движется по окружности единичного радиуса с постоянной угловой скоростью $\omega = 1$. Закон ее движения, как мы знаем, можно записать в виде

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin t).$$

Тогда

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{v}(t) = (-\sin t, \cos t)$$

и $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$.

В моменты $t = 0$ и $t = 2\pi$ частица находится в одной и той же точке плоскости $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}(2\pi) = (1, 0)$, и равенство

$$\boldsymbol{r}(2\pi) - \boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{v}(\xi)(2\pi - 0)$$

означало бы, что $\boldsymbol{v}(\xi) = 0$, но это невозможно.

Однако мы сознаем, что зависимость между перемещением за некоторый промежуток времени и скоростью движения все же имеется. Она состоит в том, что даже вся длина L пройденного пути не может превышать максимальной по величине скорости, умноженной на время в пути. Сказанное можно записать в следующей более точной форме:

$$\boxed{|\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a)| \leqslant \sup_{t \in]a,b[} |\dot{\boldsymbol{r}}(t)||b - a|.} \tag{3}$$

Как будет в свое время показано, это естественное неравенство действительно всегда справедливо. Его тоже называют теоремой Лагранжа о конечном приращении, а формулу (2), справедливую только для числовых функций, часто называют теоремой Лагранжа *о среднем значении* (роль среднего в данном случае играет как величина $f'(\xi)$ скорости, так и точка ξ, лежащая между a и b).

4° Теорема Лагранжа важна тем, что она связывает приращение функции на конечном отрезке с производной функции на этом отрезке. До сих пор мы не имели такой теоремы о конечном приращении и характеризовали только локальное (бесконечно малое) приращение функции через производную или дифференциал в фиксированной точке.

Следствия теоремы Лагранжа

Следствие 1 (признак монотонности функции). *Если в любой точке некоторого интервала производная функции неотрицательна* (*положительна*)*, то функция не убывает* (*возрастает*) *на этом интервале.*

◀ Действительно, если x_1, x_2 — две точки нашего интервала и $x_1 < x_2$, т. е. $x_2 - x_1 > 0$, то по формуле (2)

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad \text{где} \quad x_1 < \xi < x_2,$$

и, таким образом, знак разности, стоящей в левой части равенства, совпадает со знаком $f'(\xi)$. ▶

Разумеется, аналогичное утверждение можно высказать о невозрастании (убывании) функции с неположительной (отрицательной) производной.

Замечание. На основании теоремы об обратной функции и следствия 1, в частности, можно заключить, что если на каком-то промежутке I числовая функция $f(x)$ имеет положительную или отрицательную производную, то функция f непрерывна на I, монотонна на I, имеет обратную функцию f^{-1}, определенную на промежутке $I' = f(I)$ и дифференцируемую на нем.

Следствие 2 (критерий постоянства функции). *Непрерывная на отрезке* $[a, b]$ *функция постоянна на нем тогда и только тогда, когда ее производная равна нулю в любой точке отрезка* $[a, b]$ (*или хотя бы интервала* $]a, b[$).

◀ Интерес представляет только доказательство того факта, что если $f'(x) \equiv 0$ на $]a, b[$, то для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ имеет место равенство

$f(x_1) = f(x_2)$. Но это вытекает из теоремы Лагранжа, по которой

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0,$$

ибо ξ лежит между x_1 и x_2, т. е. $\xi \in]a,b[$ и $f'(\xi) = 0$. ►

Замечание. Отсюда, очевидно, можно сделать следующий (как мы увидим, очень важный для интегрального исчисления) вывод: *если производные $F_1'(x)$, $F_2'(x)$ двух функций $F_1(x)$, $F_2(x)$ совпадают на некотором промежутке, т. е. $F_1'(x) \equiv F_2'(x)$, то на этом промежутке разность $F_1(x) - F_2(x)$ есть постоянная функция.*

Полезным обобщением теоремы Лагранжа, которое тоже основано на теореме Ролля, является следующее

Утверждение 2 (теорема Коши о конечном приращении)**.** *Пусть $x = x(t)$ и $y = y(t)$ — функции, непрерывные на отрезке $[\alpha, \beta]$ и дифференцируемые в интервале $]\alpha, \beta[$.*

Тогда найдется точка $\tau \in]\alpha, \beta[$ такая, что

$$x'(\tau)(y(\beta) - y(\alpha)) = y'(\tau)(x(\beta) - x(\alpha)).$$

Если к тому же $x'(t) \neq 0$ при любом $t \in]\alpha, \beta[$, то $x(\alpha) \neq x(\beta)$ и справедливо равенство

$$\frac{y(\beta) - y(\alpha)}{x(\beta) - x(\alpha)} = \frac{y'(\tau)}{x'(\tau)}. \tag{4}$$

◄ Функция $F(t) = x(t)(y(\beta) - y(\alpha)) - y(t)(x(\beta) - x(\alpha))$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля на отрезке $[\alpha, \beta]$, поэтому найдется точка $\tau \in$ $\in]\alpha, \beta[$, в которой $F'(\tau) = 0$, что равносильно доказываемому равенству. Чтобы получить из него соотношение (4), остается заметить, что если $x'(t) \neq 0$ на $]\alpha, \beta[$, то по той же теореме Ролля $x(\alpha) \neq x(\beta)$. ►

Замечания к теореме Коши. 1° Если пару функций $x(t)$, $y(t)$ рассматривать как закон движения частицы, то $(x'(t), y'(t))$ есть вектор ее скорости в момент t, а $(x(\beta) - x(\alpha), y(\beta) - y(\alpha))$ есть вектор ее смещения за промежуток времени $[\alpha, \beta]$, и теорема утверждает, что в некоторый момент $\tau \in [\alpha, \beta]$ эти векторы коллинеарны. Однако этот факт, относящийся к движению в плоскости, является таким же приятным исключением, каким является теорема о средней скорости в случае движения по прямой. В самом деле, представьте себе частицу, равномерно поднимающуюся по винтовой линии. Ее скорость составляет постоянный ненулевой угол с вертикалью, в то время как вектор смещения может быть и вертикальным (один виток).

2° Формулу Лагранжа можно получить из формулы Коши, если в последней положить $x = x(t) = t$, $y(t) = y(x) = f(x)$, $\alpha = a$, $\beta = b$.

3. Формула Тейлора. Из той части дифференциального исчисления, которая уже изложена к настоящему моменту, могло возникнуть верное представление о том, что чем больше производных (включая производную нулевого порядка) совпадает у двух функций в некоторой точке, тем лучше эти функции аппроксимируют друг друга в окрестности этой точки. Мы в основном интересовались и сейчас будем интересоваться приближением функции в окрестности некоторой точки с помощью многочлена $P_n(x) = P_n(x_0; x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n$. Нам известно (см. пример 25 из § 2, п. 6), что алгебраический полином можно представить в виде

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

т. е. $c_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. В этом легко убедиться непосредственно.

Таким образом, если нам будет дана функция $f(x)$, имеющая в точке x_0 все производные до порядка n включительно, то мы можем немедленно выписать полином

$$P_n(x_0; x) = P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad (5)$$

производные которого до порядка n включительно в точке x_0 совпадают с производными соответствующего порядка функции $f(x)$ в точке x_0.

Определение 5. Алгебраический полином, заданный соотношением (5), называется *полиномом Тейлора*[1] *порядка n функции $f(x)$ в точке x_0*.

[1] Б. Тейлор (1685 – 1731) — английский математик.

Нас будет интересовать величина

$$f(x) - P_n(x_0; x) = r_n(x_0; x) \tag{6}$$

уклонения полинома $P_n(x)$ от функции $f(x)$, называемая часто *остатком*, точнее, *n-м остатком* или *n-м остаточным членом формулы Тейлора*:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x_0; x).} \tag{7}$$

Само по себе равенство (7), конечно, не представляет интереса, если о функции $r_n(x_0; x)$ не известно ничего, кроме ее определения (6).

Сейчас мы воспользуемся довольно искусственным приемом для получения информации об остаточном члене. Более естественный путь к этому даст интегральное исчисление.

Теорема 2. *Если на отрезке с концами x_0, x функция f непрерывна вместе с первыми n своими производными, а во внутренних точках этого отрезка она имеет производную порядка $n+1$, то при любой функции φ, непрерывной на этом отрезке и имеющей отличную от нуля производную в его внутренних точках, найдется точка ξ, лежащая между x_0 и x, такая, что*

$$\boxed{r_n(x_0; x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi) n!} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.} \tag{8}$$

◀ На отрезке I с концами x_0, x рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x) - P_n(t; x) \tag{9}$$

от аргумента t. Запишем определение $F(t)$ подробнее:

$$F(t) = f(x) - \left[f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n \right]. \tag{10}$$

Из определения функции $F(t)$ и условий теоремы видно, что F непрерывна на отрезке I и дифференцируема в его внутренних точках, причем

$$F'(t) = -\left[f'(t) - \frac{f'(t)}{1!} + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \right.$$
$$\left. + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right] = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Применяя к паре функций $F(t)$, $\varphi(t)$ на отрезке I теорему Коши (см. соотношение (4)), находим точку ξ между x_0 и x, в которой

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Подставляя сюда выражение для $F'(\xi)$ и замечая из сопоставления формул (6), (9) и (10), что $F(x) - F(x_0) = 0 - F(x_0) = -r_n(x_0; x)$, получаем формулу (8). ►

Полагая в (8) $\varphi(t) = x - t$, получаем

Следствие 1 (формула Коши остаточного члена)**.**

$$\boxed{r_n(x_0; x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n (x - x_0).} \tag{11}$$

Особенно изящная формула получается, если положить в соотношении (8) $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$:

Следствие 2 (формула Лагранжа остаточного члена)**.**

$$\boxed{r_n(x_0; x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}.} \tag{12}$$

Отметим, что формулу (7) Тейлора при $x_0 = 0$ часто называют *формулой Маклорена*[1)].

Рассмотрим примеры.

Пример 3. Для функции $f(x) = e^x$ при $x_0 = 0$ формула Тейлора имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + r_n(0; x), \tag{13}$$

[1)] К. Маклорен (1698–1746) — английский математик.

и на основании равенства (12) можно считать, что

$$r_n(0;x) = \frac{1}{(n+1)!}e^{\xi} \cdot x^{n+1},$$

где $|\xi| < |x|$.

Таким образом,

$$|r_n(0;x)| = \frac{1}{(n+1)!}e^{\xi} \cdot |x|^{n+1} < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|}. \tag{14}$$

Но при любом фиксированном $x \in \mathbb{R}$, если $n \to \infty$, величина $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, как нам известно (см. пример 12 из гл. III, § 1, п. 3b), стремится к нулю. Значит, из оценки (14) и определения суммы ряда вытекает, что для $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots \tag{15}$$

Пример 4. Аналогично получаем разложение функции a^x для любого a, $0 < a$, $a \neq 1$:

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{\ln^2 a}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\ln^n a}{n!}x^n + \ldots$$

Пример 5. Пусть $f(x) = \sin x$. Нам известно (см. пример 18 из § 2, п. 6), что $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$, $n \in \mathbb{N}$, поэтому из формулы (12) Лагранжа при $x_0 = 0$ и любом $x \in \mathbb{R}$ находим

$$r_n(0;x) = \frac{1}{(n+1)!}\sin\left(\xi + \frac{\pi}{2}(n+1)\right)x^{n+1}, \tag{16}$$

откуда следует, что для любого фиксированного значения $x \in \mathbb{R}$ величина $r_n(0;x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Таким образом, при любом $x \in \mathbb{R}$ справедливо разложение

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots \tag{17}$$

Пример 6. Аналогично, для функции $f(x) = \cos x$ получаем

$$r_n(0;x) = \frac{1}{(n+1)!}\cos\left(\xi + \frac{\pi}{2}(n+1)\right)x^{n+1} \tag{18}$$

и

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \ldots \tag{19}$$

Пример 7. Поскольку $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$, $\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$, для функции $f(x) = \operatorname{sh} x$ при $x_0 = 0$ из формулы (12) получаем

$$r_n(0; x) = \frac{1}{(n+1)!}\varphi(\xi)x^{n+1},$$

где $\varphi(\xi) = \operatorname{sh}\xi$, если n четно, и $\varphi(\xi) = \operatorname{ch}\xi$, если n нечетно. В любом случае $|\varphi(\xi)| \leqslant \max\{|\operatorname{sh} x|, |\operatorname{ch} x|\} = \operatorname{ch} x$, ибо $|\xi| < |x|$. Значит, для любого фиксированного значения $x \in \mathbb{R}$ выполняется $r_n(0; x) \to 0$ при $n \to \infty$, и мы получаем разложение

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots, \tag{20}$$

справедливое для любого $x \in \mathbb{R}$.

Пример 8. Аналогично получаем разложение

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \ldots, \tag{21}$$

справедливое для любого значения $x \in \mathbb{R}$.

Пример 9. Для функции $f(x) = \ln(1+x)$ имеем $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, поэтому формула Тейлора (7) при $x_0 = 0$ для этой функции имеет вид

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + r_n(0; x). \tag{22}$$

На сей раз представим $r_n(0; x)$ по формуле Коши (11):

$$r_n(0; x) = \frac{1}{n!}\frac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^{n+1}}(x-\xi)^n x,$$

или

$$r_n(0; x) = (-1)^n \left(\frac{x-\xi}{1+\xi}\right)^n \frac{x}{1+\xi}, \tag{23}$$

где точка ξ лежит между 0 и x.

Если $|x| < 1$, то из условия, что ξ лежит между 0 и x, следует, что

$$\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right| = \frac{|x|-|\xi|}{|1+\xi|} \leqslant \frac{|x|-|\xi|}{1-|\xi|} = 1 - \frac{1-|x|}{1-|\xi|} \leqslant 1 - \frac{1-|x|}{1-|0|} = |x|. \tag{24}$$

Таким образом, при $|x| < 1$

$$|r_n(0;x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}, \tag{25}$$

и, следовательно, при $|x| < 1$ справедливо разложение

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \ldots \tag{26}$$

Заметим, что вне отрезка $|x| \leqslant 1$ ряд, стоящий справа в (26), всюду расходится, так как его общий член не стремится к нулю, если $|x| > 1$.

Пример 10. Если $f(x) = (1+x)^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, то $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\times \times \ldots \times (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, поэтому формула Тейлора (7) при $x_0 = 0$ для этой функции имеет вид

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + {} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + r_n(0;x). \tag{27}$$

Используя формулу Коши (11), находим

$$r_n(0;x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}(x-\xi)^n x, \tag{28}$$

где ξ лежит между 0 и x.

Если $|x| < 1$, то, используя оценку (24), имеем

$$|r_n(0;x)| \leqslant \left|\alpha\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\ldots\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right|(1+\xi)^{\alpha-1}|x|^{n+1}. \tag{29}$$

При увеличении n на единицу правая часть неравенства (29) умножается на $\left|\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)x\right|$. Но поскольку $|x| < 1$, то при достаточно больших значениях n, независимо от значения α, будем иметь $\left|\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)x\right| < < q < 1$, если $|x| < q < 1$.

Отсюда следует, что при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ и любом x из интервала $|x|<1$ выполнено $r_n(0;x) \to 0$, когда $n \to \infty$; поэтому на интервале $|x| < 1$ справедливо полученное Ньютоном разложение (*бином Ньютона*)

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots \tag{30}$$

Заметим, что, как следует из признака Даламбера (см. гл. III, § 1, п. 4b), при $|x| > 1$ ряд (30) вообще расходится, если только $\alpha \notin \mathbb{N}$.

Рассмотрим теперь особо случай, когда $\alpha = n \in \mathbb{N}$.

В этом случае функция $f(x) = (1+x)^\alpha = (1+x)^n$ является полиномом степени n, и поэтому все ее производные порядка выше чем n равны нулю. Таким образом, формула Тейлора (7) и, например, формула Лагранжа (12) позволяют записать следующее равенство:

$$(1+x)^n = 1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{n!}x^n, \tag{31}$$

представляющее собой известную из школы формулу бинома Ньютона для натурального показателя:

$$(1+x)^n = 1+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n.$$

Итак, мы определили формулу Тейлора (7) и получили вид (8), (11), (12) остаточного члена формулы Тейлора. Мы получили соотношения (14), (16), (18), (25), (29), позволяющие оценивать погрешность вычисления важных элементарных функций по формуле Тейлора. Наконец, мы получили разложения этих функций в степенные ряды.

Определение 6. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные любого порядка $n \in \mathbb{N}$, то ряд

$$f(x_0)+\frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\ldots$$

называется *рядом Тейлора* функции f в точке x_0.

Не следует думать, что ряд Тейлора каждой бесконечно дифференцируемой функции сходится в некоторой окрестности точки x_0, ибо для любой последовательности $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ чисел можно построить (это не совсем просто) функцию $f(x)$ такую, что $f^{(n)}(x_0) = c_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Не следует также думать, что если ряд Тейлора сходится, то он обязательно сходится к породившей его функции. Сходимость ряда Тейлора к породившей его функции имеет место только для так называемых *аналитических функций.*

Вот пример Коши неаналитической функции:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Исходя из определения производной и того, что $x^k e^{-1/x^2} \to 0$ при $x \to 0$ независимо от значения k (см. пример 30 из § 2 гл. III), можно проверить, что $f^{(n)}(0) = 0$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$ Таким образом, ряд Тейлора в данном случае состоит только из нулевых членов и его сумма тождественно равна нулю, в то время как $f(x) \neq 0$ при $x \neq 0$.

В заключение остановимся на локальном варианте формулы Тейлора.

Вернемся снова к задаче о локальном приближении функции $f\colon E \to \to \mathbb{R}$ полиномом, которую мы начали обсуждать в § 1, п. 3. Мы хотим подобрать полином $P_n(x_0; x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n$ так, чтобы иметь

$$f(x) = P_n(x_0; x) + o((x - x_0)^n) \quad \text{при} \quad x \to x_0,\ x \in E,$$

или, подробнее,

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \\ \text{при} \quad x \to x_0,\ x \in E. \quad (32)$$

Сформулируем в явном виде по существу уже доказанное

Утверждение 3. *Если удовлетворяющий условию* (32) *полином* $P_n(x_0; x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n$ *существует, то он единственный.*

◄ Действительно, из условия (32) последовательно и вполне однозначно (в силу единственности предела) находятся коэффициенты полинома

$$c_0 = \lim_{E \ni x \to x_0} f(x),$$

$$c_1 = \lim_{E \ni x \to x_0} \frac{f(x) - c_0}{x - x_0},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$c_n = \lim_{E \ni x \to x_0} \frac{f(x) - \left[c_0 + \ldots + c_{n-1}(x - x_0)^{n-1}\right]}{(x - x_0)^n}. \quad \blacktriangleright$$

Докажем теперь следующее

Утверждение 4 (локальная формула Тейлора). *Пусть E — отрезок с концом $x_0 \in \mathbb{R}$. Если функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ имеет в точке x_0 все производные $f'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ до порядка n включительно, то справедливо следующее представление*:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ + o((x - x_0)^n) \quad \textit{при} \quad x \to x_0,\ x \in E. \quad (33)$$

Таким образом, задачу локального приближения дифференцируемой функции решает полином Тейлора соответствующего порядка.

Поскольку полином Тейлора $P_n(x_0; x)$ строится из условия совпадения всех его производных до порядка n включительно с производными соответствующего порядка функции f в точке x_0, то $f^{(k)}(x_0) - P_n^{(k)}(x_0; x_0) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ и справедливость формулы (33) устанавливает следующая

Лемма 2. *Если функция $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$, определенная на отрезке E с концом x_0, такова, что она имеет в точке x_0 все производные до порядка n включительно и $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \ldots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0$, то $\varphi(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$, $x \in E$.*

◀ При $n = 1$ утверждение вытекает из определения дифференцируемости функции φ в точке x_0, в силу которого

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{при} \quad x \to x_0,\ x \in E,$$

и, поскольку $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$, имеем

$$\varphi(x) = o(x - x_0) \quad \text{при} \quad x \to x_0,\ x \in E.$$

Предположим, что утверждение доказано для порядков $n = k - 1 \geqslant \geqslant 1$. Покажем, что тогда оно справедливо также для порядка $n = k \geqslant 2$.

Заметим предварительно, что поскольку

$$\varphi^{(k)}(x_0) = \left(\varphi^{(k-1)}\right)'(x_0) = \lim_{E \ni x \to x_0} \frac{\varphi^{(k-1)}(x) - \varphi^{(k-1)}(x_0)}{x - x_0},$$

то существование $\varphi^{(k)}(x_0)$ предполагает, что функция $\varphi^{(k-1)}(x)$ определена на E хотя бы вблизи точки x_0. Уменьшая, если нужно, отрезок E, можно заранее считать, что функции $\varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(k-1)}(x)$, где $k \geqslant 2$, определены на всем отрезке E с концом x_0. Поскольку $k \geqslant 2$, то функция $\varphi(x)$ имеет на E производную $\varphi'(x)$ и по условию

$$(\varphi')'(x_0) = \ldots = (\varphi')^{(k-1)}(x_0) = 0.$$

Таким образом, по предположению индукции

$$\varphi'(x) = o\left((x - x_0)^{k-1}\right) \quad \text{при} \quad x \to x_0,\ x \in E.$$

Тогда, используя теорему Лагранжа, получаем

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi)(x - x_0) = \alpha(\xi)(\xi - x_0)^{k-1}(x - x_0),$$

где ξ — точка, лежащая между x_0 и x, т. е. $|\xi - x_0| < |x - x_0|$, а $\alpha(\xi) \to 0$ при $\xi \to E,\ \xi \in E$. Значит, при $x \to x_0,\ x \in E$ одновременно будем иметь $\xi \to E,\ \xi \in E$ и $\alpha(\xi) \to 0$, и поскольку

$$|\varphi(x)| \leqslant |\alpha(\xi)||x - x_0|^{k-1}|x - x_0|,$$

то проверено, что

$$\varphi(x) = o\left((x - x_0)^k\right) \quad \text{при} \quad x \to x_0,\ x \in E.$$

Таким образом, утверждение леммы 2 проверено принципом математической индукции. ►

Соотношение (33) называется *локальной формулой Тейлора*, поскольку указанный в нем вид остаточного члена (так называемая *форма Пеано*)

$$r_n(x_0; x) = o((x - x_0)^n) \tag{34}$$

позволяет делать заключения только об асимптотическом характере связи полинома Тейлора и функции при $x \to x_0$, $x \in E$.

Формула (33) удобна, таким образом, при вычислении пределов и описании асимптотики функции при $x \to x_0$, $x \in E$, но она не может служить для приближенного вычисления значений функции до тех пор, пока нет фактической оценки величины $r_n(x_0; x) = o((x - x_0)^n)$.

Подведем итоги. Мы определили полином Тейлора

$$P_n(x_0; x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

написали формулу Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x_0; x)$$

и получили следующие ее важнейшие конкретизации:

Если f имеет производную порядка $n + 1$ в интервале с концами x_0, x, то

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad (35)$$

где ξ — точка, лежащая между x_0 и x.

Если f имеет в точке x_0 все производные до порядка $n \geqslant 1$ включительно, то

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \quad (36)$$

Соотношение (35), называемое *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*, очевидно, является обобщением теоремы Лагранжа, в которую оно превращается при $n = 0$.

Соотношение (36), называемое *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*, очевидно, является обобщением определения дифференцируемости функции в точке, в которое оно переходит при $n = 1$.

Заметим, что формула (35) практически всегда более содержательна, ибо, с одной стороны, как мы видели, она позволяет оценивать абсолютную величину остаточного члена, а с другой, например, при ограниченности $f^{(n+1)}(x)$ в окрестности x_0 из нее вытекает также асимптотическая формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ + O\left((x - x_0)^{n+1}\right). \quad (37)$$

Так что для бесконечно дифференцируемых функций, с которыми в подавляющем большинстве случаев имеет дело классический анализ, формула (35) содержит в себе локальную формулу (36).

В частности, на основании формулы (37) и разобранных выше примеров 3 – 10 можно теперь выписать следующую таблицу асимптотических формул при $x \to 0$:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + O\left(x^{n+1}\right),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + O\left(x^{2n+2}\right),$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + O\left(x^{2n+3}\right),$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + O\left(x^{2n+2}\right),$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + O\left(x^{2n+3}\right),$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + O\left(x^{n+1}\right),$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n + \\ + O\left(x^{n+1}\right).$$

Рассмотрим теперь еще некоторые примеры использования формулы Тейлора.

Пример 11. Напишем полином, позволяющий вычислять значения функции $\sin x$ на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ с абсолютной погрешностью, не превышающей 10^{-3}.

В качестве такого многочлена можно взять тейлоровский многочлен подходящей степени, получаемый разложением функции $\sin x$ в окрестности точки $x_0 = 0$. Поскольку

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + 0 \cdot x^{2n+2} + r_{2n+2}(0; x),$$

где по формуле Лагранжа

$$r_{2n+2}(0; x) = \frac{\sin\left(\xi + \frac{\pi}{2}(2n+3)\right)}{(2n+3)!}x^{2n+3},$$

то при $|x| \leqslant 1$

$$|r_{2n+2}(0; x)| \leqslant \frac{1}{(2n+3)!}.$$

Но $\frac{1}{(2n+3)!} < 10^{-3}$ при $n \geqslant 2$. Таким образом, с нужной точностью на отрезке $|x| \leqslant 1$ имеем $\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$.

Пример 12. Покажем, что $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$. Имеем

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}' x &= \cos^{-2} x,\\
\operatorname{tg}'' x &= 2\cos^{-3} x \sin x,\\
\operatorname{tg}''' x &= 6\cos^{-4} x \sin^2 x + 2\cos^{-2} x.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{tg}' 0 = 1$, $\operatorname{tg}'' 0 = 0$, $\operatorname{tg}''' 0 = 2$ и написанное соотношение следует из локальной формулы Тейлора.

Пример 13. Пусть $\alpha > 0$. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\cos\frac{1}{n^\alpha}$. При $\alpha > 0$ $\frac{1}{n^\alpha} \to 0$, когда $n \to \infty$. Оценим порядок члена ряда

$$\ln\cos\frac{1}{n^\alpha} = \ln\left(1 - \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).$$

Таким образом, мы имеем знакопостоянный ряд, члены которого эквивалентны членам ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2n^{2\alpha}}$. Поскольку последний ряд сходится только при $\alpha > \frac{1}{2}$, то в указанной области $\alpha > 0$ исходный ряд сходится лишь при $\alpha > \frac{1}{2}$ (см. задачу 16b)).

Пример 14. Покажем, что $\ln\cos x = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + O\left(x^8\right)$ при $x \to 0$.

На сей раз, вместо того чтобы вычислять подряд шесть производных, мы воспользуемся уже известными разложениями $\cos x$ при $x \to 0$ и $\ln(1+u)$ при $u \to 0$:

$$\ln\cos x = \ln\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + O(x^8)\right) = \ln(1+u) =$$

$$= u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + O(u^4) = \left(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + O(x^8)\right) -$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2!)^2}x^4 - 2\cdot\frac{1}{2!\,4!}x^6 + O(x^8)\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{(2!)^3}x^6 + O(x^8)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + O(x^8).$$

Пример 15. Найдем значения первых шести производных функции $\ln\cos x$ при $x = 0$.

Имеем $(\ln\cos)'x = \frac{-\sin x}{\cos x}$, и потому ясно, что в нуле данная функция имеет производные любого порядка, ибо $\cos 0 \neq 0$. Мы не станем искать функциональные выражения этих производных, а воспользуемся единственностью полинома Тейлора и результатом предыдущего примера.

Если

$$f(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n + o(x^n) \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

то

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \qquad \text{и} \qquad f^{(k)}(0) = k!\,c_k.$$

Таким образом, в нашем случае получаем

$$(\ln\cos)(0) = 0, \qquad (\ln\cos)'(0) = 0, \qquad (\ln\cos)''(0) = -\frac{1}{2}\cdot 2!,$$

$$(\ln\cos)^{(3)}(0) = 0, \qquad (\ln\cos)^{(4)}(0) = -\frac{1}{12}\cdot 4!,$$

$$(\ln\cos)^{(5)}(0) = 0, \qquad (\ln\cos)^{(6)}(0) = -\frac{1}{45}\cdot 6!.$$

Пример 16. Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая в точке $x_0 = 0$ функция, и пусть известно разложение

$$f'(x) = c'_0 + c'_1x + \ldots + c'_nx^n + O\left(x^{n+1}\right)$$

ее производной в окрестности нуля. Тогда из единственности тейлоровского разложения имеем

$$(f')^{(k)}(0) = k!\, c'_k,$$

поэтому $f^{(k+1)}(0) = k!\, c'_k$. Таким образом, для самой функции $f(x)$ имеем разложение

$$f(x) = f(0) + \frac{c'_0}{1!}x + \frac{1!\, c'_1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n!\, c'_n}{(n+1)!}x^{n+1} + O\left(x^{n+2}\right),$$

или, после упрощений,

$$f(x) = f(0) + \frac{c'_0}{1}x + \frac{c'_1}{2}x^2 + \ldots + \frac{c'_n}{n+1}x^{n+1} + O\left(x^{n+2}\right).$$

Пример 17. Найдем тейлоровское разложение функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ в нуле.

Поскольку $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \left(1+x^2\right)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + O\left(x^{2n+2}\right)$, то по соображениям, изложенным в предыдущем примере,

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1}x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + O\left(x^{2n+3}\right),$$

т. е.

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + O\left(x^{2n+3}\right).$$

Пример 18. Аналогично, раскладывая по формуле Тейлора функцию $\arcsin' x = (1-x^2)^{-1/2}$ в окрестности нуля, последовательно находим

$$(1+u)^{-1/2} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}u + \\ + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}u^2 + \ldots + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}u^n + O\left(u^{n+1}\right),$$

$$\left(1-x^2\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n} + \\ + O\left(x^{2n+2}\right),$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!\cdot 5}x^5 + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)}x^{2n+1} + \\ + O\left(x^{2n+3}\right),$$

или, после элементарных преобразований,

$$\arcsin x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{[3!!]^2}{5!}x^5 + \ldots + \frac{[(2n-1)!!]^2}{(2n+1)!}x^{2n+1} + O\left(x^{2n+3}\right).$$

Здесь $(2n-1)!! := 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)$, $(2n)!! := 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)$.

Пример 19. Воспользуемся результатами примеров 5, 12, 17, 18 и найдем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \arcsin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[x - \frac{1}{3}x^3 + O(x^5)\right] - \left[x - \frac{1}{3!}x^3 + O(x^5)\right]}{\left[x + \frac{1}{3}x^3 + O(x^5)\right] - \left[x + \frac{1}{3!}x^3 + O(x^5)\right]} = \\ = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3 + O(x^5)}{\frac{1}{6}x^3 + O(x^5)} = -1.$$

Задачи и упражнения

1. Подберите числа a и b так, чтобы функция $f(x) = \cos x - \dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$ при $x\to 0$ была бесконечно малой возможно более высокого порядка.

2. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\frac{1}{e} - \left(\frac{x}{x+1}\right)^x\right]$.

3. Напишите полином Тейлора функции e^x в нуле, который позволял бы вычислять значения e^x на отрезке $-1\leqslant x\leqslant 2$ с точностью до 10^{-3}.

4. Пусть f — бесконечно дифференцируемая в нуле функция. Покажите, что

a) если f четная, то ее ряд Тейлора в нуле содержит только четные степени x;

b) если f нечетная, то ее ряд Тейлора в нуле содержит только нечетные степени x.

5. Покажите, что если $f\in C^{(\infty)}[-1,1]$, $f^{(n)}(0)=0$ для $n=0,1,2,\ldots$ и существует число C такое, что $\sup\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant n!C$, $n\in\mathbb{N}$, то $f\equiv 0$ на $[-1,1]$.

6. Пусть $f\in C^{(n)}\big(\,]-1,1[\,\big)$ и $\sup\limits_{-1<x<1}|f(x)|\leqslant 1$. Пусть $m_k(I) = \inf\limits_{x\in I}\left|f^{(k)}(x)\right|$, где I — промежуток, содержащийся в интервале $]-1,1[$. Покажите, что

a) если I разбит на три последовательных промежутка I_1, I_2, I_3 и μ — длина I_2, то

$$m_k(I) \leqslant \frac{1}{\mu}\left(m_{k-1}(I_1) + m_{k-1}(I_3)\right);$$

b) если I имеет длину λ, то

$$m_k(I) \leqslant \frac{2^{k(k+1)/2}k^k}{\lambda^k};$$

c) существует такое число α_n, зависящее только от n, что если $|f'(0)| \geqslant \alpha_n$, то уравнение $f^{(n)}(x) = 0$ имеет в $]-1,1[$ по крайней мере $n-1$ различных корней.

Указание. В b) используйте a) и принцип индукции; в c) используйте a) и по индукции докажите, что существует такая последовательность $x_{k_1} < x_{k_2} < \ldots < x_{k_k}$ точек интервала $]-1,1[$, что $f^{(k)}(x_{k_i}) \cdot f^{(k)}(x_{k_{i+1}}) < 0$ при $1 \leqslant i \leqslant k-1$.

7. Покажите, что если функция f определена и дифференцируема на интервале I и $[a,b] \subset I$, то

a) функция $f'(x)$ (даже не будучи непрерывной!) принимает на $[a,b]$ все значения между $f'(a)$ и $f'(b)$ (*теорема Дарбу*[1]);

b) если еще $f''(x)$ существует в $]a,b[$, то найдется точка $\xi \in\,]a,b[$ такая, что $f'(b) - f'(a) = f''(\xi)(b-a)$.

8. Функция $f(x)$ может быть дифференцируемой на всей числовой прямой, но при этом $f'(x)$ может не быть непрерывной (см. пример 7 из § 1, п. 5).

a) Покажите, что функция $f'(x)$ может иметь разрывы только второго рода.

b) Укажите ошибку в следующем «доказательстве» непрерывности $f'(x)$.

◀ Пусть x_0 — произвольная точка на $\mathbb{R}$ и $f'(x_0)$ — производная функции f в точке x_0. По определению производной и теореме Лагранжа

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} f'(\xi) = \lim_{\xi\to x_0} f'(\xi),$$

где ξ — точка между x_0 и x, стремящаяся, таким образом, к x_0 при $x \to x_0$. ▶

9. Пусть f — дважды дифференцируемая функция на промежутке I. Пусть $M_0 = \sup\limits_{x\in I}|f(x)|$, $M_1 = \sup\limits_{x\in I}|f'(x)|$, $M_2 = \sup\limits_{x\in I}|f''(x)|$. Покажите, что

a) если $I = [-a,a]$, то

$$|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{a} + \frac{x^2+a^2}{2a}M_2;$$

[1] Г. Дарбу (1842–1917) — французский математик.

b) $\begin{cases} M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}, & \text{если длина } I \text{ не меньше } 2\sqrt{M_0/M_2}, \\ M_1 \leqslant \sqrt{2M_0 M_2}, & \text{если } I = \mathbb{R}; \end{cases}$

c) в задаче b) числа 2 и $\sqrt{2}$ не могут быть заменены меньшими;

d) если f дифференцируема p раз в $\mathbb{R}$ и если величины M_0 и $M_p = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f^{(p)}(x)|$ конечны, то при $1 \leqslant k \leqslant p$ конечны также величины $M_k = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$ и

$$M_k \leqslant 2^{k(p-k)/2} M_0^{1-k/p} M_p^{k/p}.$$

Указание. Используйте задачи 6b), 9b) и принцип индукции.

10. Покажите, что если функция f имеет в точке x_0 все производные до порядка $n+1$ включительно и $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, то в остаточном члене формулы Тейлора, записанном в форме Лагранжа

$$r_n(x_0; x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^n,$$

где $0 < \theta < 1$, величина $\theta = \theta(x)$ стремится к $\dfrac{1}{n+1}$ при $x \to x_0$.

11. Пусть f — функция, n раз дифференцируемая на промежутке I. Покажите, что

a) Если f в $(n+1)$ точках промежутка I обращается в нуль, то найдется точка $\xi \in I$ такая, что $f^{(n)}(\xi) = 0$.

b) Если $x_1, x_2, \ldots, x_p$ — точки промежутка I, то существует и притом единственный многочлен $L(x)$ (*интерполяционный полином Лагранжа*) степени не выше $(n-1)$ такой, что $f(x_i) = L(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Кроме того, для $x \in I$ найдется точка $\xi \in I$ такая, что

$$f(x) - L(x) = \frac{(x - x_1)\ldots(x - x_n)}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

c) Если $x_1 < x_2 < \ldots < x_p$ — точки промежутка I, n_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ — натуральные числа такие, что $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$ и $f^{(k)}(x_i) = 0$ при $0 \leqslant k \leqslant n_i - 1$, то в промежутке $[x_1, x_p]$ найдется точка ξ, в которой $f^{(n-1)}(\xi) = 0$.

d) Существует и притом единственный многочлен $H(x)$ (*интерполяционный полином Эрмита*[1]) степени $n - 1$ такой, что $f^{(k)}(x_i) = H^{(k)}(x_i)$ при $0 \leqslant k \leqslant n_i - 1$. Кроме того, внутри наименьшего промежутка, содержащего точки x и x_i, $i = 1, \ldots, p$, найдется точка ξ такая, что

$$f(x) = H(x) + \frac{(x - x_1)^{n_1} \ldots (x - x_n)^{n_p}}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

[1] Ш. Эрмит (1822 – 1901) — французский математик, занимавшийся вопросами анализа; в частности, доказал трансцендентность числа e.

Эта формула называется *интерполяционной формулой Эрмита*. Точки x_i, $i = 1, \ldots, p$, называются *узлами интерполяции кратности* n_i соответственно. Частными случаями формулы Эрмита являются интерполяционная формула Лагранжа (задача b)) при $p = n$ и $n_i = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, а также формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получающаяся при $p = 1$, т. е. при интерполировании с одним узлом кратности n.

12. Покажите, что

a) между двумя вещественными корнями полинома $P(x)$ с вещественными коэффициентами имеется корень его производной $P'(x)$;

b) если полином $P(x)$ имеет кратный корень, то полином $P'(x)$ имеет тот же корень, но на единицу меньшей кратности;

c) если $Q(x)$ — наибольший общий делитель полиномов $P(x)$ и $P'(x)$, где $P'(x)$ — производная полинома $P(x)$, то полином $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ имеет в качестве корней корни полинома $P(x)$, причем все они кратности 1.

13. Покажите, что

a) любой полином $P(x)$ допускает представление в следующем виде: $c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n$;

b) существует единственный полином степени n, для которого $f(x) - P(x) = o((x - x_0)^n)$ при $E \ni x \to x_0$. Здесь f — функция, определенная на множестве E, а x_0 — предельная точка E.

14. С помощью индукции по k, $1 \leqslant k$, определим *конечные разности порядка* k функции f в точке x_0:

$$\Delta^1 f(x_0; h_1) := \Delta f(x_0; h_1) = f(x_0 + h_1) - f(x_0),$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2) &:= \Delta\Delta f(x_0; h_1, h_2) = \\ &= (f(x_0 + h_1 + h_2) - f(x_0 + h_2)) - (f(x_0 + h_1) - f(x_0)) = \\ &= f(x_0 + h_1 + h_2) - f(x_0 + h_1) - f(x_0 + h_2) + f(x_0),\end{aligned}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta^k f(x_0; h_1, \ldots, h_k) := \Delta^{k-1} g_k(x_0; h_1, \ldots, h_{k-1}),$$

где $g_k(x) = \Delta^1 f(x; h_k) = f(x + h_k) - f(x)$.

a) Пусть $f \in C^{(n-1)}[a, b]$ и существует $f^{(n)}(x)$ по крайней мере в интервале $]a, b[$. Если все точки x_0, $x_0 + h_1$, $x_0 + h_2$, $x_0 + h_1 + h_2$, $x_0 + h_1 + \ldots + h_n$ лежат в $[a, b]$, то внутри наименьшего отрезка, их содержащего, найдется точка ξ такая, что

$$\Delta^n f(x_0; h_1, \ldots, h_n) = f^{(n)}(\xi)\, h_1 \ldots h_n.$$

b) (Продолжение.) Если существует $f^{(n)}(x_0)$, то имеет место оценка

$$\begin{aligned}&\left|\Delta^n f(x_0; h_1, \ldots, h_n) - f^{(n)}(x_0)\, h_1 \ldots h_n\right| \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant \sup_{x \in]a,b[} \left|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)\right| \cdot |h_1| \ldots |h_n|.\end{aligned}$$

c) (Продолжение.) Положим $\Delta^n f(x_0; h, \ldots, h) =: \Delta^n f(x_0; h^n)$. Покажите, что если существует $f^{(n)}(x_0)$, то

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta^n f(x_0; h^n)}{h^n}.$$

d) Покажите на примере, что предыдущий предел может существовать даже тогда, когда $f^{(n)}(x)$ в точке x_0 не существует.

Указание. Рассмотрите, например, $\Delta^2 f(0; h^2)$ для функции

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

и покажите, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta^2 f(0; h^2)}{h^2} = 0.$$

15. a) Применив теорему Лагранжа к функции $\dfrac{1}{x^\alpha}$, где $\alpha > 0$, покажите, что при $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha > 0$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{n^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right).$$

b) Воспользуйтесь результатом задачи a) и покажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\sigma}$ сходится при $\sigma > 1$.

§ 4. Исследование функций методами дифференциального исчисления

1. Условия монотонности функции

Утверждение 1. *Между характером монотонности дифференцируемой на интервале* $]a, b[= E$ *функции* $f\colon E \to \mathbb{R}$ *и знаком (положительностью) ее производной* f' *на этом интервале имеется следующая взаимосвязь*:

$$\begin{array}{lcllcl}
f'(x) > 0 & \Rightarrow & f \ \textit{возрастает} & \Rightarrow & f'(x) \geqslant 0, \\
f'(x) \geqslant 0 & \Rightarrow & f \ \textit{не убывает} & \Rightarrow & f'(x) \geqslant 0, \\
f'(x) \equiv 0 & \Rightarrow & f \equiv \mathrm{const} & \Rightarrow & f'(x) = 0, \\
f'(x) \leqslant 0 & \Rightarrow & f \ \textit{не возрастает} & \Rightarrow & f'(x) \leqslant 0, \\
f'(x) < 0 & \Rightarrow & f \ \textit{убывает} & \Rightarrow & f'(x) \leqslant 0.
\end{array}$$

◀ Левый столбец следствий нам уже знаком по обсуждению теоремы Лагранжа, в силу которой $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, где $x_1, x_2 \in$ $\in\ ]a, b[$ и ξ — точка между x_1 и x_2. Из этой формулы видно, что при $x_1 < x_2$ положительность разности $f(x_2) - f(x_1)$ совпадает с положительностью $f'(\xi)$.

Правый столбец следствий получается непосредственно из определения производной. Покажем, например, что если дифференцируемая на $]a, b[$ функция f возрастает, то $f'(x) \geqslant 0$ на $]a, b[$. Действительно,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Если $h > 0$, то $f(x+h) - f(x) > 0$, а если $h < 0$, то $f(x+h) - f(x) < 0$; поэтому дробь под знаком предела положительна.

Следовательно, ее предел $f'(x)$ неотрицателен, что и утверждалось. ▶

Замечание 1. На примере функции $f(x) = x^3$ видно, что возрастание дифференцируемой функции влечет только неотрицательность производной, а не ее положительность. В нашем примере $f'(0) =$ $= 3x^2|_{x=0} = 0$.

Замечание 2. В символе $A \Rightarrow B$, как мы уже в свое время отмечали, A — условие, достаточное для B, а B — условие, необходимое для того, чтобы было выполнено A. Значит, из утверждения 1, в частности, можно сделать следующие выводы:

функция постоянна на интервале тогда и только тогда, когда ее производная тождественно равна нулю на этом интервале;

для того чтобы дифференцируемая на интервале функция убывала на нем, достаточно, чтобы ее производная была отрицательна в любой точке этого интервала;

для того чтобы дифференцируемая на интервале функция убывала на нем, необходимо, чтобы ее производная была неположительна на этом интервале.

Пример 1. Пусть $f(x) = x^3 - 3x + 2$ на $\mathbb{R}$. Тогда $f'(x) = 3x^2 -$ $- 3 = 3(x^2 - 1)$ и, поскольку $f'(x) < 0$ при $|x| < 1$ и $f'(x) > 0$ при $|x| > 1$, можем сказать, что на интервале $]-\infty, -1[$ функция возрастает, на интервале $]-1, 1[$ убывает, а на интервале $]1, +\infty[$ вновь возрастает.

2. Условия внутреннего экстремума функции. Учитывая лемму Ферма (лемма 1, § 3), можно сформулировать следующее

Утверждение 2 (необходимые условия внутреннего экстремума). *Для того чтобы точка x_0 была точкой экстремума функции $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$, определенной в окрестности $U(x_0)$ этой точки, необходимо выполнение одного из двух условий: либо функция не дифференцируема в x_0, либо $f'(x_0) = 0$.*

Простые примеры показывают, что эти необходимые условия экстремума не являются достаточными.

Пример 2. Пусть $f(x) = x^3$ на $\mathbb{R}$. Тогда $f'(0) = 0$, но в точке $x_0 = 0$ экстремума нет.

Пример 3. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x > 0, \\ 2x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Эта функция с изломом в нуле, очевидно, не имеет в нуле ни производной, ни экстремума.

Пример 4. Найдем максимум функции $f(x) = x^2$ на отрезке $[-2, 1]$. В данном случае очевидно, что он будет достигнут в конце -2 отрезка, но регулярный способ его отыскания таков. Находим $f'(x) = 2x$ и все точки интервала $]-2, 1[$, где $f'(x) = 0$. В нашем случае это одна точка $x = 0$. Максимум $f(x)$ должен быть либо среди этих точек, либо в одной из концевых точек, о которых утверждение 2 ничего не говорит. Таким образом, надо сравнить значения $f(-2) = 4$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, откуда заключаем, что максимальное значение функции $f(x) = x^2$ на отрезке $[-2, 1]$ равно 4 и принимается в точке -2, являющейся концом этого отрезка.

Используя установленную в пункте 1 связь между знаком производной и характером монотонности функции, приходим к следующим достаточным условиям наличия или отсутствия локального экстремума в точке.

Утверждение 3 (достаточные условия экстремума в терминах первой производной). *Пусть $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ — функция, определенная в окрестности $U(x_0)$ точки x_0, непрерывная в самой этой точке и диф-*

ференцируемая в ее проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$. *Пусть* $\overset{\circ}{U}{}^-(x_0) = \{x \in U(x_0) \mid x < x_0\}$ *и* $\overset{\circ}{U}{}^+(x_0) = \{x \in U(x_0) \mid x > x_0\}$.

Тогда справедливы следующие заключения:

a) $(\forall x \in \overset{\circ}{U}{}^-(x_0)\ \ (f'(x) < 0)) \wedge (\forall x \in \overset{\circ}{U}{}^+(x_0)\ \ (f'(x) < 0)) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ (f *в* x_0 *экстремума не имеет*);

b) $(\forall x \in \overset{\circ}{U}{}^-(x_0)\ \ (f'(x) < 0)) \wedge (\forall x \in \overset{\circ}{U}{}^+(x_0)\ \ (f'(x) > 0)) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ (x_0 — *точка строгого локального минимума* f);

c) $(\forall x \in \overset{\circ}{U}{}^-(x_0)\ \ (f'(x) > 0)) \wedge (\forall x \in \overset{\circ}{U}{}^+(x_0)\ \ (f'(x) < 0)) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ (x_0 — *точка строгого локального максимума* f);

d) $(\forall x \in \overset{\circ}{U}{}^-(x_0)\ \ (f'(x) > 0)) \wedge (\forall x \in \overset{\circ}{U}{}^+(x_0)\ \ (f'(x) > 0)) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ (f *в* x_0 *экстремума не имеет*).

Кратко, но менее точно, можно сказать, что если при переходе через точку производная меняет знак, то экстремум есть, а если ее знак при этом не меняется, то экстремума нет.

Заметим сразу же, что эти условия, являясь достаточными, не являются необходимыми для экстремума, в чем можно убедиться на следующем примере.

Пример 5. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Поскольку $x^2 \leqslant f(x) \leqslant 3x^2$, то ясно, что функция имеет строгий локальный минимум в точке $x_0 = 0$, однако ни в какой проколотой полуокрестности этой точки ее производная $f'(x) = 4x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ не сохраняет знак. Этот же пример указывает на недоразумения, которые могут возникнуть в связи с приведенной выше сокращенной формулировкой утверждения 3.

Теперь обратимся к доказательству утверждения 3.

◀ a) Из утверждения 2 следует, что функция f строго убывает на $\overset{\circ}{U}{}^-(x_0)$. Поскольку она непрерывна в x_0, имеем $\lim\limits_{\overset{\circ}{U}{}^-(x_0) \ni x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ и, следовательно, $f(x) > f(x_0)$ при $x \in \overset{\circ}{U}{}^-(x_0)$. По тем же соображениям

$f(x_0) > f(x)$ при $x \in \overset{\circ}{U}{}^{+}(x_0)$. Таким образом, функция строго убывает во всей окрестности $U(x_0)$ и x_0 не является точкой экстремума.

b) Сначала, как и в a), заключаем, что ввиду убывания $f(x)$ на $\overset{\circ}{U}{}^{-}(x_0)$ и непрерывности f в x_0 имеем $f(x) > f(x_0)$ при $x \in \overset{\circ}{U}{}^{-}(x_0)$. Из возрастания f на $\overset{\circ}{U}{}^{+}(x_0)$ и непрерывности f в x_0 заключаем, что $f(x_0) < f(x)$ при $x \in \overset{\circ}{U}{}^{+}(x_0)$. Таким образом, функция f имеет в x_0 строгий локальный минимум.

Утверждения c) и d) доказываются аналогично. ►

Утверждение 4 (достаточные условия экстремума в терминах высших производных). *Пусть функция* $f\colon U(x_0) \to \mathbb{R}$, *определенная в окрестности* $U(x_0)$ *точки* x_0, *имеет в* x_0 *производные до порядка* n *включительно* $(n \geqslant 1)$.

Если $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ *и* $f^{(n)} \neq 0$, *то при* n *нечетном в* x_0 *экстремума нет, а при* n *четном экстремум есть, причем это строгий локальный минимум, если* $f^{(n)}(x_0) > 0$, *и строгий локальный максимум, если* $f^{(n)}(x_0) < 0$.

◄ Используя локальную формулу Тейлора

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \alpha(x)(x - x_0)^n, \tag{1}$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$, будем рассуждать так же, как при доказательстве леммы Ферма. Перепишем (1) в виде

$$f(x) - f(x_0) = \left(\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)\right)(x - x_0)^n. \tag{2}$$

Поскольку $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, а $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$, то сумма $f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)$ имеет знак $f^{(n)}(x_0)$, когда x достаточно близко к x_0. Если n нечетно, то при переходе через x_0 скобка $(x - x_0)^n$ меняет знак и тогда изменится знак всей правой, а следовательно, и левой части равенства (2). Значит, при $n = 2k + 1$ экстремума нет.

Если n четно, то $(x - x_0)^n > 0$ при $x \neq x_0$ и, следовательно, в малой окрестности точки x_0 знак разности $f(x) - f(x_0)$, как видно из равенства (2), совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$. ►

Рассмотрим примеры.

Пример 6. *Закон преломления света в геометрической оптике* (*закон Снеллиуса*[1)]). Согласно *принципу Ферма* истинная траектория света между любыми двумя точками такова, что на ней реализуется минимум времени, которое необходимо свету, чтобы пройти из одной точки в другую по любому фиксированному пути, соединяющему эти точки.

Из принципа Ферма и того, что кратчайшей линией между любыми двумя точками является отрезок прямой с концами в этих точках, следует, что в однородной изотропной среде (устроенной одинаково как в каждой точке, так и в каждом направлении) свет распространяется прямолинейно.

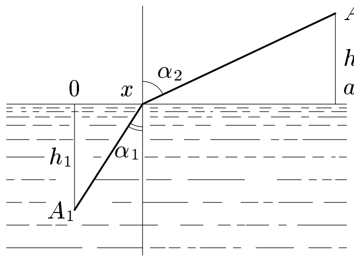


Рис. 22.

Пусть теперь имеются две такие среды и свет распространяется из точки A_1 к A_2, как показано на рис. 22.

Если c_1, c_2 — скорости света в этих средах, то время прохождения указанного пути таково:

$$t(x) = \frac{1}{c_1}\sqrt{h_1^2 + x^2} + \frac{1}{c_2}\sqrt{h_2^2 + (a - x)}.$$

Найдем экстремум функции $t(x)$:

$$t'(x) = \frac{1}{c_1}\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{1}{c_2}\frac{a - x}{\sqrt{h_2^2 + (a - x)^2}} = 0,$$

что в соответствии с обозначениями рисунка дает $c_1^{-1}\sin\alpha_1 = c_2^{-1}\sin\alpha_2$.

Из физических соображений или прямо из вида функции $t(x)$, неограниченно растущей при $x \to \infty$, ясно, что точка, где $t'(x) = 0$, является точкой абсолютного минимума непрерывной функции $t(x)$. Таким образом, из принципа Ферма следует закон преломления $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Пример 7. Покажем, что при $x > 0$

$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \leqslant 0, \qquad \text{когда} \quad 0 < \alpha < 1, \tag{3}$$

$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \geqslant 0, \qquad \text{когда} \quad \alpha < 0 \quad \text{или} \quad 1 < \alpha. \tag{4}$$

[1)] В. Снеллиус (Снелл) (1580 – 1626) — нидерландский астроном и математик.

◀ Дифференцируя функцию $f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1$, находим $f'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1)$ и $f'(x) = 0$ при $x = 1$. При переходе через точку 1 производная переходит от положительных значений к отрицательным, если $0 < \alpha < 1$, и от отрицательных к положительным, если $\alpha < 0$ или $1 < \alpha$. В первом случае в точке 1 строгий максимум, а во втором — строгий минимум (и не только локальный, что следует из соображений монотонности f на участках $0 < x < 1$, $1 < x$). Но $f(1) = 0$ и, таким образом, оба неравенства (3), (4) установлены. При этом показано даже, что оба неравенства строгие, если $x \neq 1$. ▶

Заметим, что если заменить x на $1 + x$, то мы обнаружим, что (3) и (4) — это развитие уже знакомого нам при натуральном показателе α неравенства Бернулли (гл. II, § 2; см. также задачу 2 в конце настоящего параграфа).

С помощью элементарных алгебраических преобразований из доказанных неравенств можно получить ряд классических и важных для анализа неравенств. Приведем их вывод.

a. Неравенства Юнга[1]**.** *Если $a > 0$ и $b > 0$, а числа p, q таковы, что $p \neq 0, 1$, $q \neq 0, 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то*

$$a^{1/p} b^{1/q} \leqslant \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b, \quad \text{если} \quad p > 1, \tag{5}$$

$$a^{1/p} b^{1/q} \geqslant \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b, \quad \text{если} \quad p < 1, \tag{6}$$

причем знак равенства в (5) *и* (6) *имеет место только при $a = b$.*

◀ Для доказательства достаточно в (3) и (4) положить $x = \frac{a}{b}$ и $\alpha = \frac{1}{p}$, а также ввести обозначение $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$. ▶

b. Неравенства Гёльдера[2]**.** *Пусть $x_i \geqslant 0$, $y_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q \right)^{1/q} \quad \text{при} \quad p > 1 \tag{7}$$

[1] В. Юнг (Янг) (1882 – 1946) — английский математик.
[2] О. Гёльдер (1859 – 1937) — немецкий математик.

и

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q} \quad \textit{при} \;\; p<1, \;\; p \neq 0. \tag{8}$$

В случае $p<0$ в (8) предполагается, что $x_i>0$ $(i=1,\ldots,n)$. Знак равенства в (7) и (8) возможен только в случае пропорциональности векторов $(x_1^p,\ldots,x_n^p)$, $(y_1^q,\ldots,y_n^q)$.

◀ Проверим неравенство (7). Пусть $X=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p>0$, $Y=\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q>0$. Полагая в (5) $a=\dfrac{x_i^p}{X}$, $b=\dfrac{y_i^q}{Y}$, получаем

$$\frac{x_i y_i}{X^{1/p}\,Y^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{x_i^p}{X}+\frac{1}{q}\frac{y_i^q}{Y}.$$

Суммируя эти неравенства по i от 1 до n, получаем

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{X^{1/p}Y^{1/q}} \leqslant 1,$$

что эквивалентно (7).

Аналогично, из (6) получаем (8). Поскольку знак равенства в (5) и (6) возможен лишь при $a=b$, заключаем, что в (7) и (8) он возможен лишь при пропорциональности $x_i^p=\lambda y_i^q$ или $y_i^q=\lambda x_i^p$. ▶

c. Неравенства Минковского[1]**.** *Пусть $x_i \geqslant 0$, $y_i \geqslant 0$ $(i = 1,\ldots,n)$. Тогда*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p} \quad \textit{при} \;\; p>1 \tag{9}$$

и

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1/p} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p} \quad \textit{при} \;\; p<1, \;\; p\neq 0. \tag{10}$$

[1] Г. Минковский (1864 – 1909) — немецкий математик, предложивший адекватную математическую модель (пространство с индефинитной метрикой) специальной теории относительности.

◀ Применим неравенства Гёльдера к членам правой части тождества

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p=\sum_{i=1}^{n}x_i(x_i+y_i)^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}y_i(x_i+y_i)^{p-1}.$$

Тогда левая часть будет оценена сверху или снизу в соответствии с неравенствами (7), (8) величиной

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1/q}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1/q}.$$

После деления полученных неравенств на $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1/q}$ приходим к (9) и (10).

Зная условия равенства в неравенствах Гёльдера, проверяем, что знак равенства в неравенствах Минковского возможен лишь в случае коллинеарности векторов $(x_1,\ldots,x_n)$, $(y_1,\ldots,y_n)$. ▶

При $n=3$ и $p=2$ неравенство Минковского (9), очевидно, является неравенством треугольника в трехмерном евклидовом пространстве.

Пример 8. Рассмотрим еще простейший пример использования высших производных при отыскании локальных экстремумов. Пусть $f(x)=\sin x$. Поскольку $f'(x)=\cos x$ и $f''(x)=-\sin x$, то все точки, где $f'(x)=\cos x=0$, являются локальными экстремумами функции $\sin x$, так как в них $f''(x)=-\sin x\neq 0$. При этом $f''(x)<0$, если $\sin x>0$, и $f''(x)>0$, если $\sin x<0$. Таким образом, точки, где $\cos x=0$, а $\sin x>0$, являются локальными максимумами, а точки, где $\cos x=0$, а $\sin x<0$, — локальными минимумами функции $\sin x$ (что, конечно, и так известно).

3. Условия выпуклости функции

Определение 1. Функция $f\colon]a,b[\to\mathbb{R}$, определенная на интервале $]a,b[\subset\mathbb{R}$, называется *выпуклой* на нем, если для любых точек $x_1,x_2\in]a,b[$ и любых чисел $\alpha_1\geqslant 0$, $\alpha_2\geqslant 0$ таких, что $\alpha_1+\alpha_2=1$, имеет место неравенство

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2). \tag{11}$$

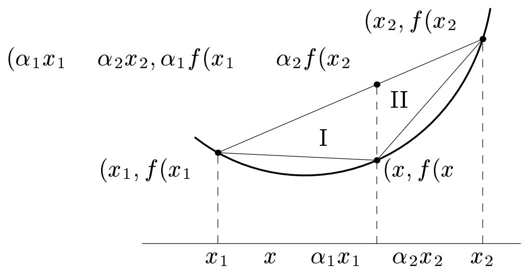


Рис. 23.

Если при $x_1 \neq x_2$ и $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \neq 0$ это неравенство является строгим, то функция называется *строго выпуклой* на интервале $]a, b[$.

Геометрически условие (11) выпуклости функции $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ означает (рис. 23), что точки любой дуги графика функции лежат под хордой, стягивающей эту дугу.

В самом деле, в левой части (11) стоит значение $f(x)$ функции в точке $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in [x_1, x_2]$, а справа — значение в той же точке линейной функции, график которой (прямая) проходит через точки $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$.

Соотношение (11) означает, что множество $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \in]a, b[,\ f(x) < y\}$ точек плоскости, лежащих над графиком функции, является выпуклым, откуда и сам термин «выпуклая» функция.

Определение 2. Если для функции $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ в (11) имеет место обратное неравенство, то говорят, что функция *вогнута* на интервале $]a, b[$ или, чаще, что она *выпукла вверх* на этом интервале, в отличие от выпуклой функции, которую тогда называют *выпуклой вниз* на интервале $]a, b[$.

Поскольку все дальнейшие построения проводятся одинаково для функций, выпуклых вниз или вверх, мы ограничимся рассмотрением выпуклых (вниз) функций.

Сначала придадим неравенству (11) другой вид, более приспособленный для наших целей.

Из соотношений $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ имеем

$$\alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \qquad \alpha_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

поэтому (11) можно переписать в виде

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Учитывая, что $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ и $x_1 < x_2$, после домножения на $x_2 - x_1$ получаем

$$(x_2 - x)f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \geqslant 0.$$

Замечая, что $x_2 - x_1 = (x_2 - x) + (x - x_1)$, из последнего неравенства после элементарных преобразований находим, что

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \tag{12}$$

при $x_1 < x < x_2$ и любых $x_1, x_2 \in]a, b[$.

Неравенство (12) является иной формой записи определения выпуклости функции $f(x)$ на интервале $]a, b[$. Геометрически (12) означает (см. рис. 23), что угловой коэффициент хорды I, соединяющей точки $(x_1, f(x_1))$, $(x, f(x))$, не больше (а в случае строгой выпуклости — меньше) углового коэффициента хорды II, соединяющей точки $(x, f(x))$, $(x_2, f(x_2))$.

Предположим теперь, что функция $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ дифференцируема на $]a, b[$. Тогда, устремляя в (12) x поочередно к x_1 и x_2, получаем

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2),$$

что устанавливает монотонность производной функции f.

Учитывая это, для строго выпуклой функции, пользуясь теоремой Лагранжа, находим

$$f'(x_1) \leqslant f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2) \leqslant f'(x_2)$$

при $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$, т. е. строгая выпуклость влечет строгую монотонность производной.

Итак, если дифференцируемая функция f выпукла на интервале $]a, b[$, то f' не убывает на $]a, b[$, а в случае строгой выпуклости f ее производная f' возрастает на $]a, b[$.

Оказывается, это не только необходимые, но и достаточные условия выпуклости дифференцируемой функции.

В самом деле, для $a < x_1 < x < x_2 < b$ по теореме Лагранжа

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1), \qquad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2),$$

где $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$, и если $f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2)$, то выполнено условие (12) выпуклости (или строгой выпуклости, если $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$).

Таким образом, мы доказали следующее

Утверждение 5. *Для того чтобы дифференцируемая на интервале $]a, b[$ функция $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ была выпуклой (вниз) на $]a, b[$, необходимо и достаточно, чтобы ее производная f' не убывала на $]a, b[$. При этом строгому возрастанию f' соответствует строгая выпуклость f.*

Сопоставляя утверждение 5 и утверждение 3, получаем

Следствие. *Для того чтобы функция $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$, имеющая на интервале $]a, b[$ вторую производную, была выпуклой (вниз) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы на $]a, b[$ было $f''(x) \geqslant 0$. Если же $f''(x) > 0$ на $]a, b[$, то этого достаточно, чтобы гарантировать строгую выпуклость функции $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$.*

Теперь мы в состоянии объяснить, например, почему графики простейших элементарных функций рисуют с тем или иным характером выпуклости.

Пример 9. Исследуем выпуклость функции $f(x) = x^\alpha$ на множестве $x > 0$. Поскольку $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$, то $f''(x) > 0$ при $\alpha < 0$ или при $\alpha > 1$, т. е. при таких значениях показателя степени α степенная функция x^α строго выпукла (вниз). При $0 < \alpha < 1$ имеем $f''(x) < 0$, поэтому для таких показателей степени она строго выпукла вверх. Например, параболу $f(x) = x^2$ мы всегда рисуем выпуклой вниз. Оставшиеся случаи $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ тривиальны: $x^0 \equiv 1$, $x^1 = x$. И в том и в другом случае графиком функции является луч (см. рис. 30 на с. 316).

Пример 10. Пусть $f(x) = a^x$, $0 < a$, $a \neq 1$. Поскольку $f''(x) = a^x \ln^2 a > 0$, показательная функция a^x при любом допустимом основании a строго выпукла (вниз) на $\mathbb{R}$ (см. рис. 24 на с. 316).

Пример 11. Для функции $f(x) = \log_a x$ имеем $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2 \ln a}$, поэтому функция строго выпукла (вниз), если $0 < a < 1$, и строго выпукла вверх, если $1 < a$ (см. рис. 25 на с. 316).

Пример 12. Исследуем выпуклость функции $f(x) = \sin x$ (см. рис. 26 на с. 316).

Поскольку $f''(x) = -\sin x$, то $f''(x) < 0$ на интервалах $\pi{\cdot}2k < x < \pi(2k+1)$ и $f''(x) > 0$ на интервалах $\pi(2k-1) < x < \pi{\cdot}2k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Отсюда, например, следует, что дуга графика функции $\sin x$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ лежит над стягивающей ее хордой всюду, кроме концевых точек; поэтому $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Укажем теперь еще одну характеристику выпуклой функции, геометрически эквивалентную тому, что выпуклая область на плоскости лежит по одну сторону от касательной к ее границе.

Утверждение 6. *Дифференцируемая на интервале* $]a,b[$ *функция* $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ *выпукла (вниз) на* $]a,b[$ *тогда и только тогда, когда ее график всеми своими точками лежит не ниже любой проведенной к нему касательной. При этом для строгой выпуклости функции необходимо и достаточно, чтобы все точки графика, за исключением самой точки касания, лежали строго выше этой касательной.*

◀ Необходимость. Пусть $x_0 \in]a,b[$. Уравнение касательной к графику в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

поэтому

$$f(x) - y(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \bigl(f'(\xi) - f'(x_0)\bigr)(x - x_0),$$

где ξ — точка между x и x_0. Так как f выпукла, то функция $f'(x)$ не убывает на $]a,b[$ и знак разности $f'(\xi) - f'(x_0)$ совпадает со знаком разности $x - x_0$, поэтому $f(x) - y(x) \geqslant 0$ в любой точке $x \in]a,b[$. Если f строго выпукла, то f' строго возрастает на $]a,b[$ и, значит, $f(x) - y(x) > 0$ при $x \in]a,b[$ и $x \neq x_0$.

Достаточность. Если для любых точек $x, x_0 \in]a,b[$

$$f(x) - y(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geqslant 0, \tag{13}$$

то
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant f'(x_0) \qquad \text{при} \quad x < x_0,$$
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant f'(x_0) \qquad \text{при} \quad x_0 < x.$$

Таким образом, для любой тройки точек $x_1, x, x_2 \in \left]a, b\right[$ такой, что $x_1 < x < x_2$, получаем
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$
причем строгое неравенство в (13) влечет строгое неравенство в последнем соотношении, которое, как мы видим, совпадает с записью (12) определения выпуклой функции. ►

Рассмотрим примеры.

Пример 13. Функция $f(x) = e^x$ строго выпукла. Прямая $y = x+1$ является касательной к графику этой функции в точке $(0, 1)$, так как $f(0) = e^0 = 1$ и $f'(0) = e^x|_{x=0} = 1$. В силу утверждения 6 заключаем, что для любого $x \in \mathbb{R}$
$$e^x \geqslant 1 + x,$$
причем если $x \neq 0$, то неравенство строгое.

Пример 14. Аналогично, пользуясь строгой выпуклостью вверх функции $\ln x$, можно проверить, что при $x > 0$ справедливо неравенство
$$\ln x \leqslant x - 1,$$
причем это неравенство является строгим, если $x \neq 1$.

При построении графиков функций бывает полезно выделять точки перегиба графика.

Определение 3. Пусть $f\colon U(x_0) \to \mathbb{R}$ — функция, определенная и дифференцируемая в окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Если на множестве $\overset{\circ}{U}{}^-(x_0) = \{x \in U(x_0) \mid x < x_0\}$ функция выпукла вниз (вверх), а на множестве $\overset{\circ}{U}{}^+(x_0) = \{x \in U(x_0) \mid x > x_0\}$ выпукла вверх (вниз), то точка $(x_0, f(x_0))$ графика называется его *точкой перегиба.*

Таким образом, при переходе через точку перегиба меняется направление выпуклости графика, а это, в частности, означает, что в точке

$(x_0, f(x_0))$ график функции переходит с одной стороны касательной к нему в этой точке на другую ее сторону.

Аналитический признак абсциссы x_0 точки перегиба легко усмотреть, сопоставляя утверждение 5 и утверждение 3. А именно, можно сказать, что если f дважды дифференцируема в точке x_0, то, поскольку $f'(x)$ в точке x_0 имеет максимум или минимум, необходимо $f''(x_0) = 0$.

Если же вторая производная $f''(x)$ определена в $U(x_0)$ и всюду в $\overset{\circ}{U}{}^-(x_0)$ имеет один знак, а всюду в $\overset{\circ}{U}{}^+(x_0)$ — противоположный знак, то этого достаточно для того, чтобы $f'(x)$ в $\overset{\circ}{U}{}^-(x_0)$ и в $\overset{\circ}{U}{}^+(x_0)$ была монотонна, но имела разный характер монотонности. Тогда в силу утверждения 5 в точке $(x_0, f(x_0))$ произойдет изменение направления выпуклости графика, т. е. $(x_0, f(x_0))$ будет точкой перегиба.

Пример 15. В примере 12, рассматривая функцию $f(x) = \sin x$, мы нашли участки выпуклости и вогнутости ее графика. Покажем теперь, что точки графика с абсциссами $x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, являются точками перегиба.

Действительно, $f''(x) = -\sin x$; $f''(x) = 0$ при $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Кроме того, при переходе через эти точки $f''(x)$ меняет знак, что является достаточным признаком точки перегиба (см. рис. 26 на с. 316).

Пример 16. Не следует думать, что переход кривой с одной стороны касательной на другую ее сторону в некоторой точке является достаточным признаком того, что эта точка является точкой перегиба. Ведь может так случиться, что ни в левой, ни в правой ее окрестности кривая не сохраняет определенный характер выпуклости. Пример легко построить, усовершенствовав пример 5, приведенный по схожему поводу.

Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + x^3 \sin \dfrac{1}{x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Тогда $x^3 \leqslant f(x) \leqslant 3x^3$ при $0 \leqslant x$ и $3x^3 \leqslant f(x) \leqslant x^3$ при $x \leqslant 0$, поэтому график этой функции касается оси абсцисс в точке $x = 0$ и переходит в этой точке из нижней полуплоскости в верхнюю. В то же время производная функции $f(x)$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x^2 + 3x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 2\cos \frac{1}{x^2} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

не монотонна ни в какой полуокрестности точки $x = 0$.

В заключение вновь вернемся к определению (11) выпуклой функции и докажем следующее

Утверждение 7 (неравенство Иенсена[1])**.** *Если $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, $x_1, \ldots, x_n$ — точки интервала $]a, b[$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — неотрицательные числа такие, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, то справедливо неравенство*

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n). \tag{14}$$

◄ При $n = 2$ условие (14) совпадает с определением (11) выпуклой функции.

Покажем, что если (14) справедливо для $n = m - 1$, то оно справедливо и для $n = m$.

Пусть, для определенности, в наборе $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ имеем $\alpha_n \neq 0$. Тогда $\beta = \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > 0$ и $\frac{\alpha_2}{\beta} + \ldots + \frac{\alpha_n}{\beta} = 1$. Используя выпуклость функции, находим

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) = f\left(\alpha_1 x_1 + \beta\left(\frac{\alpha_2}{\beta}x_2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\beta}x_n\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_1 f(x_1) + \beta f\left(\frac{\alpha_2}{\beta}x_2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\beta}x_n\right),$$

поскольку $\alpha_1 + \beta = 1$ и $\left(\frac{\alpha_2}{\beta}x_2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\beta}x_n\right) \in]a, b[$.

Далее, по предположению индукции

$$f\left(\frac{\alpha_2}{\beta}x_2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\beta}x_n\right) \leqslant \frac{\alpha_2}{\beta}f(x_2) + \ldots + \frac{\alpha_n}{\beta}f(x_n).$$

Следовательно,

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \beta f\left(\frac{\alpha_2}{\beta}x_2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\beta}x_n\right) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n).$$

[1] И. Л. Иенсен (1859 – 1925) — датский математик.

В силу принципа индукции заключаем, что (14) верно для любого $n \in \mathbb{N}$. (Для $n = 1$ (14) тривиально.) ►

Заметим, что, как видно из доказательства, строгой выпуклости отвечает строгое неравенство Иенсена, т. е. числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ отличны от нуля, то знак равенства в (14) может иметь место тогда и только тогда, когда $x_1 = \ldots = x_n$.

Для функции, выпуклой вверх, разумеется, получается обратное по отношению к неравенству (14) неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \geqslant \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n). \tag{15}$$

Пример 17. Функция $f(x) = \ln x$ строго выпукла вверх на множестве положительных чисел, поэтому в силу (15)

$$\alpha_1 \ln x_1 + \ldots + \alpha_n \ln x_n \leqslant \ln(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n)$$

или

$$x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \tag{16}$$

при $x_i \geqslant 0$, $\alpha_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

В частности, если $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \frac{1}{n}$, получаем классическое неравенство

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \tag{17}$$

между средним геометрическим и средним арифметическим n неотрицательных чисел. Знак равенства в (17) возможен, как отмечалось выше, только при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Если же в (16) положить $n = 2$, $\alpha_1 = \frac{1}{p}$, $\alpha_2 = \frac{1}{q}$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, то вновь получим уже известное нам неравенство (5).

Пример 18. Пусть $f(x) = x^p$, $x \geqslant 0$, $p > 1$. Поскольку такая функция выпукла, имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^p.$$

Полагая здесь $q = \frac{p}{p-1}$, $\alpha_i = b_i^q \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{-1}$, $x_i = a_i b_i^{-1/(p-1)} \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q$, вновь получаем неравенство (7) Гёльдера

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $p > 1$.

При $p < 1$ функция $f(x) = x^p$ выпукла вверх, поэтому аналогичными рассуждениями можно получить и другое неравенство (8) Гёльдера.

4. Правило Лопиталя. Остановимся теперь на одном частном, но иногда полезном приеме отыскания предела отношения функций, известном как правило Лопиталя[1)].

Утверждение 8 (правило Лопиталя)**.** *Пусть функции* $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ *и* $g\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ *дифференцируемы на интервале* $]a,b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$, *причем* $g'(x) \neq 0$ *на* $]a,b[$ *и*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to A \quad \text{при} \quad x \to a+0 \qquad (-\infty \leqslant A \leqslant +\infty).$$

Тогда в каждом из двух следующих случаев:

1° $(f(x) \to 0) \wedge (g(x) \to 0)$ *при* $x \to a+0$

или

2° $g(x) \to \infty$ *при* $x \to a+0$

будет

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to A \quad \text{при} \quad x \to a+0.$$

Аналогичное утверждение справедливо и при $x \to b-0$.

Коротко, но не вполне точно правило Лопиталя формулируют так: *предел отношения функций равен пределу отношения их производных, если последний существует.*

◀ Если $g'(x) \neq 0$, то на основании теоремы Ролля заключаем, что $g(x)$ строго монотонна на $]a,b[$. Значит, уменьшив, если нужно, промежуток $]a,b[$ за счет сдвига в сторону конца a, можно считать, что $g(x) \neq 0$

[1)] Г. Ф. де Лопиталь (1661 – 1704) — французский математик, способный ученик Иоганна Бернулли, маркиз, для которого последний в 1691 – 1692 гг. написал первый учебник анализа. Часть этого учебника, посвященная дифференциальному исчислению, в слегка измененном виде была опубликована Лопиталем под своим именем. Таким образом, «правилом Лопиталя» мы обязаны Иоганну Бернулли.

на $]a, b[$. Для $x, y \in]a, b[$ по теореме Коши найдется точка $\xi \in]a, b[$ такая, что

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Перепишем это равенство в удобном для нас сейчас виде

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right).$$

При $x \to a+0$ согласованно с изменением x будем стремить y к $a+0$ так, чтобы при этом

$$\frac{f(y)}{g(x)} \to 0 \quad \text{и} \quad \frac{g(y)}{g(x)} \to 0.$$

В любом из данных нам двух вариантов 1° и 2° это, очевидно, можно сделать. Так как ξ лежит между x и y, то вместе с x и y также $\xi \to \to a + 0$. Значит, правая, а следовательно, и левая часть последнего равенства при этом стремятся к A. ▶

Пример 19. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

Этот пример не следует рассматривать как новое, независимое доказательство того, что $\frac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to 0$. Дело в том, что, например, при выводе соотношения $\sin' x = \cos x$ мы уже использовали вычисленный здесь предел.

В возможности применения правила Лопиталя всегда убеждаемся только после того, как найдем предел отношения производных. При этом не следует забывать о проверке условий 1° или 2°. Важность этих условий показывает следующий

Пример 20. Пусть $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$. Тогда $f'(x) = -\sin x$, $g'(x) = \cos x$ и $\frac{f(x)}{g(x)} \to +\infty$ при $x \to +0$, в то время как $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to 0$ при $x \to +0$.

Пример 21.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\alpha x^{\alpha - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha > 0.$$

Пример 22.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha x^{\alpha - 1}}{a^x \ln a} = \ldots = \lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1) x^{\alpha - n}}{a^x (\ln a)^n} = 0$$

при $a > 1$, ибо при $n > \alpha$ и $a > 1$, очевидно, $\frac{x^{\alpha - n}}{a^x} \to 0$, если $x \to +\infty$.

Заметим, что вся цепочка последних равенств носила условный характер до тех пор, пока мы не пришли к выражению, предел которого смогли найти.

5. Построение графика функции. Для наглядного описания функции очень часто используют ее графическое представление. Как правило, такое представление бывает полезно для обсуждения качественных вопросов поведения исследуемой функции.

Для точных расчетов графики используются реже. В связи с этим практически важным оказывается не столько скрупулезное воспроизведение функции в виде графика, сколько построение эскиза графика функции, правильно отражающего основные элементы ее поведения. Некоторые общие приемы, встречающиеся при построении эскизов графиков функций, мы и рассмотрим в этом пункте.

a. Графики элементарных функций. Напомним прежде всего, как выглядят графики основных элементарных функций, свободное владение которыми необходимо для дальнейшего (рис. 24 – 30).

b. Примеры построения эскизов графиков функций (без привлечения дифференциального исчисления). Рассмотрим теперь некоторые примеры, в которых эскиз графика функции может быть легко построен, если нам известны графики и свойства простейших элементарных функций.

Пример 23. Построим эскиз графика функции

$$y = \log_{x^2-3x+2} 2.$$

Учитывая, что

$$y = \log_{x^2-3x+2} 2 = \frac{1}{\log_2(x^2-3x+2)} = \frac{1}{\log_2(x-1)(x-2)},$$

строим последовательно график квадратного трехчлена $y_1 = x^2-3x+2$, затем $y_2 = \log_2 y_1(x)$ и затем $y = \frac{1}{y_2(x)}$ (рис. 31).

«Угадать» такой вид графика можно было бы и иначе: выяснить область определения функции $\log_{x^2-3x+2} 2 = (\log_2(x^2-3x+2))^{-1}$, найти поведение функции при приближении к граничным точкам области определения и на промежутках, концы которых являются граничными точками области определения, нарисовать «плавную кривую» с учетом найденного поведения функции у концов промежутка.

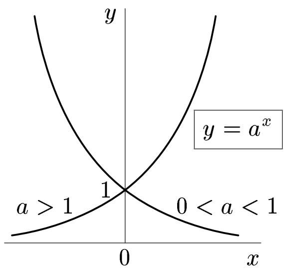


Рис. 24.

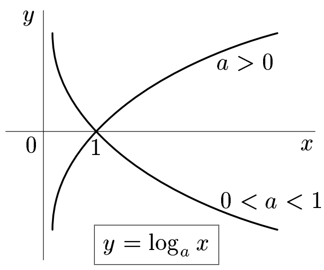


Рис. 25.

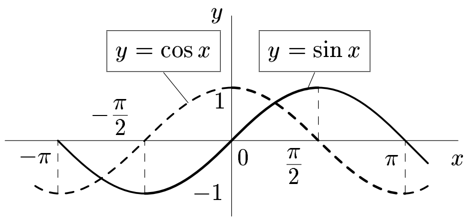


Рис. 26.

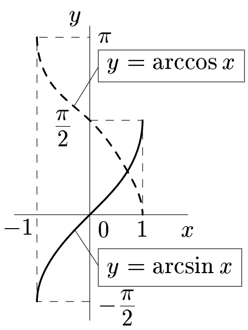


Рис. 27.

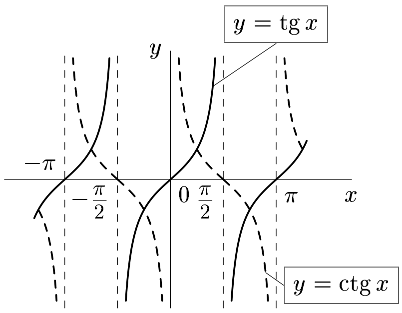


Рис. 28.

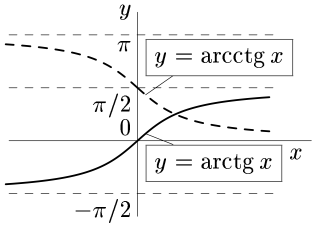


Рис. 29.

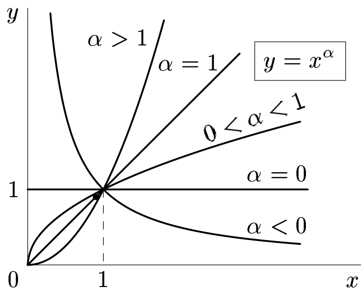


Рис. 30.

Пример 24. Построение эскиза графика функции

$$y = \sin x^2$$

видно из рис. 32.

Мы построили этот график по некоторым характерным для данной функции точкам — тем точкам, где $\sin x^2 = -1$, $\sin x^2 = 0$ или $\sin x^2 = 1$. Между двумя соседними точками такого типа функция монотонна. Вид графика в окрестности точки $x = 0$, $y = 0$ определяется тем, что $\sin x^2 \sim x^2$ при $x \to 0$. Кроме того, полезно заметить, что данная функция четна.

Поскольку мы все время будем говорить только об эскизном, а не точном построении графика функции, то условимся ради краткости в дальнейшем считать, что требование «построить график функции» для нас всегда будет равносильно требованию «построить эскиз графика функции».

Пример 25. Построим график функции

$$y = x + \operatorname{arctg}(x^3 - 1)$$

(рис. 33). При $x \to -\infty$ график хорошо приближается прямой $y = x - \frac{\pi}{2}$, а при $x \to +\infty$ — прямой $y = x + \frac{\pi}{2}$.

Введем следующее полезное

Определение 4. Прямая $y = c_0 + c_1 x$ называется *асимптотой графика функции* $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ (при $x \to +\infty$), если $f(x) - (c_0 + c_1 x) = o(1)$ при $x \to -\infty$ (при $x \to +\infty$).

Таким образом, в нашем случае при $x \to -\infty$ график имеет асимптоту $y = x - \frac{\pi}{2}$, а при $x \to +\infty$ — асимптоту $y = x + \frac{\pi}{2}$.

Если при $x \to a - 0$ (или при $x \to a + 0$) $|f(x)| \to \infty$, то ясно, что график функции в этом случае будет по мере приближения x к a все теснее примыкать к вертикальной прямой $x = a$. Эту прямую называют *вертикальной асимптотой* графика, в отличие от введенной в определении 4 асимптоты, которая всегда наклонна.

Так, график из примера 23 (см. рис. 31) имеет две вертикальные асимптоты и горизонтальную асимптоту (общую для $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$).

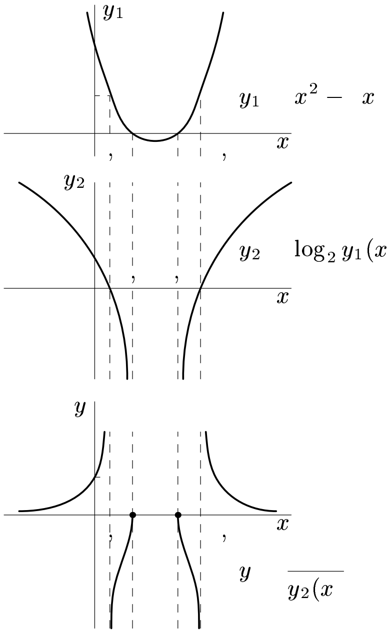


Рис. 31.

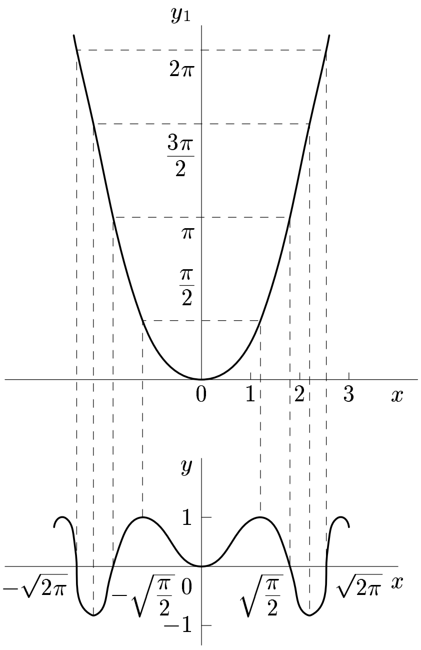


Рис. 32.

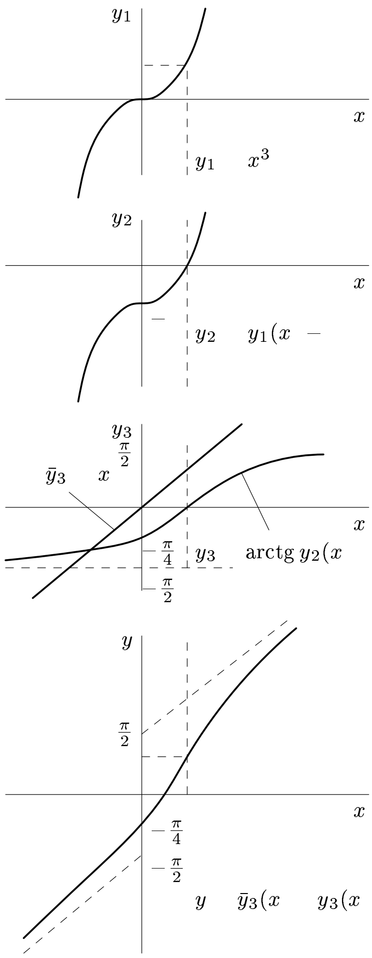


Рис. 33.

Из определения 4, очевидно, вытекает, что

$$c_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x},$$
$$c_0 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - c_1 x).$$

И вообще, если $f(x) - (c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n) = o(1)$ при $x \to -\infty$, то

$$c_n = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x^n},$$
$$c_{n-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x) - c_n x^n}{x^{n-1}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_0 = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - (c_1 x + \ldots + c_n x^n)\right).$$

Эти соотношения, выписанные нами для случая $x \to -\infty$, разумеется, справедливы также в случае $x \to +\infty$ и могут быть использованы для описания асимптотического поведения графика функции $f(x)$ с помощью графика соответствующего алгебраического полинома $c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$.

Пример 26. Пусть (ρ, φ) — полярные координаты на плоскости, и пусть точка движется по плоскости так, что в момент времени t $(t \geqslant 0)$

$$\rho = \rho(t) = 1 - e^{-t} \cos \frac{\pi}{2} t,$$
$$\varphi = \varphi(t) = 1 - e^{-t} \sin \frac{\pi}{2} t.$$

Требуется нарисовать траекторию точки.

Нарисуем для этого сначала графики функций $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ (рис. 34, a, 34, b).

Теперь, глядя одновременно на оба построенных графика, можем нарисовать общий вид траектории точки (рис. 34, c).

c. Использование дифференциального исчисления при построении графика функции. Как мы видели, графики многих функций можно в общих чертах нарисовать, не выходя за пределы самых простых соображений. Однако если мы желаем уточнить эскиз, то в случае, когда производная исследуемой функции не слишком сложная, можно

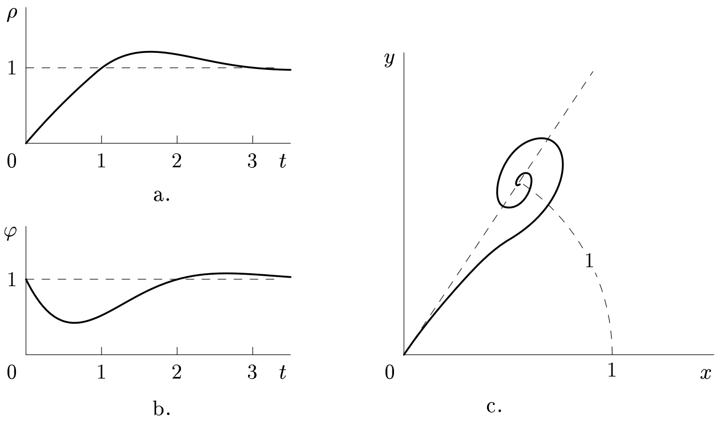


Рис. 34.

привлечь аппарат дифференциального исчисления. Продемонстрируем это на примерах.

Пример 27. Построить график функции $y = f(x)$ в случае

$$f(x) = |x+2|e^{-1/x}.$$

Функция $f(x)$ определена при $x \in \mathbb{R}\backslash 0$. Поскольку $e^{-1/x} \to 1$ при $x \to \infty$, то

$$|x+2|e^{-1/x} \sim \begin{cases} -(x+2) & \text{при} \quad x \to -\infty, \\ (x+2) & \text{при} \quad x \to +\infty. \end{cases}$$

Далее, при $x \to -0$, очевидно, имеем $|x+2|e^{-1/x} \to +\infty$, а при $x \to \to +0$ $|x+2|e^{-1/x} \to +0$. Наконец, видно, что $f(x) \geqslant 0$ и $f(-2) = 0$. На основании этих наблюдений уже можно сделать первый набросок графика (рис. 35, a).

Выясним теперь основательно, действительно ли данная функция монотонна на промежутках $]-\infty, -2]$, $[-2, 0[$, $]0, +\infty[$, действительно ли она имеет указанные асимптоты и правильно ли изображен характер выпуклости графика функции.

Поскольку

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2+x+2}{x^2}\, e^{-1/x}, & \text{если} \quad x < -2, \\ \dfrac{x^2+x+2}{x^2}\, e^{-1/x}, & \text{если} \quad -2 < x \quad \text{и} \quad x \neq 0, \end{cases}$$

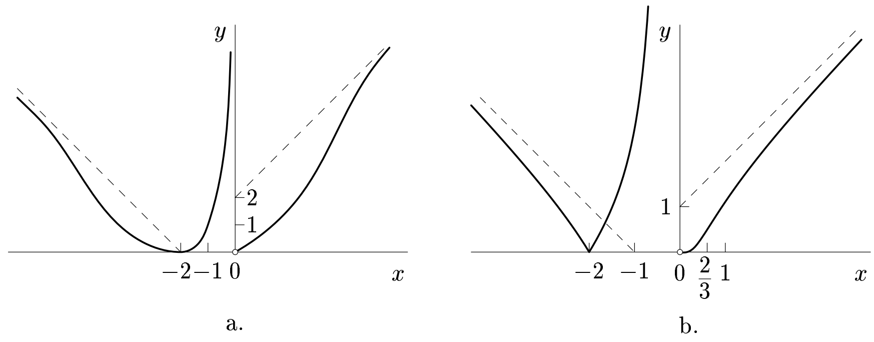


Рис. 35.

и $f'(x) \neq 0$, то можно составить следующую таблицу:

Промежуток	$]-\infty, -2[$	$]-2, 0[$	$]0, +\infty[$
Знак $f'(x)$	$-$	$+$	$+$
Поведение $f(x)$	$+\infty \searrow 0$	$0 \nearrow +\infty$	$0 \nearrow +\infty$

На участках постоянства знака производной функция, как мы знаем, имеет соответствующий характер монотонности. В нижней строке таблицы символ $+\infty \searrow 0$ означает монотонное убывание от $+\infty$ до 0, а символ $0 \nearrow +\infty$ — монотонное возрастание значений функции от 0 до $+\infty$.

Заметим, что $f'(x) \to -4e^{-1/2}$ при $x \to -2-0$ и $f'(x) \to 4e^{-1/2}$ при $x \to -2+0$, поэтому точка $(-2, 0)$ должна быть угловой точкой графика (излом типа излома у графика функции $|x|$), а не обычной точкой, как это у нас изображено на рис. 35, а. Далее, $f'(x) \to 0$ при $x \to +0$, поэтому график должен выходить из начала координат, касаясь оси абсцисс (вспомните геометрический смысл $f'(x)$!).

Уточним теперь асимптотику функции при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$.

Поскольку $e^{-1/x} = 1 - x^{-1} + o\left(x^{-1}\right)$ при $x \to \infty$, то

$$|x+2|e^{-1/x} \sim \begin{cases} -x - 1 + o(1) & \text{при } x \to -\infty, \\ x + 1 + o(1) & \text{при } x \to +\infty, \end{cases}$$

значит, на самом деле наклонные асимптоты графика суть $y = -x - 1$ при $x \to -\infty$ и $y = x + 1$ при $x \to +\infty$.

По этим данным уже можно построить достаточно надежный эскиз графика, но мы пойдем дальше и, вычислив

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{2-3x}{x^4}e^{-1/x}, & \text{если} \quad x < -2, \\ \dfrac{2-3x}{x^4}e^{-1/x}, & \text{если} \quad -2 < x \quad \text{и} \quad x \neq 0, \end{cases}$$

найдем участки выпуклости графика.

Поскольку $f''(x) = 0$ лишь при $x = 2/3$, то имеем следующую таблицу:

Промежуток	$]-\infty, -2[$	$]-2, 0[$	$]0, 2/3[$	$]2/3, +\infty[$
Знак $f''(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$
Выпуклость $f(x)$	Вверх	Вниз	Вниз	Вверх

Поскольку при $x = 2/3$ наша функция дифференцируема, а при переходе через эту точку $f''(x)$ меняет знак, то точка $(2/3, f(2/3))$ является точкой перегиба графика.

Между прочим, если бы производная $f'(x)$ обращалась в нуль, то из таблицы знаков $f'(x)$ можно было бы судить о наличии или отсутствии экстремума в соответствующей точке. В нашем случае $f'(x)$ нигде не обращается в нуль, но в точке $x = -2$ функция имеет локальный минимум: она непрерывна в этой точке и при переходе через нее $f'(x)$ меняет знак с $-$ на $+$. Впрочем, то, что при $x = -2$ наша функция имеет минимум, видно уже из приведенного в таблице описания изменения значений функции $f(x)$ на соответствующих промежутках, если, конечно, учесть еще, что $f(-2) = 0$.

Теперь можно нарисовать более точный эскиз графика данной функции (см. рис. 35, b).

В заключение рассмотрим еще один

Пример 28. Пусть (x, y) — декартовы координаты на плоскости, и пусть движущаяся точка в каждый момент t $(t \geqslant 0)$ имеет координаты

$$x = \frac{t}{1-t^2}, \qquad y = \frac{t-2t^3}{1-t^2}.$$

Требуется изобразить траекторию движения точки.

Нарисуем сначала эскизы графиков каждой из данных координатных функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$ (рис. 36, a, 36, b).

Второй из этих графиков несколько интереснее, поэтому поясним его построение.

Поведение функции $y = y(t)$ при $t \to +0$, $t \to 1 - 0$, $t \to 1 + 0$ и асимптотику $y(t) = 2t + o(1)$ при $t \to +\infty$ усматриваем непосредственно из вида аналитического выражения для $y(t)$.

Вычислив производную

$$\dot{y}(t) = \frac{1 - 5t^2 + 2t^4}{(1 - t^2)^2},$$

находим ее нули: $t_1 \approx 0{,}5$ и $t_2 \approx 1{,}5$ в области $t \geqslant 0$.

Составив таблицу:

Промежуток	$]0, t_1[$	$]t_1, 1[$	$]1, t_2[$	$]t_2, +\infty[$
Знак $\dot{y}(t)$	$+$	$-$	$-$	$+$
Поведение $y(t)$	$0 \nearrow y(t_1)$	$y(t_1) \searrow -\infty$	$+\infty \searrow y(t_2)$	$y(t_2) \nearrow +\infty$

находим участки монотонности и локальные экстремумы $y(t_1) \approx \frac{1}{3}$ (max) и $y(t_2) \approx 4$ (min).

Теперь, глядя одновременно на оба графика $x = x(t)$ и $y = y(t)$, строим эскиз траектории движения точки по плоскости (см. рис. 36, c).

Этот эскиз можно уточнять. Например, можно выяснить асимптотику траектории.

Поскольку $\lim\limits_{t \to 1} \frac{y(t)}{x(t)} = -1$ и $\lim\limits_{t \to 1} (y(t) + x(t)) = 2$, то прямая $y = -x + 2$ является асимптотой для обоих концов траектории, отвечающих стремлению t к 1. Ясно также, что прямая $x = 0$ есть вертикальная асимптота для участка траектории, отвечающего $t \to +\infty$.

Найдем далее

$$y'_x = \frac{\dot{y}_t}{\dot{x}_t} = \frac{1 - 5t^2 + 2t^4}{1 + t^2}.$$

Функция $\frac{1 - 5u + 2u^2}{1 + u}$, как легко выяснить, монотонно убывает от 1 до -1 при возрастании u от 0 до 1 и возрастает от -1 до $+\infty$ при возрастании u от 1 до $+\infty$.

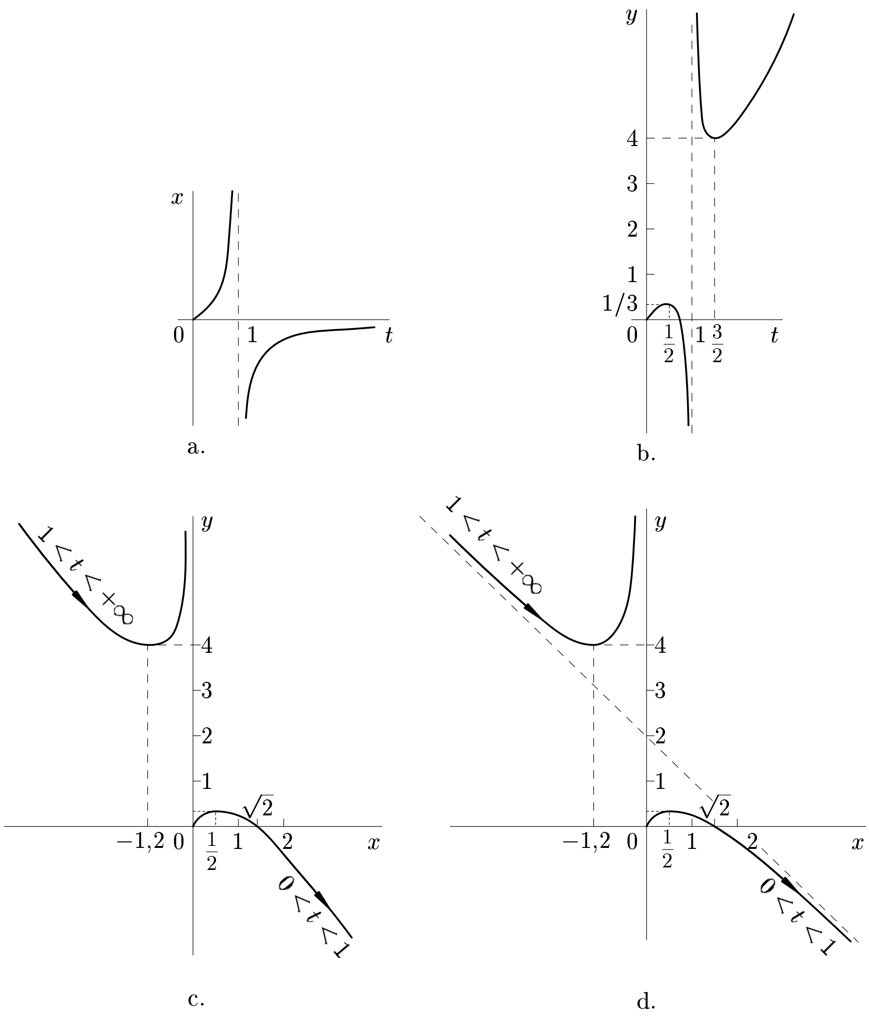

x
0
1
t
a.
y
4
3
2
1
1/3
0
1/2
1
3/2
t
b.
y
1 < t < +∞
4
3
2
1
√2
−1,2
0
1/2
1
2
x
0 < t < 1
c.
y
1 < t < +∞
4
3
2
1
√2
−1,2
0
1/2
1
2
x
0 < t < 1
d.

Рис. 36.

Из характера монотонности y'_x можно сделать заключение о характере выпуклости траектории на соответствующем участке. С учетом сказанного теперь можно построить следующий, более точный эскиз траектории движения точки (см. рис. 36, d).

Если бы мы рассматривали траекторию также для $t < 0$, то, как следует из нечетности функций $x(t)$, $y(t)$, к уже построенным на плоскости (x, y) линиям добавились бы еще центрально симметричные им кривые.

Подведем некоторые итоги в виде самых общих рекомендаций относительно порядка построения графика заданной аналитически функции. Вот эти рекомендации.

1° Указать область определения функции.

2° Отметить специфические особенности функции, если они очевидны (например, четность, нечетность, периодичность, совпадение с точностью до простейших преобразований координат с графиками уже известных функций).

3° Выяснить асимптотическое поведение функции при подходе к граничным точкам области определения и, в частности, найти асимптоты, если они существуют.

4° Найти промежутки монотонности функции и указать ее локальные экстремумы.

5° Уточнить характер выпуклости графика и указать точки перегиба.

6° Отметить характерные точки графика, в частности точки пересечения с осями координат, если таковые имеются и доступны вычислению.

Задачи и упражнения

1. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, причем $x_i \geqslant 0$, $\alpha_i > 0$ при $i = 1, \ldots, n$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Для любого числа $t \neq 0$ рассмотрим *среднее порядка t чисел $x_1, \ldots, x_n$* с весами α_i:

$$M_t(x, \alpha) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^t\right)^{1/t}.$$

В частности, при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \frac{1}{n}$ и $t = -1, 1, 2$ получаем соответственно среднее гармоническое, среднее арифметическое и среднее квадратическое.

Покажите, что

a) $\lim\limits_{t\to 0} M_t(x,\alpha) = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, т. е. в пределе можно получить среднее геометрическое;

b) $\lim\limits_{t\to+\infty} M_t(x,\alpha) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$;

c) $\lim\limits_{t\to-\infty} M_t(x,\alpha) = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$;

d) $M_t(x,\alpha)$ — неубывающая функция от t на $\mathbb{R}$, причем она строго возрастает, если $n > 1$ и все числа x_i отличны от нуля.

2. Покажите, что $|1+x|^p \geqslant 1+px+c_p\varphi_p(x)$, где c_p — постоянная, зависящая только от p, а

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} |x|^2 & \text{при} \quad |x| \leqslant 1, \\ |x|^p & \text{при} \quad |x| > 1, \end{cases} \qquad \text{если} \quad 1 < p \leqslant 2,$$

и $\varphi_p(x) = |x|^p$ на $\mathbb{R}$, если $2 < p$.

3. Проверьте, что $\cos x < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3$ при $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$.

4. Исследуйте функцию $f(x)$ и постройте ее график, если

a) $f(x) = \operatorname{arctg} \log_2 \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$;

b) $f(x) = \arccos\left(\frac{3}{2} - \sin x\right)$;

c) $f(x) = \sqrt[3]{x(x+3)^2}$;

d) постройте кривую, заданную в полярных координатах уравнением $\varphi = \frac{\rho}{\rho^2+1}$, $\rho \geqslant 0$, и укажите ее асимптоту;

e) укажите, как, зная график функции $y = f(x)$, получить графики функций $f(x)+B$; $Af(x)$; $f(x+b)$; $f(ax)$ и, в частности, $-f(x)$ и $f(-x)$.

5. Покажите, что если $f \in C(]a,b[)$ и для любых точек $x_1, x_2 \in\ ]a,b[$ выполнено неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

то функция f выпуклая на $]a,b[$.

6. Пусть $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, где $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

a) Опишите положение точки x по отношению к отрезку $[x_1, x_2]$ при различных значениях параметров α_1, α_2.

b) Нарисуйте график функции f, строго выпуклой на числовой оси, и прямую, проходящую через точки $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ графика. После этого напишите очевидные неравенства между $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$ и $\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$ при различных значениях параметров α_1, α_2, удовлетворяющих соотношению $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

c) Каковы неравенства (Юнга) между $a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}$ и $\frac{1}{p}a+\frac{1}{q}b$ при различных значениях p, q, если $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$?

d) Напишите уравнение касательной к графику функции $(1+x)^\alpha$ в точке $(0,1)$ и укажите правильный знак неравенства между величинами $(1+x)^\alpha$ и $1+\alpha x$ при $x>-1$ и различных значениях параметра α. В случае $\alpha \in \mathbb{N}$ имеем классическое неравенство Бернулли.

7. Покажите, что

a) если выпуклая функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ограничена, то она постоянна;

b) если для выпуклой функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0,$$

то f — постоянная;

c) для любой выпуклой функции f, определенной на промежутке $a<x<$ $<+\infty$ (или $-\infty<x<a$), отношение $\frac{f(x)}{x}$ стремится к конечному пределу или к бесконечности при стремлении x к бесконечности по области определения функции.

8. Покажите, что если $f\colon]a,b[\to\mathbb{R}$ — выпуклая функция, то

a) в любой точке $x\in]a,b[$ она имеет левую f'_- и правую f'_+ производные:

$$f'_-(x)=\lim_{h\to-0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\qquad f'_+(x)=\lim_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

причем $f'_-(x)\leqslant f'_+(x)$;

b) при $x_1,x_2\in]a,b[$ и $x_1<x_2$ имеет место неравенство $f'_+(x_1)\leqslant f'_-(x_2)$;

c) множество угловых точек графика $f(x)$ (для которых $f'_-(x)\neq f'_+(x)$) не более чем счетно.

9. *Преобразованием Лежандра*[1] функции $f\colon I\to\mathbb{R}$, определенной в промежутке $I\subset\mathbb{R}$, называется функция

$$f^*(t)=\sup_{x\in I}(tx-f(x)).$$

Покажите, что:

a) Множество I^* тех значений $t\in\mathbb{R}$, для которых $f^*(t)\in\mathbb{R}$ (т. е. $f^*(t)\neq\infty$), либо пусто, либо состоит из одной точки, либо является числовым промежутком, причем в последнем случае функция $f^*(t)$ выпукла на I^*.

b) Если f — выпуклая функция, то $I^*\neq\varnothing$ и при $f^*\in C(I^*)$

$$(f^*)^*(x)=\sup_{t\in I^*}(xt-f^*(t))=f(x)$$

---

[1] А. М. Лежандр (1752 – 1833) — известный французский математик.

для любого $x \in I$. Таким образом, преобразование Лежандра выпуклой функции *инволютивно* (квадрат его есть тождественное преобразование).

c) Имеет место неравенство

$$xt \leqslant f(x) + f^*(t) \quad \text{при} \quad x \in I \quad \text{и} \quad t \in I^*.$$

d) В случае, когда f — выпуклая дифференцируемая функция, $f^*(t) = tx_t - f(x_t)$, где x_t определяется из уравнения $t = f'(x)$; получите отсюда геометрическую интерпретацию преобразования Лежандра f^* и его аргумента t, показывающую, что преобразование Лежандра есть функция, определенная на множестве касательных к графику функции f.

e) Преобразованием Лежандра функции $f(x) = \frac{1}{\alpha}x^\alpha$ при $\alpha > 1$ и $x \geqslant 0$ является функция $f^*(t) = \frac{1}{\beta}t^\beta$, где $t \geqslant 0$ и $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$; получите отсюда, с учетом c), уже знакомое неравенство Юнга

$$xt \leqslant \frac{1}{\alpha}x^\alpha + \frac{1}{\beta}t^\beta.$$

f) Преобразованием Лежандра функции $f(x) = e^x$ является функция $f^*(t) = t\ln\frac{t}{e}$, $t > 0$, и справедливо неравенство

$$xt \leqslant e^x + t\ln\tfrac{t}{e}$$

при $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$.

10. *Кривизна, радиус и центр кривизны кривой в точке.* Пусть некоторая точка движется в плоскости по закону, задаваемому парой дважды дифференцируемых координатных функций $x = x(t)$, $y = y(t)$ от времени. При этом она описывает некоторую кривую, про которую говорят, что кривая задана в параметрическом виде $x = x(t)$, $y = y(t)$. Частным случаем такого задания является случай графика функции $y = f(x)$, где можно считать, что $x = t$ и $y = f(t)$. Мы хотим указать число, характеризующее кривизну кривой в некоторой точке, подобно тому как величина, обратная радиусу окружности, может служить показателем искривленности окружности. Этим сравнением мы и воспользуемся.

a) Найдите тангенциальную $\boldsymbol{a}_t$ и нормальную $\boldsymbol{a}_n$ составляющие вектора $\boldsymbol{a} = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t))$ ускорения точки, т. е. представьте $\boldsymbol{a}$ в виде суммы $\boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n$, где вектор $\boldsymbol{a}_t$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ скорости, т. е. направлен по касательной к траектории, а вектор $\boldsymbol{a}_n$ направлен по нормали к траектории.

b) Покажите, что при движении по окружности радиуса r имеет место соотношение

$$r = \frac{|\boldsymbol{v}(t)|}{|\boldsymbol{a}_n(t)|}.$$

c) При движении по любой кривой, учитывая b), величину

$$r(t) = \frac{|\boldsymbol{v}(t)|}{|\boldsymbol{a}_n(t)|}$$

естественно назвать *радиусом кривизны* кривой в точке $(x(t), y(t))$.

Покажите, что радиус кривизны вычисляется по формуле

$$r(t) = \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}.$$

d) Величину, обратную радиусу кривизны, называют *абсолютной кривизной* плоской кривой в данной точке $(x(t), y(t))$. Наряду с абсолютной кривизной рассматривается величина

$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}},$$

называемая *кривизной.*

Покажите, что знак кривизны характеризует направление поворота кривой по отношению к касательной. Выясните, какова размерность кривизны.

e) Покажите, что кривизну графика функции $y = f(x)$ в точке $(x, f(x))$ можно вычислить по формуле

$$k(x) = \frac{y''(x)}{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}}.$$

Сопоставьте знаки $k(x)$ и $y''(x)$ с направлением выпуклости графика.

f) Подберите константы a, b, R так, чтобы окружность $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ имела с данной параметрически заданной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ в точке $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ касание возможно более высокого порядка. Предполагается, что $x(t)$, $y(t)$ дважды дифференцируемы и $(\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0)) \neq (0, 0)$.

Указанная окружность называется *соприкасающейся окружностью* кривой в точке (x_0, y_0). Ее центр называется *центром кривизны* кривой в точке (x_0, y_0). Проверьте, что ее радиус совпадает с определенным в b) радиусом кривизны кривой в этой точке.

g) Частица без предварительного разгона под действием силы тяжести начинает скатываться с вершины ледяной горки параболического профиля. Уравнение профиля $x + y^2 = 1$, где $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Рассчитайте траекторию движения частицы до ее приземления.

§ 5. Комплексные числа и взаимосвязь элементарных функций

1. Комплексные числа. Подобно тому, как в области $\mathbb{Q}$ рациональных чисел алгебраическое уравнение $x^2 = 2$ не имело решений, уравнение $x^2 = -1$ не имеет решений в области действительных чисел $\mathbb{R}$, и подобно тому, как, вводя внешний по отношению к $\mathbb{Q}$ символ $\sqrt{2}$ в качестве решения уравнения $x^2 = 2$, мы увязываем его с операциями в $\mathbb{Q}$ и получаем новые числа вида $r_1 + \sqrt{2}r_2$, где $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, можно ввести символ i в качестве решения уравнения $x^2 = -1$ и связать это внешнее по отношению к $\mathbb{R}$ число i с действительными числами и арифметическими операциями в $\mathbb{R}$.

Замечательной особенностью указанного расширения поля $\mathbb{R}$ действительных чисел, кроме многого другого, является то, что в получающемся при этом поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел уже любое алгебраическое уравнение с действительными или комплексными коэффициентами будет иметь решение.

Реализуем теперь намеченную программу.

а. Алгебраическое расширение поля $\mathbb{R}$. Итак, вводим (следуя обозначению Эйлера) новое число i — *мнимую единицу*, такое, что $i^2 = -1$.

Взаимодействие i с действительными числами должно состоять в том, что можно умножать i на числа $y \in \mathbb{R}$, т. е. необходимо появляются числа вида iy, и складывать такие числа с вещественными, т. е. появляются числа вида $x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$.

Если мы хотим, чтобы на множестве объектов вида $x + iy$, которые мы вслед за Гауссом назовем *комплексными числами*, были определены привычные операции коммутативного сложения и коммутативного умножения, дистрибутивного относительно сложения, то необходимо положить по определению, что

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{1}$$

и

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) := (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \tag{2}$$

Два комплексных числа $x_1 + iy_1$, $x_2 + iy_2$ считаются равными в том и только в том случае, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Отождествим числа $x \in \mathbb{R}$ с числами вида $x + i \cdot 0$, а i — с числом $0 + i \cdot 1$. Роль нуля в множестве комплексных чисел, как видно из (1), играет число $0 + i \cdot 0 = 0 \in \mathbb{R}$, роль единицы, как видно из (2), — число $1 + i \cdot 0 = 1 \in \mathbb{R}$.

Из свойств вещественных чисел и определений (1), (2) следует, что множество комплексных чисел является полем, содержащим $\mathbb{R}$ в качестве подполя.

Поле комплексных чисел будем обозначать символом $\mathbb{C}$, а его элементы — чаще всего буквами z и w.

Единственный не очевидный момент в утверждении о том, что $\mathbb{C}$ — поле, который нуждается в проверке, состоит в том, что любое отличное от нуля комплексное число $z = x + iy$ имеет обратное z^{-1} по отношению к умножению, т. е. $z \cdot z^{-1} = 1$. Проверим это.

Число $x - iy$ назовем *сопряженным* к числу $z = x + iy$ и обозначим символом $\bar{z}$.

Заметим, что $z \cdot \bar{z} = (x^2 + y^2) + i \cdot 0 = x^2 + y^2 \neq 0$, если $z \neq 0$. Таким образом, в качестве z^{-1} следует взять $\frac{1}{x^2+y^2} \cdot \bar{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$.

b. Геометрическая интерпретация поля $\mathbb{C}$. Заметим, что после того, как алгебраические операции (1), (2) над комплексными числами введены, символ i, который привел нас к этим определениям, перестает быть необходимым.

Комплексное число $z = x + iy$ мы можем отождествить с упорядоченной парой (x, y) действительных чисел, называемых соответственно *действительной частью* и *мнимой частью* комплексного числа z (обозначения: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$[1]).

Но тогда, считая пару (x, y) декартовыми координатами точки плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, можно отождествить комплексные числа с точками этой плоскости или с двумерными векторами с координатами (x, y).

В такой векторной интерпретации покоординатное сложение (1) комплексных чисел соответствует правилу сложения векторов. Кроме того, такая интерпретация естественно приводит также к понятию *модуля* $|z|$ комплексного числа z как модуля или длины соответствующего ему вектора (x, y), т. е.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{если} \quad z = x + iy, \tag{3}$$

а также к способу измерения расстояния между комплексными числами z_1, z_2 как расстояния между соответствующими им точками плоскости, т. е. с помощью величины

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \tag{4}$$

Множество комплексных чисел, интерпретируемое как множество точек плоскости, называется *комплексной плоскостью* и также обозначается символом $\mathbb{C}$, подобно тому, как множество вещественных чисел и числовая прямая обозначаются одним символом $\mathbb{R}$.

Поскольку точку плоскости можно задать также полярными координатами (r, φ), связанными с декартовыми координатами формулами перехода

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \end{aligned} \tag{5}$$

[1] От лат. realis (вещественный) и imaginarius (мнимый).

комплексное число

$$z = x + iy \tag{6}$$

можно также представить в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{7}$$

Записи (6) и (7) называют соответственно *алгебраической* и *тригонометрической* формами комплексного числа.

В записи (7) число $r \geqslant 0$ называется *модулем* комплексного числа z (ибо, как видно из (5), $r = |z|$), а φ — *аргументом* числа z. Аргумент имеет смысл только при $z \neq 0$. В силу периодичности функций $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ аргумент комплексного числа определен с точностью до величины, кратной 2π, и символом $\operatorname{Arg} z$ обозначают множество углов вида $\varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, где φ — какой-то угол, удовлетворяющий соотношению (7). Если желают, чтобы комплексное число однозначно определяло некоторый угол $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, то договариваются заранее о диапазоне, в котором его выбирают. Чаще всего это бывает полуинтервал $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ или полуинтервал $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Если такой выбор сделан, то говорят, что выбрана *ветвь* (или *главная ветвь*) аргумента. Значения аргумента в пределах выбранного диапазона обычно обозначают символом $\arg z$.

Тригонометрическая форма (7) записи комплексных чисел удобна при выполнении операции умножения комплексных чисел. В самом деле, если

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

то

$$\begin{aligned} z_1{\cdot}z_2 = (r_1\cos\varphi_1 + ir_1\sin\varphi_1)(r_2\cos\varphi_2 + ir_2\sin\varphi_2) &= \\ = (r_1r_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - r_1r_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) &+ \\ + i(r_1r_2\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + r_1r_2\cos\varphi_1\sin\varphi_2)&, \end{aligned}$$

или

$$z_1{\cdot}z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \tag{8}$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Заметим, что мы на самом деле показали, что если $\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1$ и $\varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2$, то $(\varphi_1 + \varphi_2) \in \operatorname{Arg}(z_1{\cdot}z_2)$. Но, поскольку аргумент определен с точностью до $2\pi k$, можно записать, что

$$\operatorname{Arg}(z_1{\cdot}z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \tag{9}$$

понимая это равенство как равенство множеств, правое из которых есть совокупность чисел вида $\varphi_1 + \varphi_2$, где $\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1$, а $\varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2$. Таким образом, сумму аргументов полезно понимать в смысле равенства (9).

При таком понимании равенства аргументов можно, например, утверждать, что два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда соответственно равны их модули и аргументы.

Из формулы (8) по индукции вытекает следующая формула Муавра[1)]:

$$\text{если} \quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \text{то} \quad z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{10}$$

С учетом разъяснений по поводу аргумента комплексного числа формулу Муавра можно использовать, чтобы в явном виде выписать все комплексные решения уравнения $z^n = a$.

Действительно, если

$$a = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

и в силу формулы (10)

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

то $r = \sqrt[n]{\rho}$ и $n\varphi = \psi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, откуда $\varphi_k = \frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n}k$. Различные комплексные числа получаются, очевидно, только при $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Итак, мы находим n различных корней из a:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

В частности, если $a = 1$, т. е. $\rho = 1$ и $\psi = 0$, имеем

$$z_k = \sqrt[n]{{}_k1} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}k\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Эти точки находятся на единичной окружности в вершинах правильного n-угольника.

В связи с геометрической интерпретацией самих комплексных чисел полезно упомянуть о геометрической интерпретации арифметических действий над ними.

При фиксированном $b \in \mathbb{C}$ сумму $z + b$ можно интерпретировать как отображение $\mathbb{C}$ в себя, задаваемой формулой $z \mapsto z + b$. Это сдвиг плоскости на вектор b.

[1)] А. Муавр (1667 – 1754) — английский математик.

При фиксированном $a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ произведение az можно интерпретировать как отображение $z \mapsto az$ $\mathbb{C}$ в себя, являющееся композицией растяжения в $|a|$ раз и поворота на угол $\varphi \in \operatorname{Arg} a$. Это видно из формулы (8).

2. Сходимость в $\mathbb{C}$ и ряды с комплексными членами. Расстояние (4) между комплексными числами позволяет определить ε-окрестность числа $z_0 \in \mathbb{C}$ как множество $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$ — это круг (без граничной окружности) радиуса ε с центром в точке (x_0, y_0), если $z_0 = x_0 + iy_0$.

Будем говорить, что последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел *сходится к числу* $z_0 \in \mathbb{C}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$.

Из неравенств

$$\max\{|x_n - x_0|, |y_n - y_0|\} \leqslant |z_n - z_0| \leqslant |x_n - x_0| + |y_n - y_0| \tag{11}$$

видно, что последовательность комплексных чисел сходится тогда и только тогда, когда сходятся последовательности действительных и мнимых частей членов этой последовательности.

По аналогии с последовательностями вещественных чисел последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называют *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что при $n, m > N$ выполнено $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

Из неравенств (11) видно, что последовательность комплексных чисел фундаментальна тогда и только тогда, когда фундаментальны последовательности действительных и мнимых частей членов данной последовательности.

Учитывая критерий Коши для вещественных последовательностей, мы, таким образом, на основании неравенств (11) заключаем, что справедливо следующее

Утверждение 1 (критерий Коши). *Последовательность комплексных чисел сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Если сумму ряда комплексных чисел

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots \tag{12}$$

понимать как предел его частичных сумм $s_n = z_1 + \ldots + z_n$ при $n \to \infty$, то получаем также критерий Коши сходимости ряда (12).

Утверждение 2. *Ряд* (12) *сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $N \in \mathbb{N}$ такое, что при любых натуральных $n \geqslant m > N$ имеем*

$$|z_m + \ldots + z_n| < \varepsilon. \tag{13}$$

Отсюда, как, впрочем, и из самого определения сходимости ряда (12), видно, что для сходимости ряда необходимо, чтобы $z_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Как и в вещественном случае, ряд (12) называется *абсолютно* сходящимся, если сходится ряд

$$|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots \tag{14}$$

Из критерия Коши и неравенства

$$|z_m + \ldots + z_n| \leqslant |z_m| + \ldots + |z_n|$$

следует, что если ряд (12) сходится абсолютно, то он сходится.

Примеры. Ряды

1) $1 + \dfrac{1}{1!}z + \dfrac{1}{2!}z^2 + \ldots + \dfrac{1}{n!}z^n + \ldots,$

2) $z - \dfrac{1}{3!}z^3 + \dfrac{1}{5!}z^5 - \ldots,$

3) $1 - \dfrac{1}{2!}z^2 + \dfrac{1}{4!}z^4 - \ldots$

сходятся абсолютно при любом $z \in \mathbb{C}$, ибо ряды

1′) $1 + \dfrac{1}{1!}|z| + \dfrac{1}{2!}|z|^2 + \ldots,$

2′) $|z| + \dfrac{1}{3!}|z|^3 + \dfrac{1}{5!}|z|^5 + \ldots,$

3′) $1 + \dfrac{1}{2!}|z|^2 + \dfrac{1}{4!}|z|^4 + \ldots,$

как мы знаем, сходятся при любом значении $|z| \in \mathbb{R}$. Заметим, что здесь мы воспользовались равенством $|z^n| = |z|^n$.

Пример 4. Ряд $1 + z + z^2 + \ldots$ сходится абсолютно при $|z| < 1$, и его сумма равна $s = \frac{1}{1-z}$. При $|z| \geqslant 1$ он не сходится, так как в этом случае общий член ряда не стремится к нулю.

Ряды вида

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots \tag{15}$$

называют *степенными* рядами.

Применяя признак Коши (см. гл. III, § 1, п. 4) к ряду

$$|c_0| + |c_1(z - z_0)| + \ldots + |c_n(z - z_0)^n| + \ldots, \tag{16}$$

заключаем, что он сходится, если

$$|z - z_0| < \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1},$$

и его общий член не стремится к нулю, если $|z - z_0| > \left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1}$.

Отсюда получаем следующее

Утверждение 3 (формула Коши – Адамара[1]). *Степенной ряд* (15) *сходится в круге* $|z - z_0| < R$ *с центром в точке* z_0*, радиус* R *которого определяется по формуле Коши – Адамара*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{17}$$

В любой точке, внешней по отношению к этому кругу, степенной ряд расходится.

В любой точке этого круга степенной ряд сходится абсолютно.

Замечание. По поводу сходимости на граничной окружности $|z - z_0| = R$ в утверждении 3 ничего не говорится, поскольку здесь возможны все логически допустимые варианты.

Примеры. Ряды

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$,

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$

сходятся в единичном круге $|z| < 1$, но ряд 5) расходится всюду при $|z| = 1$; ряд 6) расходится при $z = 1$ и, как можно показать, сходится при $z = -1$; ряд 7) сходится абсолютно при $|z| = 1$, так как $\left|\frac{1}{n^2} z^2\right| = \frac{1}{n^2}$.

[1] Ж. Адамар (1865 – 1963) — известный французский математик.

Следует иметь в виду не учтенный в формулировке утверждения 3, но возможный вырожденный случай, когда в формуле (17) $R = 0$. В этом случае, разумеется, весь *круг сходимости* вырождается в единственную точку z_0 сходимости ряда (15).

Из утверждения 3, очевидно, вытекает

Следствие (первая теорема Абеля о степенных рядах)**.** *Если степенной ряд* (15) *сходится при некотором значении* z^**, то он сходится и даже абсолютно при любом* z*, удовлетворяющем неравенству* $|z - z_0| < |z^* - z_0|$.

Те утверждения, которые пока были получены, можно рассматривать как простое развитие уже известных нам фактов. Теперь докажем два общих утверждения о рядах, которые мы раньше не доказывали ни в каком виде, хотя частично обсуждали затрагиваемые в них вопросы.

Утверждение 4. *Если ряд* $z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$ *комплексных чисел сходится абсолютно, то ряд* $z_{n_1} + z_{n_2} + \ldots + z_{n_k} + \ldots$*, полученный перестановкой*[1] *его членов, также абсолютно сходится и к той же сумме.*

◄ Учитывая сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$, по числу $\varepsilon > 0$ найдем номер $N \in \mathbb{N}$ так, что $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} |z_n| < \varepsilon$.

Далее найдем номер $K \in \mathbb{N}$ так, что среди слагаемых суммы $\tilde{s}_k = z_{n_1} + \ldots + z_{n_k}$ при $k > K$ содержатся все слагаемые, входящие в сумму $s_N = z_1 + \ldots + z_N$. Если $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, то мы получаем, что при $k > K$

$$|s - \tilde{s}_k| \leqslant |s - s_N| + |s_N - \tilde{s}_k| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |z_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |z_n| < 2\varepsilon.$$

Таким образом, показано, что $\tilde{s}_k \to s$ при $k \to \infty$. Если применить уже доказанное к рядам $|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots$ и $|z_{n_1}| + |z_{n_2}| + \ldots + |z_{n_k}| + \ldots$, получим, что последний ряд сходится. Тем самым утверждение 4 доказано полностью. ►

[1] Членом с номером k (k-м членом) второго ряда является член z_{n_k} с номером n_k исходного ряда. Отображение $\mathbb{N} \ni k \mapsto n_k \in \mathbb{N}$ предполагается биективным отображением множества натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Следующее утверждение будет относиться к произведению

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots) \cdot (b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots)$$

рядов. Вопрос состоит в том, что если мы раскроем скобки и запишем всевозможные попарные произведения $a_i b_j$, то в них нет естественного порядка суммирования, ибо есть два индекса суммирования. Множество пар (i, j), где $i, j \in \mathbb{N}$, как нам известно, счетно, поэтому можно написать ряд с членами $a_i b_j$, взятыми в некотором порядке. От того, в каком порядке эти члены брать, может зависеть сумма такого ряда. Но, как мы только что видели, в абсолютно сходящихся рядах сумма не зависит от перестановки слагаемых. Таким образом, желательно выяснить, когда ряд с членами $a_i b_j$ сходится абсолютно.

Утверждение 5. *Произведение абсолютно сходящихся рядов является абсолютно сходящимся рядом, сумма которого равна произведению сумм перемножаемых рядов.*

◀ Заметим сначала, что, какую бы конечную сумму $\sum a_i b_j$ членов вида $a_i b_j$ мы ни взяли, всегда можно указать N так, что произведение сумм $A_N = a_1 + \ldots + a_N$ и $B_N = b_1 + \ldots + b_N$ будет содержать все слагаемые исходной суммы. Поэтому

$$\left|\sum a_i b_j\right| \leqslant \sum |a_i b_j| \leqslant \sum_{i,j=1}^{N} |a_i b_j| = \sum_{i=1}^{N} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{N} |b_j| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|,$$

откуда вытекает абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j$, сумма которого, таким образом, однозначно определена независимо от порядка слагаемых. В таком случае ее можно получить, например, как предел произведения сумм $A_n = a_1 + \ldots + a_n$, $B_n = b_1 + \ldots + b_n$ при $n \to \infty$. Но $A_n B_n \to AB$ при $n \to \infty$, где $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, что и завершает доказательство высказанного утверждения 5. ▶

Рассмотрим важный

Пример 8. Ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n$, $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} b^m$ сходятся абсолютно. В произведении этих рядов будем группировать мономы $a^n b^m$ с одинаковой суммой $n+m=k$ показателей степени. Тогда получим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n+m=k}\frac{1}{n!}a^n\frac{1}{m!}b^m\right).$$

Но

$$\sum_{m+n=k}\frac{1}{n!\,m!}a^nb^m=\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{k}\frac{k!}{n!\,(k-n)!}a^nb^{k-n}=\frac{1}{k!}(a+b)^k,$$

поэтому мы получаем, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}a^n\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}b^m=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(a+b)^k. \tag{18}$$

3. Формула Эйлера и взаимосвязь элементарных функций. В примерах 1) – 3) мы установили абсолютную сходимость в $\mathbb{C}$ рядов, полученных распространением в комплексную область тейлоровских разложений функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, определенных на $\mathbb{R}$. По этой причине естественны следующие определения функций e^z, $\cos z$, $\sin z$ в $\mathbb{C}$:

$$e^z=\exp z:=1+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\ldots, \tag{19}$$

$$\cos z:=1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\ldots, \tag{20}$$

$$\sin z:=z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\ldots \tag{21}$$

Подставим, следуя Эйлеру[1)], в (19) $z=iy$. Группируя соответствующим образом слагаемые частичных сумм получающегося при этом ряда, найдем, что

$$1+\frac{1}{1!}(iy)+\frac{1}{2!}(iy)^2+\frac{1}{3!}(iy)^3+\frac{1}{4!}(iy)^4+\frac{1}{5!}(iy)^5+\ldots=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2!}y^2+\frac{1}{4!}y^4-\ldots\right)+i\left(\frac{1}{1!}y-\frac{1}{3!}y^3+\frac{1}{5!}y^5-\ldots\right),$$

[1)] Л. Эйлер (1707 – 1783) — выдающийся математик и механик, швейцарец по происхождению, большую часть жизни проживший в Петербурге. По выражению Лапласа, «Эйлер — общий учитель всех математиков второй половины XVIII века».

т. е.

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y.} \tag{22}$$

Это и есть знаменитая *формула Эйлера.*

При ее выводе мы пользовались тем, что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ и т. д. Число y в формуле (22) может быть как действительным, так и произвольным комплексным.

Из определений (20), (21) видно, что

$$\cos(-z) = \cos z,$$
$$\sin(-z) = -\sin z,$$

т. е. $\cos z$ — четная функция, а $\sin z$ — нечетная функция. Таким образом,

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y.$$

Сравнивая последнее равенство с формулой (22), получаем

$$\cos y = \frac{1}{2}\left(e^{iy} + e^{-iy}\right),$$
$$\sin y = \frac{1}{2i}\left(e^{iy} - e^{-iy}\right).$$

Поскольку y — любое комплексное число, то эти равенства лучше переписать в обозначениях, не вызывающих недоразумений:

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \\ \sin z &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Таким образом, если принять, что $\exp z$ задается соотношением (19), то формулы (23) (равносильные разложениям (20), (21)), как и формулы

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} z &= \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right), \\ \operatorname{sh} z &= \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right), \end{aligned} \tag{24}$$

можно принять в качестве определений соответствующих круговых и гиперболических функций. Забыв все наводящие и подчас не вполне строго обоснованные соображения, относившиеся к тригонометрическим функциям (которые, однако, привели нас к формуле Эйлера), можно было бы теперь проделать типичный математический трюк, приняв формулы (23), (24) за определения и получить из них уже совсем формально свойства круговых и гиперболических функций.

Например, основные тождества

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1,$$
$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1,$$

как и свойства четности, проверяются непосредственно.

Более глубокие свойства, как, например, формулы для косинуса или синуса суммы, вытекают из характеристического свойства показательной функции

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2), \tag{25}$$

которое, очевидно, следует из определения (19) и формулы (18). Выведем формулы для косинуса и синуса суммы.

С одной стороны, по формуле Эйлера

$$e^{i(z_1+z_2)} = \cos(z_1 + z_2) + i \sin(z_1 + z_2). \tag{26}$$

С другой стороны, по свойству показательной функции и формуле Эйлера

$$e^{i(z_1+z_2)} = e^{iz_1} e^{iz_2} = (\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2) =$$
$$= (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) + i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2). \tag{27}$$

Если бы z_1 и z_2 были действительными числами, то, приравнивая действительные и мнимые части чисел из формул (26) и (27), мы уже получили бы искомые формулы. Поскольку мы собираемся доказать их для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, то, пользуясь четностью $\cos z$ и нечетностью $\sin z$, запишем еще одно равенство:

$$e^{-i(z_1+z_2)} = (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) - i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2). \tag{28}$$

Сравнивая (27) и (28), находим

$$\cos(z_1 + z_2) = \frac{1}{2}\left(e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}\right) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2.$$

Совершенно аналогично можно было бы получить соответствующие формулы для гиперболических функций $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$, которые, кстати, как видно из формул (23), (24), связаны с функциями $\cos z$, $\sin z$ простыми соотношениями

$$\operatorname{ch} z = \cos iz,$$
$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz.$$

Однако получить такие геометрические очевидности, как $\sin \pi = 0$ или $\cos(z + 2\pi) = \cos z$, из определений (23), (24) уже очень трудно. Значит, стремясь к точности, не следует забывать те задачи, где соответствующие функции естественным образом возникают. По этой причине мы не станем здесь преодолевать возможные затруднения в описании свойств тригонометрических функций, связанные с определениями (23), (24), а еще раз вернемся к этим функциям после теории интеграла. Наша цель сейчас состояла только в том, чтобы продемонстрировать замечательное единство, казалось бы, совершенно различных функций, которое невозможно было обнаружить без выхода в область комплексных чисел.

Если считать известным, что для $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x,$$
$$\cos 0 = 1, \qquad \sin 0 = 0,$$

то из формулы Эйлера (22) получаем соотношение

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0,} \tag{29}$$

в котором представлены важнейшие постоянные различных областей математики (1 — арифметика, π — геометрия, e — анализ, i — алгебра).

Из (25) и (29), как и из формулы (22), видно, что

$$\exp(z + i2\pi) = \exp z,$$

т. е. экспонента оказывается периодической функцией на $\mathbb{C}$ с чисто мнимым периодом $T = i2\pi$.

Учитывая формулу Эйлера, тригонометрическую запись (7) комплексного числа теперь можно представить в виде

$$z = re^{i\varphi},$$

где r — модуль числа z, а φ — его аргумент.

Формула Муавра теперь становится совсем простой:

$$z^n = r^n e^{in\varphi}. \tag{30}$$

4. Представление функции степенным рядом, аналитичность. Функция $w = f(z)$ комплексного переменного z с комплексными значениями w, определенная на некотором множестве $E \subset \mathbb{C}$, есть отображение $f\colon E \to \mathbb{C}$. График такой функции есть подмножество в $\mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ и поэтому традиционной наглядности не имеет. Чтобы как-то компенсировать эту потерю, обычно берут два экземпляра комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и в одном отмечают точки области определения, а в другом — точки области значений.

В рассмотренных ниже примерах указаны область E и ее образ при соответствующем отображении.

Пример 9.

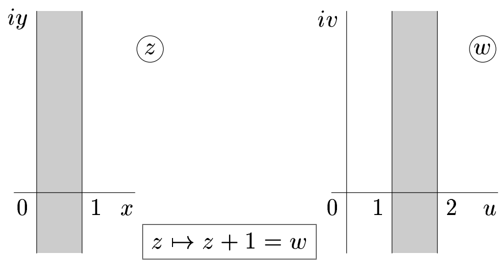


Рис. 37.

Пример 10.

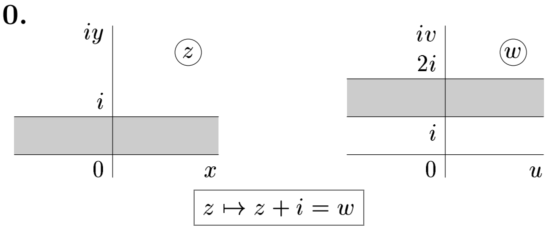


Рис. 38.

Пример 11.

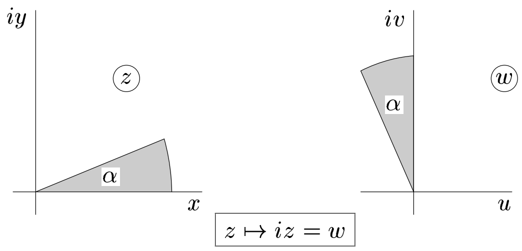


Рис. 39.

Это следует из того, что $i = e^{i\pi/2}$, $z = re^{i\varphi}$ и $iz = re^{i(\varphi+\pi/2)}$, т. е. произошел поворот на угол $\frac{\pi}{2}$.

Пример 12.

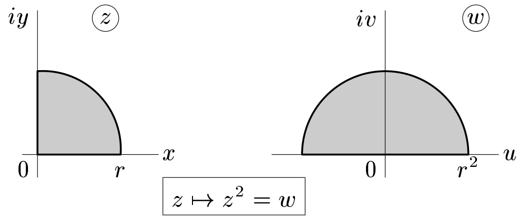


Рис. 40.

Ибо если $z = re^{i\varphi}$, то $z^2 = r^2e^{i2\varphi}$.

Пример 13.

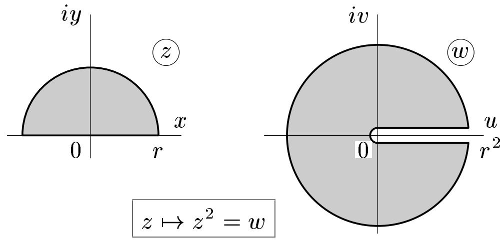


Рис. 41.

Пример 14.

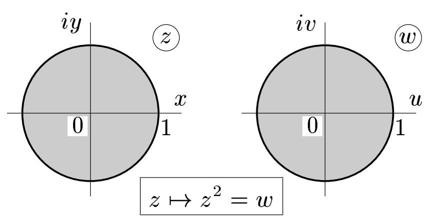


Рис. 42.

Из примеров 12, 13 понятно, что в данном случае образом единичного круга снова будет единичный круг, но только накрытый в два слоя.

Пример 15.

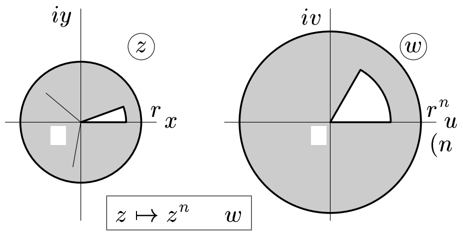


Рис. 43.

Если $z = re^{i\varphi}$, то в силу (30) $z^n = r^n e^{in\varphi}$, поэтому в нашем случае образом круга радиуса r будет круг радиуса r^n и каждая точка последнего является образом n точек исходного круга (расположенных, кстати, в вершинах правильного n-угольника).

Исключение в этом смысле составляет только точка $w = 0$, прообраз которой есть точка $z = 0$. Однако при $z \to 0$ функция z^n есть бесконечно малая порядка n, поэтому говорят, что при $z = 0$ функция имеет нуль порядка n. С учетом такой кратности нуля можно теперь говорить, что число прообразов любой точки w при отображении $z \mapsto z^n = w$ равно n. В частности, уравнение $z^n = 0$ имеет n совпадающих корней $z_1 = \ldots = z_n = 0$.

В соответствии с общим определением непрерывности, функция $f(z)$ комплексного переменного называется *непрерывной* в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, если для любой окрестности $V(f(z_0))$ ее значения $f(z_0)$ найдется окрестность $U(z_0)$ такая, что при любом $z \in U(z_0)$ будет $f(z) \in V(f(z_0))$. Короче говоря,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Производной функции $f(z)$ в точке z_0, как и для вещественного случая, назовем величину

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \tag{31}$$

если этот предел существует.

Равенство (31) эквивалентно равенству

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0) \tag{32}$$

при $z \to z_0$, соответствующему определению *дифференцируемости* функции в точке z_0.

Поскольку определение дифференцируемости в комплексном случае совпадает с соответствующим определением для вещественных функций, а арифметические свойства поля $\mathbb{C}$ и поля $\mathbb{R}$ одинаковы, то можно сказать, что все общие правила дифференцирования справедливы и в комплексном случае.

Пример 16.

$$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z),$$
$$(f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$
$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z),$$

поэтому если $f(z) = z^2$, то $f'(z) = 1 \cdot z + z \cdot 1 = 2z$, или если $f(z) = z^n$, то $f'(z) = nz^{n-1}$, а если

$$P_n(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots + c_n(z - z_0)^n,$$

то

$$P_n'(z) = c_1 + 2c_2(z - z_0) + \ldots + nc_n(z - z_0)^{n-1}.$$

Теорема 1. *Сумма $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ степенного ряда — бесконечно дифференцируемая функция во всем круге сходимости ряда. При этом*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k}{dz^k}\bigl(c_n(z - z_0)^n\bigr), \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

и

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \qquad n = 0, 1, \ldots$$

◀ Выражения для коэффициентов c_n очевидным образом получаются из выражений для $f^{(k)}(z)$ при $k = n$ и $z = z_0$.

В свою очередь, формулы для $f^{(k)}(z)$ достаточно проверить только при $k = 1$, ибо тогда $f'(z)$ снова окажется суммой степенного ряда.

Итак, проверим, что функция $\varphi(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z - z_0)^{n-1}$ действительно является производной для $f(z)$.

Прежде всего заметим, что в силу формулы Коши – Адамара (17) радиус сходимости последнего ряда совпадает с радиусом сходимости R исходного степенного ряда для $f(z)$.

В дальнейшем для упрощения записи будем считать, что $z_0 = 0$, т. е. что $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $\varphi(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}$ и ряды сходятся при $|z| < R$.

Поскольку внутри круга сходимости степенной ряд сходится абсолютно, можно заметить, и это существенно, что при $|z| \leqslant r < R$ справедлива оценка $|nc_n z^{n-1}| = n|c_n||z|^{n-1} \leqslant n|c_n|r^{n-1}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|c_n|r^{n-1}$ сходится. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что при $|z| \leqslant r$

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} nc_n z^{n-1}\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} nc_n r^{n-1} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, с точностью до $\frac{\varepsilon}{3}$ функция $\varphi(z)$ в любой точке круга $|z| < r$ совпадает с N-й частичной суммой определяющего ее ряда.

Пусть теперь ζ и z — произвольные точки этого круга. Преобразование

$$\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\zeta^n - z^n}{\zeta - z} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\zeta^{n-1} + \zeta^{n-2} z + \ldots + \zeta z^{n-2} + z^{n-1}\right)$$

и оценка $|c_n(\zeta^{n-1} + \ldots + z^{n-1})| \leqslant |c_n| n r^{n-1}$ позволяют, как и выше, заключить, что интересующее нас разностное отношение при $|\zeta| < r$ и $|z| < r$ совпадает, с точностью до $\frac{\varepsilon}{3}$, с N-й частичной суммой определяющего его ряда. Значит, при $|\zeta| < r$ и $|z| < r$

$$\left|\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} - \varphi(z)\right| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{N} c_n \frac{\zeta^n - z^n}{\zeta - z} - \sum_{n=1}^{N} nc_n z^{n-1}\right| + 2\frac{\varepsilon}{3}.$$

Если теперь, фиксировав z, устремить ζ к z, то, переходя к пределу в конечной сумме, видим, что при ζ достаточно близких к z правая часть последнего неравенства, а с нею и левая становятся меньше ε.

Таким образом, для любой точки z в круге $|z| < r < R$, а ввиду произвольности r, и для любой точки круга $|z| < R$ проверено, что $f'(z) = \varphi(z)$. ►

Эта теорема позволяет точно указать тот класс функций, для которых их ряды Тейлора сходятся к ним.

Говорят, что функция *аналитична* в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, если в некоторой окрестности этой точки ее можно представить в следующем («аналитическом») виде:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

т. е. как сумму степенного ряда по степеням $z - z_0$.

Нетрудно проверить (см. задачу 7), что сумма степенного ряда аналитична в любой внутренней точке круга сходимости этого ряда.

С учетом определения аналитичности функции, из доказанной теоремы получаем

Следствие. a) *Если функция аналитична в точке, то она бесконечно дифференцируема в этой точке и ее ряд Тейлора сходится к ней в окрестности этой точки.*

b) *Ряд Тейлора функции, определенной в окрестности точки и бесконечно дифференцируемой в точке, сходится к функции в некоторой окрестности точки тогда и только тогда, когда функция аналитична в этой точке.*

В теории функции комплексного переменного доказывается замечательный факт, не имеющий аналогов для вещественных функций. А именно, оказывается, что если функция $f(z)$ дифференцируема в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, то она аналитична в этой точке. Это и в самом деле удивительно, поскольку в силу доказанной выше теоремы отсюда следует, что если функция $f(z)$ имеет одну производную $f'(z)$ в окрестности точки, то в этой окрестности она имеет также производные всех порядков.

На первый взгляд это так же неожиданно, как то, что, присоединив к $\mathbb{R}$ корень i одного конкретного уравнения $z^2 = -1$, мы получаем поле $\mathbb{C}$, в котором любой алгебраический многочлен $P(z)$ имеет корень. Факт разрешимости в $\mathbb{C}$ алгебраического уравнения $P(z) = 0$ мы собираемся использовать и поэтому докажем его в качестве хорошей иллюстрации к введенным в этом параграфе начальным представлениям о комплексных числах и функциях комплексного переменного.

5. Алгебраическая замкнутость поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Если мы докажем, что любой полином $P(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$, $n \geqslant 1$, с комплексными коэффициентами имеет корень в $\mathbb{C}$, то уже не возникнет надобности в расширении поля $\mathbb{C}$, вызванной неразрешимостью в $\mathbb{C}$ некоторого алгебраического уравнения. В этом смысле утверждение о наличии корня у любого многочлена $P(z)$ устанавливает *алгебраическую замкнутость поля* $\mathbb{C}$.

Чтобы получить вполне наглядное представление о том, почему в $\mathbb{C}$ любой полином имеет корень, в то время как в $\mathbb{R}$ его могло не быть, воспользуемся геометрической интерпретацией комплексного числа и функции комплексного переменного.

Заметим, что

$$P(z) = z^n \left(\frac{c_0}{z^n} + \frac{c_1}{z^{n-1}} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{z} + c_n\right)$$

и, следовательно, $P(z) = c_n z^n + o(z^n)$ при $|z| \to \infty$. Поскольку нас интересует корень уравнения $P(z) = 0$, то, поделив обе части уравнения на c_n, можно считать, что коэффициент c_n многочлена $P(z)$ равен 1 и потому

$$P(z) = z^n + o(z^n) \quad \text{при} \quad |z| \to \infty. \tag{33}$$

Если вспомнить (см. пример 15), что при отображении $z \mapsto z^n$ окружность радиуса r переходит в окружность радиуса r^n с центром в точке 0, то при достаточно больших значениях r, в силу (33), с малой относительной погрешностью образ окружности $|z| = r$ будет совпадать с окружностью $|w| = r^n$ плоскости w (рис. 44). Во всяком случае, важно, что образом будет кривая, охватывающая точку $w = 0$.

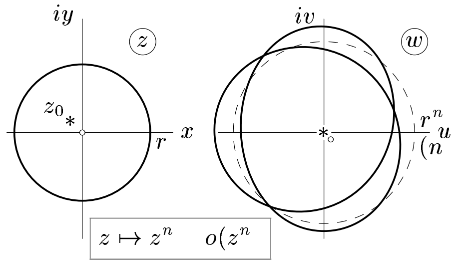


Рис. 44.

Если круг $|z| \leqslant r$ рассматривать как пленку, натянутую на окружность $|z| = r$, то при непрерывном отображении, осуществляемом полиномом $w = P(z)$, эта пленка перейдет в пленку, натянутую на образ окружности. Но поскольку последний охватывает точку $w = 0$, то некоторая точка этой пленки обязана совпадать с $w = 0$ и, значит, в круге $|z| < r$ найдется точка z_0, которая при отображении $w = P(z)$ перешла именно в $w = 0$, т. е. $P(z_0) = 0$.

Это наглядное рассуждение приводит к ряду очень важных и полезных понятий топологии (*индекс* пути относительно точки, *степень отображения*) и с помощью этих понятий может быть доведено до полного доказательства, справедливого, как можно понять, не только для полиномов. Однако эти рассмотрения, к сожалению, отвлекли бы нас от основного предмета, которым мы сейчас занимаемся; поэтому мы проведем другое доказательство, лежащее в русле тех идей, с которыми мы уже достаточно освоились.

Теорема 2. *Каждый полином*

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$$

степени $n \geqslant 1$ *с комплексными коэффициентами имеет в* $\mathbb{C}$ *корень.*

◀ Без ограничения общности утверждения теоремы, очевидно, можно считать, что $c_n = 1$.

Пусть $\mu = \inf\limits_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$. Поскольку $P(z) = z^n \left(1 + \frac{c_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{c_0}{z^n}\right)$, то

$$|P(z)| \geqslant |z|^n \left(1 - \frac{|c_{n-1}|}{|z|} - \ldots - \frac{|c_0|}{|z|^n}\right),$$

и, очевидно, $|P(z)| > \max\{1, 2\mu\}$ при $|z| > R$, если R достаточно велико. Следовательно, точки последовательности $\{z_k\}$, в которых $0 < |P(z_k)| - \mu < \frac{1}{k}$, лежат в круге $|z| \leqslant R$.

Проверим, что в $\mathbb{C}$ (и даже в этом круге) есть точка z_0, в которой $|P(z_0)| = \mu$. Для этого заметим, что если $z_k = x_k + iy_k$, то $\max\{|x_k|, |y_k|\} \leqslant |z_k| \leqslant R$ и, таким образом, последовательности действительных чисел $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ оказываются ограниченными. Извлекая сначала сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_l}\}$ из $\{x_k\}$, а затем сходящуюся подпоследовательность $\{y_{k_{l_m}}\}$ из $\{y_{k_l}\}$, получим подпоследовательность $z_{k_{l_m}} = x_{k_{l_m}} + iy_{k_{l_m}}$ последовательности $\{z_k\}$, которая имеет предел $\lim\limits_{m\to\infty} z_{k_{l_m}} = \lim\limits_{m\to\infty} x_{k_{l_m}} + i \lim\limits_{m\to\infty} y_{k_{l_m}} = x_0 + iy_0 = z_0$, и поскольку $|z_k| \to |z_0|$ при $k \to \infty$, то $|z_0| \leqslant R$. Чтобы избежать громоздких обозначений и не переходить к подпоследовательностям, будем считать, что уже сама последовательность $\{z_k\}$ сходится. Из непрерывности $P(z)$ в $z_0 \in \mathbb{C}$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} P(z_k) = P(z_0)$. Но тогда[1] $|P(z_0)| = \lim\limits_{k\to\infty} |P(z_k)| = \mu$.

[1] Обратите внимание — мы, с одной стороны, показали, что из любой ограниченной по модулю последовательности комплексных чисел можно извлечь сходящуюся

Теперь предположим, что $\mu > 0$, и приведем это предположение к противоречию. Если $P(z_0) \neq 0$, то рассмотрим полином $Q(z)=\dfrac{P(z+z_0)}{P(z_0)}$. По построению, $Q(0) = 1$ и $|Q(z)| = \dfrac{|P(z+z_0)|}{|P(z_0)|} \geqslant 1$.

Поскольку $Q(0) = 1$, полином $Q(z)$ имеет вид

$$Q(z) = 1 + q_k z^k + q_{k+1} z^{k+1} + \ldots + q_n z^n,$$

где $|q_k| \neq 0$ и $1 \leqslant k \leqslant n$. Если $q_k = \rho e^{i\psi}$, то при $\varphi = \dfrac{\pi - \psi}{k}$ будем иметь $q_k \cdot (e^{i\varphi})^k = \rho e^{i\psi} e^{i(\pi-\psi)} = \rho e^{i\pi} = -\rho = -|q_k|$. Таким образом, при $z = re^{i\varphi}$ получим

$$\begin{aligned}|Q(re^{i\varphi})| \leqslant |1 + q_k z^k| + \big(|q_{k+1} z^{k+1}| + \ldots + |q_n z^n|\big) =\\ = \big|1 - r^k |q_k|\big| + r^{k+1}\big(|q_{k+1}| + \ldots + |q_n| r^{n-k-1}\big) =\\ = 1 - r^k\big(|q_k| - r|q_{k+1}| - \ldots - r^{n-k}|q_n|\big) < 1,\end{aligned}$$

если r достаточно близко к нулю. Но $|Q(z)| \geqslant 1$ при $z \in \mathbb{C}$. Полученное противоречие показывает, что $P(z_0) = 0$. ►

Замечание 1. Первые доказательства теоремы о разрешимости в $\mathbb{C}$ любого алгебраического уравнения с комплексными коэффициентами (которую по традиции часто называют основной теоремой алгебры) были даны Даламбером и Гауссом, который вообще вдохнул вполне реальную жизнь в так называемые «мнимые» числа, найдя им разнообразные и глубокие приложения.

Замечание 2. Многочлен с вещественными коэффициентами $P(z) = a_0 + \ldots + a_n z^n$, как мы знаем, не всегда имеет вещественные корни. Однако по отношению к произвольному многочлену с комплексными коэффициентами он обладает той особенностью, что если $P(z_0) = 0$, то и $P(\bar{z}_0) = 0$. Действительно, из определения сопряженного числа и правил сложения комплексных чисел следует, что $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$. Из тригонометрической формы записи комплексного числа и правил умножения

подпоследовательность, а с другой стороны, продемонстрировали еще одно из возможных доказательств теоремы о минимуме непрерывной функции на отрезке, как в данном случае это было сделано в круге $|z| \leqslant R$.

комплексных чисел видно, что

$$\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{(r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2})} = \overline{r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}} = \\ = r_1 r_2 e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1 e^{-i\varphi_1} \cdot r_2 e^{-i\varphi_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

Таким образом,

$$\overline{P(z_0)} = \overline{a_0 + \ldots + a_n z_0^n} = \bar{a}_0 + \ldots + \bar{a}_n \bar{z}_0^n = a_0 + \ldots + a_n \bar{z}_0^n = P(\bar{z}_0),$$

и если $P(z_0) = 0$, то $\overline{P(z_0)} = P(\bar{z}_0) = 0$.

Следствие 1. *Любой многочлен* $P(z) = c_0 + \ldots + c_n z^n$ *степени* $n \geqslant 1$ *с комплексными коэффициентами допускает, и притом единственное с точностью до порядка сомножителей, представление в виде*

$$P(z) = c_n(z - z_1)\ldots(z - z_n), \tag{34}$$

где $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ (*и, может быть, не все числа* $z_1, \ldots, z_n$ *различны между собой*).

◀ Из алгоритма деления («уголком») многочлена $P(z)$ на многочлен $Q(z)$ степени $m \leqslant n$ находим, что $P(z) = q(z)Q(z) + r(z)$, где $q(z)$ и $r(z)$ — некоторые многочлены, причем степень $r(z)$ меньше степени $Q(z)$, т. е. меньше m. Таким образом, если $m = 1$, то $r(z) = r$ — просто постоянная.

Пусть z_1 — корень многочлена $P(z)$. Тогда $P(z) = q(z)(z - z_1) + r$, и поскольку $P(z_1) = r$, то $r = 0$. Значит, если z_1 — корень многочлена $P(z)$, то справедливо представление $P(z) = (z - z_1)q(z)$. Степень многочлена $q(z)$ равна $n - 1$, и с ним можно повторить то же самое рассуждение. По индукции получаем, что $P(z) = c(z - z_1)\ldots(z - z_n)$. Поскольку должно быть $cz^n = c_n z^n$, то $c = c_n$. ▶

Следствие 2. *Любой многочлен* $P(z) = a_0 + \ldots + a_n z^n$ *с действительными коэффициентами можно разложить в произведение линейных и квадратичных многочленов с действительными коэффициентами.*

◀ Это вытекает из предыдущего следствия 1 и замечания 2, в силу которого вместе с z_k корнем $P(z)$ является также число $\bar{z}_k$. Тогда, перемножив в разложении (34) многочлена скобки $(z - z_k)(z - \bar{z}_k)$, получим многочлен $z^2 - (z_k + \bar{z}_k)z + |z_k|^2$ второго порядка с действительными коэффициентами. Число c_n, в нашем случае равное a_n, вещественное, и его можно внести в одну из скобок разложения, не меняя ее степени. ►

Перемножив одинаковые скобки в разложении (34), это разложение можно переписать в виде

$$P(z) = c_n(z - z_1)^{k_1} \dots (z - z_p)^{k_p}. \tag{35}$$

Число k_j называется *кратностью* корня z_j.

Поскольку $P(z) = (z - z_j)^{k_j} Q(z)$, где $Q(z_j) \neq 0$, то

$$P'(z) = k_j(z - z_j)^{k_j - 1} Q(z) + (z - z_j)^{k_j} Q'(z) = (z - z_j)^{k_j - 1} R(z),$$

где $R(z_j) = k_j Q(z_j) \neq 0$. Таким образом, мы приходим к следующему заключению.

Следствие 3. *Каждый корень z_j многочлена $P(z)$ кратности $k_j > 1$ является корнем кратности $k_j - 1$ многочлена $P'(z)$ — производной $P(z)$.*

Не будучи пока в состоянии найти корни многочлена $P(z)$, мы на основании последнего утверждения и разложения (35) можем найти многочлен $p(z) = (z - z_1) \dots (z - z_p)$, корни $z_1, \dots, z_p$ которого совпадают с корнями $P(z)$, но все они уже кратности 1.

Действительно, по алгоритму Евклида сначала найдем многочлен $q(z)$ — наибольший общий делитель $P(z)$ и $P'(z)$. В силу следствия 3, разложения (35) и теоремы 2, многочлен $q(z)$ с точностью до постоянного множителя равен произведению $(z - z_1)^{k_1 - 1} \dots (z - z_p)^{k_p - 1}$, поэтому, поделив $P(z)$ на $q(z)$, с точностью до постоянного множителя (от которого можно затем избавиться дополнительным делением на коэффициент при z^p) получим многочлен $p(z) = (z - z_1) \dots (z - z_p)$.

Рассмотрим теперь отношение $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ двух многочленов, где $Q(x) \not\equiv \text{const}$. Если степень $P(x)$ не меньше степени $Q(x)$, то, применив алгоритм деления многочленов, представим $P(x)$ в виде $P(x) = p(x)Q(x) + r(x)$, где $p(x)$ и $r(x)$ — некоторые многочлены, причем степень $r(x)$ уже меньше, чем степень $Q(x)$. Таким образом, получаем представление $R(x)$ в виде $R(x) = p(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$, где дробь $\frac{r(x)}{Q(x)}$ уже правильная в том смысле, что степень $r(x)$ меньше степени $Q(x)$.

Следствие, которое мы сейчас сформулируем, относится к представлению правильной дроби в виде суммы дробей, называемых *простейшими*.

Следствие 4. a) *Если* $Q(z) = (z-z_1)^{k_1} \dots (z-z_p)^{k_p}$ *и* $\frac{P(z)}{Q(z)}$ *— правильная дробь, то существует и притом единственное представление дроби* $\frac{P(z)}{Q(z)}$ *в виде*

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{k_j} \frac{a_{jk}}{(z-z_j)^k} \right). \tag{36}$$

b) *Если* $P(x)$ *и* $Q(x)$ *— многочлены с действительными коэффициентами и*

$$Q(x) = (x-x_1)^{k_1} \dots (x-x_l)^{k_l} (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \dots (x^2 + p_n x + q_n)^{m_n},$$

то существует и притом единственное представление правильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *в виде*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{k=1}^{k_j} \frac{a_{jk}}{(x-x_j)^k} \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m_j} \frac{b_{jk}x + c_{jk}}{(x^2 + p_j x + q_j)^k} \right), \tag{37}$$

где a_{jk}, b_{jk}, c_{jk} *— действительные числа.*

Заметим, что универсальным, хотя и не всегда самым коротким способом фактического отыскания разложений (36) или (37) является метод неопределенных коэффициентов, состоящий в том, что сумма в правой части (36) или (37) приводится к общему знаменателю $Q(x)$, после чего приравниваются коэффициенты полученного числителя и соответствующие коэффициенты многочлена $P(x)$. Система линейных уравнений, к которой мы при этом приходим, в силу следствия 4 всегда однозначно разрешима.

Поскольку нас, как правило, будет интересовать разложение конкретной дроби, которое мы получим методом неопределенных коэффициентов, то кроме уверенности, что это всегда можно сделать, нам от следствия 4 пока ничего больше не требуется. По этой причине мы не станем проводить его доказательство. Оно обычно излагается на алгебраическом языке в курсе высшей алгебры, а на аналитическом языке — в курсе теории функций комплексного переменного.

Рассмотрим специально подобранный пример, на котором можно проиллюстрировать изложенное.

Пример 17. Пусть

$$P(x) = 2x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 3x + 2,$$
$$Q(x) = x^7 + 3x^6 + 5x^5 + 7x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 3x + 1;$$

требуется найти разложение (37) дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Прежде всего, задача осложнена тем, что мы не знаем разложения многочлена $Q(x)$. Попробуем упростить ситуацию, избавившись от кратности корней $Q(x)$, если таковая имеет место. Находим

$$Q'(x) = 7x^6 + 18x^5 + 25x^4 + 28x^3 + 21x^2 + 10x + 3.$$

Довольно утомительным, но выполнимым счетом по алгоритму Евклида находим наибольший общий делитель

$$d(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

многочленов $Q(x)$ и $Q'(x)$. Мы выписали наибольший общий делитель с единичным коэффициентом при старшей степени x.

Разделив $Q(x)$ на $d(x)$, получаем многочлен

$$q(x) = x^3 + x^2 + x + 1,$$

имеющий те же корни, что и многочлен $Q(x)$, но единичной кратности. Корень -1 многочлена $q(x)$ легко угадывается. После деления $q(x)$ на $x + 1$ получаем $x^2 + 1$. Таким образом,

$$q(x) = (x + 1)(x^2 + 1),$$

после чего последовательным делением $d(x)$ на $x^2 + 1$ и $x + 1$ находим разложение $d(x)$:

$$d(x) = (x + 1)^2(x^2 + 1),$$

а вслед за этим и разложение

$$Q(x) = (x + 1)^3(x^2 + 1)^2.$$

Таким образом, в силу следствия 4b) ищем разложение дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_{11}}{x+1} + \frac{a_{12}}{(x+1)^2} + \frac{a_{13}}{(x+1)^3} + \frac{b_{11}x + c_{11}}{x^2+1} + \frac{b_{12}x + c_{12}}{(x^2+1)^2}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнивая коэффициенты полученного в числителе многочлена и соответствующие коэффициенты многочлена $P(x)$, приходим к системе семи уравнений с семью неизвестными, решая которую, окончательно получаем

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{x-1}{x^2+1} + \frac{x+1}{(x^2+1)^2}.$$

Задачи и упражнения

1. Используя геометрическую интерпретацию комплексного числа

a) поясните неравенства $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$ и $|z_1+\ldots+z_n| \leqslant |z_1|+\ldots+|z_n|$;

b) укажите геометрическое место точек на плоскости $\mathbb{C}$, удовлетворяющих соотношению $|z-1|+|z+1| \leqslant 3$;

c) изобразите все корни степени n из 1 и найдите их сумму;

d) поясните действие преобразования плоскости $\mathbb{C}$, задаваемого формулой $z \mapsto \bar{z}$.

2. Найдите суммы:

a) $1+q+\ldots+q^n$;

b) $1+q+\ldots+q^n+\ldots$ при $|q|<1$;

c) $1+e^{i\varphi}+\ldots+e^{in\varphi}$;

d) $1+re^{i\varphi}+\ldots+r^ne^{in\varphi}$;

e) $1+re^{i\varphi}+\ldots+r^ne^{in\varphi}+\ldots$ при $|r|<1$;

f) $1+r\cos\varphi+\ldots+r^n\cos n\varphi$;

g) $1+r\cos\varphi+\ldots+r^n\cos n\varphi+\ldots$ при $|r|<1$;

h) $1+r\sin\varphi+\ldots+r^n\sin n\varphi$;

i) $1+r\sin\varphi+\ldots+r^n\sin n\varphi+\ldots$ при $|r|<1$.

3. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ и убедитесь, что это число есть e^z.

4. a) Покажите, что уравнение $e^w = z$ относительно w имеет решение $w = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$. Естественно считать w *натуральным логарифмом* числа z. Таким образом, $w = \operatorname{Ln} z$ не есть функциональное соотношение, поскольку $\operatorname{Arg} z$ многозначен.

b) Найдите $\operatorname{Ln} 1$ и $\operatorname{Ln} i$.

c) Положим $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$. Найдите 1^π и i^i.

d) Используя представление $w = \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$, получите выражение для $z = \arcsin z$.

e) Есть ли в $\mathbb{C}$ точки, где $|\sin z| = 2$?

5. a) Исследуйте, во всех ли точках плоскости $\mathbb{C}$ функция $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ непрерывна.

b) Разложите функцию $\frac{1}{1+z^2}$ в степенной ряд при $z_0 = 0$ и найдите его радиус сходимости.

c) Решите задачи a) и b) для функции $\frac{1}{1+\lambda^2 z^2}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ — параметр. Не возникает ли у вас гипотезы относительно того, взаимным расположением каких точек на плоскости $\mathbb{C}$ определяется радиус сходимости? Можно ли было понять это, оставаясь на вещественной оси, т. е. раскладывая функцию $\frac{1}{1+\lambda^2 z^2}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$?

6. a) Исследуйте, является ли непрерывной функция Коши

$$f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^2}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

в точке $z = 0$.

b) Будет ли непрерывно ограничение $f|_{\mathbb{R}}$ функции f из задачи a) на вещественную ось?

c) Существует ли ряд Тейлора функции f из a) в точке $z_0 = 0$?

d) Бывают ли аналитические в $z_0 \in \mathbb{C}$ функции, ряд Тейлора которых сходится только в точке z_0?

e) Придумайте степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, который сходится только в точке z_0.

7. a) Выполнив в степенном ряде $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(z - a)^n$ формально подстановку $z-a = (z-z_0)+(z_0-a)$ и приведя подобные члены, получите ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ и выражения его коэффициентов через величины A_k, $(z_0 - a)^k$, $k = 0, 1, \ldots$

b) Проверьте, что если исходный ряд сходится в круге $|z - a| < R$, а $|z_0 - a| = r < R$, то ряды, определяющие C_n, $n = 0, 1, \ldots$, сходятся абсолютно и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$ сходится при $|z - z_0| < R - r$.

c) Покажите, что если $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(z-a)^n$ в круге $|z-a| < R$, а $|z_0 - a| < R$, то в круге $|z - z_0| < R - |z_0 - a|$ функция f допускает представление $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$.

8. Проверьте, что

a) когда точка $z \in \mathbb{C}$ пробегает окружность $|z| = r > 1$, точка $w = z + z^{-1}$ пробегает эллипс с центром 0 и фокусами в точках ± 2;

b) при возведении комплексных чисел в квадрат, точнее, при отображении $w \mapsto w^2$ такой эллипс переходит в дважды пробегаемый эллипс с фокусом в нуле;

c) при возведении комплексных чисел в квадрат любой эллипс с центром в нуле переходит в эллипс с фокусом в нуле.

§ 6. Некоторые примеры использования дифференциального исчисления в задачах естествознания

В этом параграфе мы разберем несколько довольно далеких друг от друга по постановке задач естествознания, которые, однако, как выяснится, имеют довольно близкие математические модели. Модель эта — не что иное, как простейшее дифференциальное уравнение для интересующей нас в задаче функции. С разбора одного такого примера — задачи двух тел — мы, кстати, вообще начинали построение дифференциального исчисления. Исследование той системы уравнений, которую мы при этом получили, пока нам недоступно. Здесь же будут рассмотрены вопросы, которые можно до конца решить уже на нашем нынешнем уровне. Кроме удовольствия увидеть математический аппарат в конкретной работе, из ряда примеров этого параграфа мы, в частности, извлечем также дополнительную убежденность как в естественности возникновения показательной функции $\exp x$, так и в пользе ее распространения в комплексную область.

1. Движение тела переменной массы. Рассмотрим ракету, перемещающуюся прямолинейно в открытом космосе далеко от притягивающих масс (рис. 45).

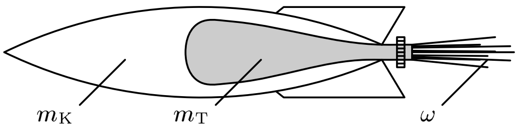


Рис. 45.

Пусть $M(t)$ — масса ракеты (с топливом) в момент t; $V(t)$ — ее скорость в момент t; ω — скорость (относительно ракеты) истечения топлива из сопла ракеты при его сгорании.

Мы хотим установить взаимосвязь между этими величинами.

В силу сделанных предположений, ракету с топливом можно рассматривать как замкнутую систему, импульс (или количество движения) которой поэтому остается постоянным во времени.

В момент t импульс системы равен $M(t)V(t)$.

В момент $t+h$ импульс ракеты с оставшимся в ней топливом равен $M(t+h)V(t+h)$, а импульс ΔI выброшенной за это время массы $|\Delta M| =$

$= |M(t+h) - M(t)| = -(M(t+h) - M(t))$ топлива заключен в пределах

$$(V(t) - \omega)|\Delta M| < \Delta I < (V(t+h) - \omega)|\Delta M|,$$

т. е. $\Delta I = (V(t) - \omega)|\Delta M| + \alpha(h)|\Delta M|$, причем из непрерывности $V(t)$ следует, что $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Приравнивая импульсы системы в моменты t и $t + h$, имеем

$$M(t)V(t) = M(t+h)V(t+h) + (V(t) - \omega)|\Delta M| + \alpha(h)|\Delta M|,$$

или, после подстановки $|\Delta M| = -(M(t+h) - M(t))$ и упрощений,

$$M(t+h)(V(t+h) - V(t)) =$$
$$= -\omega(M(t+h) - M(t)) + \alpha(h)(M(t+h) - M(t)).$$

Деля последнее равенство на h и переходя к пределу при $h \to 0$, получаем

$$M(t)V'(t) = -\omega M'(t). \tag{1}$$

Это и есть искомое соотношение между интересующими нас функциями $V(t)$, $M(t)$ и их производными.

Теперь надо найти связь между самими функциями $V(t)$, $M(t)$, исходя из соотношения между их производными. Вообще говоря, такого рода задачи много труднее задач нахождения соотношений между производными при известных соотношениях между функциями. Однако в нашем случае вопрос решается вполне элементарно.

Действительно, после деления на $M(t)$ равенство (1) можно переписать в виде

$$V'(t) = (-\omega \ln M)'(t). \tag{2}$$

Но если производные двух функций совпадают на некотором промежутке, то на этом промежутке сами функции отличаются разве что на некоторую постоянную.

Итак, из (2) следует, что

$$V(t) = -\omega \ln M(t) + c. \tag{3}$$

Если известно, например, что $V(0) = V_0$, то это начальное условие вполне определит константу c. Действительно, из (3) находим

$$c = V_0 + \omega \ln M(0),$$

а затем находим искомую формулу[1)]

$$V(t) = V_0 + \omega \ln \frac{M(0)}{M(t)}. \tag{4}$$

Полезно заметить, что если $m_{\text{К}}$ — масса корпуса ракеты, $m_{\text{Т}}$ — масса топлива, а V — конечная скорость, которую приобретает ракета после полной отработки топлива, то, подставляя в (4) $M(0) = m_{\text{К}} + m_{\text{Т}}$ и $M(t) = m_{\text{К}}$, находим

$$V = V_0 + \omega \ln \left(1 + \frac{m_{\text{Т}}}{m_{\text{К}}}\right).$$

Последняя формула особенно ясно показывает, что на конечной скорости сказывается не столько отношение $m_{\text{Т}}/m_{\text{К}}$, стоящее под знаком логарифма, сколько скорость истечения ω, связанная с видом топлива. Из этой формулы, в частности, следует, что если $V_0 = 0$, то, чтобы придать скорость V ракете, собственная масса которой $m_{\text{К}}$, необходимо иметь следующий начальный запас топлива:

$$m_{\text{Т}} = m_{\text{К}} \left(e^{V/\omega} - 1\right).$$

2. Барометрическая формула. Так называется формула, указывающая зависимость атмосферного давления от высоты над уровнем моря.

Пусть $p(h)$ — давление на высоте h. Поскольку $p(h)$ есть вес столба воздуха над площадкой в $1\,\text{см}^2$, расположенной на высоте h, то $p(h+\Delta)$ отличается от $p(h)$ весом порции газа, попавшей в параллелепипед с основаниями в виде исходной площадки в $1\,\text{см}^2$, расположенной на высоте h, и такой же площадки на высоте $h + \Delta$. Пусть $\rho(h)$ — плотность воздуха на высоте h. Поскольку $\rho(h)$ непрерывно зависит от h, то можно считать, что масса указанной порции воздуха может быть вычислена по формуле

$$\rho(\xi)\,\text{г/см}^3 \cdot 1\,\text{см}^2 \cdot \Delta\,\text{см} = \rho(\xi)\Delta\,\text{г},$$

[1)]Эта формула иногда связывается с именем К. Э. Циолковского (1857 – 1935) — русского ученого, основоположника теории космических полетов. Но, по-видимому, впервые она была получена русским механиком И. В. Мещерским (1859 – 1935) в его труде 1897 г., посвященном динамике точки переменной массы.

где ξ — некоторый уровень высоты в промежутке от h до $h+\Delta$. Значит, вес этой массы[1] есть $g \cdot \rho(\xi)\Delta$.

Таким образом,

$$p(h+\Delta) - p(h) = -g\rho(\xi)\Delta.$$

Поделив это равенство на Δ и перейдя к пределу при $\Delta \to 0$ с учетом того, что тогда и $\xi \to h$, получаем

$$p'(h) = -g\rho(h). \tag{5}$$

Таким образом, скорость изменения давления естественно оказалась пропорциональной плотности воздуха на соответствующей высоте.

Чтобы получить уравнение для функции $p(h)$, исключим из (5) функцию $\rho(h)$. В силу закона Клапейрона[1] давление p, молярный объем V и температура (по шкале Кельвина[2]) T газа связаны соотношением

$$\frac{pV}{T} = R, \tag{6}$$

где R — так называемая универсальная газовая постоянная. Если M — масса одного моля воздуха, а V — его объем, то $\rho = \frac{M}{V}$, поэтому из (6) находим

$$p = \frac{1}{V} \cdot R \cdot T = \frac{M}{V} \cdot \frac{R}{M} \cdot T = \rho \cdot \frac{R}{M} T.$$

Полагая $\lambda = \frac{R}{M}T$, таким образом, имеем

$$p = \lambda(T)\rho. \tag{7}$$

Если теперь принять, что температура описываемых нами слоев воздуха постоянна, то из (5) и (7) окончательно находим

$$p'(h) = -\frac{g}{\lambda} p(h). \tag{8}$$

Это дифференциальное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{p'(h)}{p(h)} = -\frac{g}{\lambda}$$

[1] В пределах наличия заметной атмосферы величину g можно считать постоянной.

[1] Б. П. Э. Клапейрон (1799 – 1864) — французский физик, занимавшийся термодинамикой.

[2] У. Томсон (лорд Кельвин) (1824 – 1907) — известный английский физик.

или
$$(\ln p)'(h) = \left(-\frac{g}{\lambda}h\right)',$$
откуда
$$\ln p(h) = -\frac{g}{\lambda}h + c,$$
или
$$p(h) = e^c \cdot e^{-(g/\lambda)h}.$$

Множитель e^c определяется из известного начального условия $p(0) = p_0$, в силу которого $e^c = p_0$.

Итак, мы нашли следующую зависимость давления от высоты:
$$p = p_0 e^{-(g/\lambda)h}. \tag{9}$$

Для воздуха при комнатной температуре (порядка $300\,\mathrm{K} = 27\,^\circ\mathrm{C}$) известно значение $\lambda \approx 7{,}7 \cdot 10^8$ (см/с)^2. Известно также, что $g \approx 10^3$ см/с^2. Таким образом, формула (9) приобретает вполне законченный вид после подстановки этих числовых значений g и λ. В частности, из (9) видно, что давление упадет в e (≈ 3) раз на высоте $h = \frac{\lambda}{g} = 7{,}7 \cdot 10^5$ см $= 7{,}7$ км. Оно возрастет во столько же раз, если опуститься в шахту на глубину порядка 7,7 км.

3. Радиоактивный распад, цепная реакция и атомный котел. Известно, что ядра тяжелых элементов подвержены самопроизвольному (спонтанному) распаду. Это так называемая *естественная радиоактивность*.

Основной статистический закон радиоактивности (справедливый, следовательно, для не слишком малых количеств и концентраций вещества) состоит в том, что количество распадов за малый промежуток времени h, прошедший от момента t, пропорционально h и количеству $N(t)$ не распавшихся к моменту t атомов вещества, т. е.
$$N(t+h) - N(t) \approx -\lambda N(t) h,$$
где $\lambda > 0$ — числовой коэффициент, характерный для данного химического элемента.

Таким образом, функция $N(t)$ удовлетворяет уже знакомому дифференциальному уравнению
$$N'(t) = -\lambda N(t), \tag{10}$$

из которого следует, что

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

где $N_0 = N(0)$ — начальное количество атомов вещества.

Время T, за которое происходит распад половины из начального количества атомов, называют *периодом полураспада.* Величина T находится, таким образом, из уравнения $e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$, т. е. $T = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0{,}69}{\lambda}$.

Например, для полония Po^{210} $T \approx 138$ суток, для радия Ra^{226} $T \approx \approx 1600$ лет, для урана U^{235} $T \approx 7{,}1 \cdot 10^8$ лет, а для его изотопа U^{238} $T \approx 4{,}5 \cdot 10^9$ лет.

Ядерная реакция — это взаимодействие ядер или взаимодействие ядра с элементарными частицами, в результате которого появляются ядра нового типа. Это может быть ядерный синтез, когда слияние ядер более легких элементов приводит к образованию ядер более тяжелого элемента (например, два ядра тяжелого водорода дают, с потерей массы и выделением энергии, ядро гелия); это может быть распад ядра и образование ядра (ядер) более легких элементов. В частности, такой распад происходит примерно в половине случаев столкновения нейтрона с ядром урана U^{235}. При делении ядра урана образуется 2–3 новых нейтрона, которые могут участвовать в дальнейшем взаимодействии с ядрами, вызывая их деление и тем самым размножение нейтронов. Ядерная реакция такого типа называется *цепной реакцией.*

Опишем принципиальную математическую модель цепной реакции в некотором радиоактивном веществе и получим закон изменения количества $N(t)$ нейтронов в зависимости от времени.

Возьмем вещество в виде шара радиуса r. Если r не слишком мало, то за малый промежуток времени h, отсчитываемый от момента t, с одной стороны, произойдет рождение новых нейтронов в количестве, пропорциональном h и $N(t)$, а с другой — потеря части нейтронов за счет их выхода за пределы шара.

Если v — скорость нейтрона, то за время h покинуть шар могут только те из них, которые удалены от границы не более чем на расстояние vh, да и то если их скорость направлена примерно по радиусу. Считая, что такие нейтроны составляют неизменную долю от попавших в рассматриваемую зону и что нейтроны в шаре распределены примерно равномерно, можно сказать, что количество теряемых за время h нейтронов пропорционально $N(t)$ и отношению объема указанной приграничной области к объему шара.

Сказанное приводит к равенству

$$N(t+h) - N(t) \approx \alpha N(t)h - \frac{\beta}{r}N(t)h \tag{11}$$

(ибо объем рассматриваемой зоны равен примерно $4\pi r^2 vh$, а объем шара $\frac{4}{3}\pi r^3$). Коэффициенты α и β зависят только от рассматриваемого радиоактивного вещества.

Из соотношения (11) после деления на h и перехода к пределу при $h \to 0$ получаем

$$N'(t) = \left(\alpha - \frac{\beta}{r}\right) N(t), \tag{12}$$

откуда

$$N(t) = N_0 \exp\left\{\left(\alpha - \frac{\beta}{r}\right) t\right\}.$$

Из полученной формулы видно, что при $\left(\alpha - \frac{\beta}{r}\right) > 0$ количество нейтронов будет экспоненциально во времени расти. Характер этого роста, независимо от начального условия N_0, таков, что за очень короткое время происходит практически полный распад вещества с выделением колоссальной энергии — это и есть *взрыв*.

Если $\left(\alpha - \frac{\beta}{r}\right) < 0$, то очень скоро реакция прекращается ввиду того, что теряется больше нейтронов, чем рождается.

Если же выполнено пограничное между рассмотренными случаями условие $\alpha - \frac{\beta}{r} = 0$, то устанавливается равновесие между рождением нейтронов и их выходом из реакции, в результате чего их количество остается примерно постоянным.

Величина r, при которой $\alpha - \frac{\beta}{r} = 0$, называется *критическим радиусом*, а масса вещества в шаре такого объема называется *критической массой* вещества.

Для урана U^{235} критический радиус равен примерно 8,5 см, а критическая масса около 50 кг.

В котлах, где подогрев пара происходит за счет цепной реакции в радиоактивном веществе, имеется искусственный источник нейтронов, который доставляет в делящуюся массу определенное количество n нейтронов в единицу времени. Таким образом, для атомного реактора уравнение (12) немного видоизменяется:

$$N'(t) = \left(\alpha - \frac{\beta}{r}\right) N(t) + n. \tag{13}$$

Это уравнение решается тем же приемом, что и уравнение (12), ибо $\frac{N'(t)}{(\alpha-\beta/r)N(t)+n}$ есть производная функции $\frac{1}{\alpha-\beta/r}\ln\Big[\Big(\alpha-\frac{\beta}{r}\Big)N(t)+n\Big]$, если $\alpha-\frac{\beta}{r}\ne 0$. Следовательно, решение уравнения (13) имеет вид

$$N(t)=\begin{cases} N_0e^{(\alpha-\beta/r)t}-\dfrac{n}{\alpha-\beta/r}\Big[1-e^{(\alpha-\beta/r)t}\Big] & \text{при}\ \ \alpha-\dfrac{\beta}{r}\ne 0,\\ N_0+nt & \text{при}\ \ \alpha-\dfrac{\beta}{r}=0. \end{cases}$$

Из этого решения видно, что если $\alpha-\frac{\beta}{r}>0$ (сверхкритическая масса), то произойдет взрыв. Если же масса докритическая, т. е. $\alpha-\frac{\beta}{r}<0$, то очень скоро будем иметь

$$N(t)\approx\frac{n}{\dfrac{\beta}{r}-\alpha}.$$

Таким образом, если поддерживать массу радиоактивного вещества в докритическом состоянии, но близком к критическому, то независимо от мощности дополнительного источника нейтронов, т. е. независимо от величины n, можно получить большие значения $N(t)$, а значит, и большую мощность реактора. Удерживание процесса в прикритической зоне — дело деликатное и осуществляется довольно сложной системой автоматического регулирования.

4. Падение тел в атмосфере. Сейчас нас будет интересовать скорость $v(t)$ тела, падающего на Землю под действием силы тяжести.

Если бы не было сопротивления воздуха, то при падении с относительно небольших высот имело бы место соотношение

$$\dot v(t)=g, \tag{14}$$

вытекающее из второго закона Ньютона $ma=F$ и закона всемирного тяготения, в силу которого при $h\ll R$ (R — радиус Земли)

$$F(t)=G\frac{Mm}{(R+h(t))^2}\approx G\frac{Mm}{R^2}=gm.$$

Движущееся в атмосфере тело испытывает сопротивление, зависящее от скорости движения, в результате чего скорость свободного падения тяжелого тела в атмосфере не растет неограниченно, а устанавливается на некотором уровне. Например, при затяжном прыжке скорость парашютиста в нижних слоях атмосферы устанавливается в пределах 50–60 м/с.

Для диапазона скоростей от 0 до 80 м/с будем считать силу сопротивления пропорциональной скорости тела. Коэффициент пропорциональности, разумеется, зависит от формы тела, которую в одних случаях стремятся сделать хорошо обтекаемой (бомба), а в других случаях (парашют) имеют прямо противоположную цель. Приравнивая действующие на тело силы, приходим к следующему уравнению, которому должна удовлетворять скорость тела, падающего в атмосфере:

$$m\dot{v}(t) = mg - \alpha v. \tag{15}$$

Разделив это уравнение на m и обозначив $\frac{\alpha}{m}$ через β, окончательно получаем

$$\dot{v}(t) = -\beta v + g. \tag{13'}$$

Мы пришли к уравнению, которое только обозначениями отличается от уравнения (13). Заметим, что если положить $-\beta v(t) + g = f(t)$, то, поскольку $f'(t) = -\beta v'(t)$, из (13′) можно получить равносильное уравнение

$$f'(t) = -\beta f(t),$$

которое с точностью до обозначений совпадает с уравнением (8) или уравнением (10). Таким образом, мы вновь пришли к уравнению, решением которого является экспоненциальная функция

$$f(t) = f(0)e^{-\beta t}.$$

Отсюда следует, что решение уравнения (13′) имеет вид

$$v(t) = \frac{1}{\beta}g + \left(v_0 - \frac{1}{\beta}\right)e^{-\beta t},$$

а решение основного уравнения (15) имеет вид

$$v(t) = \frac{m}{\alpha}g + \left(v_0 - \frac{m}{\alpha}g\right)e^{-(\alpha/m)t}, \tag{16}$$

где $v_0 = v(0)$ — начальная вертикальная скорость тела.

Из (16) видно, что при $\alpha > 0$ падающее в атмосфере тело выходит на стационарный режим движения, причем $v(t) \approx \frac{m}{\alpha}g$. Таким образом, в отличие от падения в безвоздушном пространстве, скорость падения в атмосфере зависит не только от формы тела, но и от его массы. При $\alpha \to 0$ правая часть равенства (16) стремится к $v_0 + gt$, т. е. к решению уравнения (14), получающегося из (15) при $\alpha = 0$.

Используя формулу (16), можно составить представление о том, как быстро происходит выход на предельную скорость падения в атмосфере.

Например, если парашют рассчитан на то, что человек средней комплекции приземляется при раскрытом парашюте со скоростью порядка 10 м/с, то, раскрыв парашют после затяжного свободного падения, когда скорость падения составляет примерно 50 м/с, он уже через 3 секунды будет иметь скорость около 12 м/с.

Действительно, из приведенных данных и соотношения (16) находим $\frac{m}{\alpha}g \approx 10$, $\frac{m}{\alpha} \approx 1$, $v_0 = 50$ м/с, поэтому соотношение (16) приобретает вид

$$v(t) = 10 + 40e^{-t}.$$

Поскольку $e^3 \approx 20$, то при $t = 3$ получим $v \approx 12$ м/с.

5. Еще раз о числе e и функции $\exp x$. На примерах мы убедились (см. также задачи 3, 4 в конце параграфа), что целый ряд явлений природы описывается с математической точки зрения одним и тем же дифференциальным уравнением

$$f'(x) = \alpha f(x), \tag{17}$$

решение которого $f(x)$ однозначно определяется, если указано «начальное условие» $f(0)$. Тогда

$$f(x) = f(0)e^{\alpha x}.$$

Число e и функцию $e^x = \exp x$ мы в свое время ввели довольно формально, сославшись на то, что это действительно важное число и действительно важная функция. Теперь нам ясно, что даже если бы мы не вводили раньше эту функцию, то ее, несомненно, пришлось бы ввести как решение важного, хотя и очень простого уравнения (17). Точнее, достаточно было бы ввести функцию, являющуюся решением уравнения (17) при некотором конкретном значении α, например при $\alpha = 1$, ибо общее уравнение (17) приводится к этому случаю после перехода к новой переменной t, связанной с x соотношением $x = \frac{t}{\alpha}$ $(\alpha \neq 0)$.

Действительно, тогда

$$f(x) = f\left(\frac{t}{\alpha}\right) = F(t), \qquad \frac{df(x)}{dx} = \frac{\frac{dF(t)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \alpha F'(t)$$

и вместо уравнения $f'(x) = \alpha f(x)$ имеем теперь $\alpha F'(t) = \alpha F(t)$, или $F'(t) = F(t)$.

Итак, рассмотрим уравнение

$$f'(x) = f(x) \tag{18}$$

и обозначим через $\exp x$ то его решение, для которого $f(0) = 1$.

Прикинем, согласуется ли это определение с прежним определением функции $\exp x$.

Попробуем вычислить значение $f(x)$, исходя из того, что $f(0) = 1$ и f удовлетворяет уравнению (18). Поскольку f — дифференцируемая функция, то f непрерывна, но тогда в силу (18) непрерывна и функция $f'(x)$. Более того, из (18) следует, что f имеет также вторую производную $f''(x) = f'(x)$, и вообще из (18) следует, что f — бесконечно дифференцируемая функция. Так как скорость $f'(x)$ изменения функции $f(x)$ непрерывна, то на малом промежутке h изменения аргумента функция f' меняется мало, поэтому $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(\xi)h \approx f(x_0) + f'(x_0)h$. Воспользуемся этой приближенной формулой и пройдем отрезок от 0 до x с малым шагом $h = \frac{x}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$. Если $x_0 = 0$, $x_{k+1} = x_k + h$, то мы будем иметь

$$f(x_{k+1}) \approx f(x_k) + f'(x_k)h.$$

Учитывая (18) и условие $f(0) = 1$, имеем

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_n) &\approx f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})h = \\ &= f(x_{n-1})(1+h) \approx (f(x_{n-2}) + f'(x_{n-2})h)(1+h) = \\ &= f(x_{n-2})(1+h)^2 \approx \ldots \approx f(x_0)(1+h)^n = \\ &= f(0)(1+h)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Представляется естественным (и это можно доказать), что чем мельче шаг $h = \frac{x}{n}$, тем точнее приближенная формула $f(x) \approx \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Таким образом, мы приходим к тому, что

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

В частности, если величину $f(1) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ обозначить через e и показать, что $e \neq 1$, то получаем, что

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{t\to 0} (1+t)^{x/t} = \lim_{t\to 0} \left[(1+t)^{1/t}\right]^x = e^x, \qquad (19)$$

ибо мы знаем, что $u^\alpha \to v^\alpha$, если $u \to v$.

Метод численного решения дифференциального уравнения (18), позволивший нам получить формулу (19), был предложен еще Эйлером и называется *методом ломаных Эйлера.* Такое название связано с тем, что проведенные выкладки геометрически означают замену решения $f(x)$, точнее, его графика, некоторой аппроксимирующей график ломаной, звенья которой на соответствующих участках $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, \ldots, n-$ $-1)$ задаются уравнениями $y =$ $= f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$ (рис. 46).

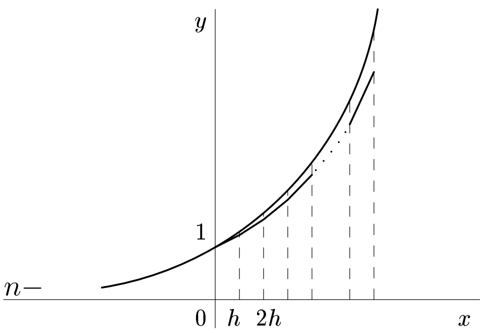


Рис. 46.

Нам встречалось также определение функции $\exp x$ как суммы степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$. К нему тоже можно прийти из уравнения (18), если воспользоваться следующим часто применяемым приемом, называемым *методом неопределенных коэффициентов.* Будем искать решение уравнения (18) в виде суммы степенного ряда

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots, \tag{20}$$

коэффициенты которого подлежат определению.

Как мы видели (см. § 5, теорема 1), из (20) следует, что $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Но в силу (18) $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = \ldots$ и, поскольку $f(0) = 1$, имеем $c_n = \frac{1}{n!}$, т. е. если решение имеет вид (20) и $f(0) = 1$, то обязательно

$$f(x) = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \ldots + \frac{1}{n!} x^n + \ldots$$

Можно было бы независимо проверить, что функция, определяемая этим рядом, действительно дифференцируема (и не только при $x = 0$) и что она удовлетворяет уравнению (18) и начальному условию $f(0) = 1$. Однако мы не будем на этом останавливаться, ибо наша цель состояла только в том, чтобы понять, согласуется ли введение экспоненциальной функции как решения уравнения (18) при начальном условии $f(0) = 1$ с тем, что мы раньше подразумевали под функцией $\exp x$.

Заметим, что уравнение (18) можно было бы рассматривать в комплексной области, т. е. считать x произвольным комплексным числом. При этом все проведенные рассуждения останутся в силе, быть может, только частично потеряется геометрическая наглядность метода Эйлера.

Таким образом, естественно ожидать, что функция

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \ldots + \frac{1}{n!}z^n + \ldots$$

является и притом единственным решением уравнения

$$f'(z) = f(z),$$

удовлетворяющим условию $f(0) = 1$.

6. Колебания. Если тело, подвешенное на пружине, отклонить от положения равновесия, например, приподняв, а затем отпустив его, то оно будет совершать колебания около положения равновесия. Опишем этот процесс в общем виде.

Пусть известно, что на материальную точку массы m, способную перемещаться вдоль числовой оси Ox, действует сила $F = -kx$, пропорциональная[1)] отклонению точки от начала координат. Пусть нам известны также начальное положение $x_0 = x(0)$ нашей точки и ее начальная скорость $v_0 = \dot{x}(0)$. Требуется найти зависимость $x = x(t)$ положения точки от времени.

В силу закона Ньютона, эту задачу можно переписать в следующем чисто математическом виде: решить уравнение

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) \tag{21}$$

при начальных условиях $x_0 = x(0),\ \dot{x}(0) = v_0$.

Перепишем уравнение (21) в виде

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0 \tag{22}$$

и попробуем вновь воспользоваться экспонентой, а именно попробуем подобрать число λ так, чтобы функция $x(t) = e^{\lambda t}$ удовлетворяла уравнению (22).

Подставляя $x(t) = e^{\lambda t}$ в (22), получаем

$$\left(\lambda^2 + \frac{k}{m}\right)e^{\lambda t} = 0,$$

[1)] В случае пружины коэффициент $k > 0$, характеризующий ее жесткость, называют *коэффициентом жесткости* пружины.

или

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0, \tag{23}$$

т. е. $\lambda_1 = -\sqrt{-\frac{k}{m}}$, $\lambda_2 = \sqrt{-\frac{k}{m}}$. Поскольку $m > 0$, то при $k > 0$ мы имеем два чисто мнимых числа: $\lambda_1 = -i\sqrt{\frac{k}{m}}$ и $\lambda_2 = i\sqrt{\frac{k}{m}}$. На это мы не рассчитывали, но тем не менее продолжим рассмотрение. По формуле Эйлера

$$e^{-i\sqrt{k/m}\,t} = \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t - i\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t,$$
$$e^{i\sqrt{k/m}\,t} = \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + i\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t.$$

Поскольку при дифференцировании по действительному времени t происходит отдельно дифференцирование действительной и мнимой частей функции $e^{\lambda t}$, то уравнению (22) должны удовлетворять порознь и функция $\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$, и функция $\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$. И это действительно так, в чем легко убедиться прямой проверкой. Итак, комплексная экспонента помогла нам угадать два решения уравнения (22), линейная комбинация которых

$$x(t) = c_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + c_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t, \tag{24}$$

очевидно, также является решением уравнения (22).

Коэффициенты c_1, c_2 в (24) подберем из условий

$$x_0 = x(0) = c_1,$$
$$v_0 = \dot{x}(0) = \left(-c_1\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + c_2\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\Big|_{t=0} = c_2\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Таким образом, функция

$$x(t) = x_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \tag{25}$$

является искомым решением.

Делая стандартные преобразования, (25) можно переписать в виде

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + v_0^2\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \alpha\right), \tag{26}$$

где
$$\alpha = \arcsin \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + v_0^2 \frac{m}{k}}}.$$

Таким образом, при $k > 0$ точка будет совершать периодические колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, т. е. с частотой $\frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$, и амплитудой $\sqrt{x_0^2 + v_0^2 \frac{m}{k}}$. Мы утверждаем это потому, что из физических соображений ясно, что решение (25) поставленной задачи единственно. (См. задачу 5 в конце параграфа.)

Движение, описываемое функцией (26), называют *простыми гармоническими колебаниями*, а уравнение (22) — *уравнением гармонических колебаний*.

Вернемся теперь к случаю, когда в уравнении (23) $k < 0$. Тогда две функции $e^{\lambda_1 t} = \exp\left(-\sqrt{-\frac{k}{m}}\, t\right)$, $e^{\lambda_2 t} = \exp\left(\sqrt{-\frac{k}{m}}\, t\right)$ будут вещественными решениями уравнения (22) и функция
$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \tag{27}$$
также будет решением. Постоянные c_1 и c_2 подберем из условий
$$\begin{cases} x_0 = x(0) = c_1 + c_2, \\ v_0 = \dot{x}(0) = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2. \end{cases}$$

Полученная система всегда однозначно разрешима, ибо ее определитель $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$.

Поскольку числа λ_1 и λ_2 противоположного знака, то из (27) видно, что при $k < 0$ сила $F = -kx$ не только не стремится вернуть точку в положение равновесия $x = 0$, но со временем неограниченно уводит ее от этого положения, если x_0 или v_0 отлично от нуля. То есть в этом случае $x = 0$ — точка неустойчивого равновесия.

В заключение рассмотрим одну вполне естественную модификацию уравнения (21), на которой еще ярче видна польза показательной функции и формулы Эйлера, связывающей основные элементарные функции.

Предположим, что рассматриваемая нами частица движется в среде (воздухе или жидкости), сопротивлением которой пренебречь нельзя. Пусть сила сопротивления среды пропорциональна скорости точки. Тогда вместо уравнения (21) мы должны написать уравнение
$$m\ddot{x}(t) = -\alpha\dot{x}(t) - kx(t),$$

которое перепишем в виде

$$\ddot{x}(t) + \frac{\alpha}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \tag{28}$$

Если вновь искать решение в виде $x(t) = e^{\lambda t}$, то мы придем к квадратному уравнению

$$\lambda^2 + \frac{\alpha}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0,$$

корни которого $\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2m} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4mk}}{2m}$.

Случай, когда $\alpha^2 - 4mk > 0$, приводит к двум вещественным корням λ_1, λ_2, и решение может быть найдено в виде (27).

Мы рассмотрим подробнее более интересный для нас случай, когда $\alpha^2 - 4mk < 0$. Тогда оба корня λ_1, λ_2 комплексные (но не чисто мнимые!):

$$\lambda_1 = -\frac{\alpha}{2m} - i\frac{\sqrt{4mk - \alpha^2}}{2m},$$
$$\lambda_2 = -\frac{\alpha}{2m} + i\frac{\sqrt{4mk - \alpha^2}}{2m}.$$

Формула Эйлера в этом случае дает

$$e^{\lambda_1 t} \quad = \exp\left(-\frac{\alpha}{2m}t\right)(\cos\omega t - i\sin\omega t),$$
$$e^{\lambda_2 t} \quad = \exp\left(-\frac{\alpha}{2m}t\right)(\cos\omega t + i\sin\omega t),$$

где $\omega = \frac{\sqrt{4mk - \alpha^2}}{2m}$. Таким образом, мы находим два вещественных решения $\exp\left(-\frac{\alpha}{2m}t\right)\cos\omega t$, $\exp\left(-\frac{\alpha}{2m}t\right)\sin\omega t$ уравнения (28), угадать которые было бы уже довольно трудно. Затем ищем решение исходной задачи в виде их линейной комбинации

$$x(t) = \exp\left(-\frac{\alpha}{2m}t\right)(c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t), \tag{29}$$

подбирая c_1 и c_2 так, чтобы удовлетворить начальным условиям $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$.

Получающаяся при этом система уравнений, как можно проверить, всегда однозначно разрешима. Таким образом, после преобразований из (29) получаем решение задачи в виде

$$x(t) = A\exp\left(-\frac{\alpha}{2m}t\right)\sin(\omega t + a), \tag{30}$$

где A и a — константы, определяемые начальными условиями.

Из этой формулы видно, что благодаря множителю $\exp\left(-\frac{\alpha}{2m}t\right)$, где $\alpha > 0$, $m > 0$, в рассматриваемом случае колебания будут *затухающими*, причем скорость затухания амплитуды зависит от отношения $\frac{\alpha}{m}$. Частота колебаний $\frac{1}{2\pi}\omega = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2}$ меняться во времени не будет. Величина ω тоже зависит только от отношений $\frac{k}{m}$, $\frac{\alpha}{m}$, что, впрочем, можно было предвидеть на основании записи (28) исходного уравнения. При $\alpha = 0$ мы вновь возвращаемся к незатухающим гармоническим колебаниям (26) и уравнению (22).

Задачи и упражнения

1. *Коэффициент полезного действия реактивного движения.*

a) Пусть Q — химическая энергия единицы массы топлива ракеты, ω — скорость истечения топлива. Тогда $\frac{1}{2}\omega^2$ есть кинетическая энергия выброшенной единицы массы топлива. Коэффициент α в равенстве $\frac{1}{2}\omega^2 = \alpha Q$ есть коэффициент полезного действия процессов горения и истечения топлива. Для твердого топлива (бездымный порох) $\omega = 2$ км/с, $Q = 1000$ ккал/кг, а для жидкого (бензин с кислородом) $\omega = 3$ км/с, $Q = 2500$ ккал/кг. Определите в этих случаях коэффициент α.

b) Коэффициент полезного действия (к. п. д.) ракеты определяется как отношение ее конечной кинетической энергии $m_{\text{К}}\frac{v^2}{2}$ к химической энергии сгоревшего топлива $m_{\text{Т}}Q$. Пользуясь формулой (4), получите формулу для к. п. д. ракеты через $m_{\text{К}}$, $m_{\text{Т}}$, Q и α (см. a)).

c) Оцените к. п. д. автомобиля с жидкостным реактивным двигателем, если автомобиль разгоняется до установленной в городе скорости 60 км/час.

d) Оцените к. п. д. ракеты на жидком топливе, выводящей спутник на низкую околоземную орбиту.

e) Оцените, для какой конечной скорости реактивное движение на жидком топливе имеет наибольший к. п. д.

f) Укажите, при каком отношении масс $m_{\text{Т}}/m_{\text{К}}$ топлива и корпуса к. п. д. ракеты с любым видом топлива становится максимально возможным.

2. *Барометрическая формула.*

a) Используя данные п. 2 настоящего параграфа, получите формулу поправочного члена для учета зависимости давления от температуры столба воздуха, если эта температура подвержена изменениям (например, сезонным) в пределах $\pm 40\,^\circ$C.

b) Найдите по формуле (9) зависимость давления от высоты при температурах $-40\,^\circ$C, $0\,^\circ$C, $40\,^\circ$C и сравните эти результаты с результатами, которые дает ваша приближенная формула из a).

c) Пусть температура воздуха в столбе меняется с высотой по закону $T'(h) = -\alpha T_0$, где T_0 — температура воздуха на поверхности Земли, а $\alpha \approx 7\cdot10^{-7}$ см$^{-1}$. Выведите при этих условиях формулу зависимости давления от высоты.

d) Найдите давление в шахте на глубинах 1 км, 3 км, 9 км по формуле (9) и по формуле, которую вы получили в c).

e) Воздух независимо от высоты примерно на 1/5 часть состоит из кислорода. Парциальное давление кислорода составляет также примерно 1/5 часть давления воздуха. Определенный вид рыб может жить при парциальном давлении кислорода не ниже 0,15 атмосфер. Можно ли ожидать, что этот вид встретится в реке на уровне моря? Может ли он встретиться в речке, впадающей в озеро Титикака на высоте 3,81 км?

3. *Радиоактивный распад.*

a) Измеряя количество радиоактивного вещества и продуктов его распада в пробах пород Земли и считая, что сначала продукта распада вообще не было, можно примерно оценить возраст Земли (во всяком случае, с того момента, когда это вещество уже возникло). Пусть в породе имеется m г радиоактивного вещества и r г продукта его распада. Зная период T полураспада вещества, найдите время, прошедшее с момента начала распада, и количество радиоактивного вещества в пробе того же объема в начальный момент.

b) Атомы радия в породе составляют примерно 10^{-12} часть всех атомов. Каково было содержания радия 10^5, 10^6 и $5\cdot10^9$ лет тому назад? ($5\cdot10^9$ лет ориентировочно считается возрастом Земли.)

c) В диагностике заболеваний почек часто определяют способность почек выводить из крови различные специально вводимые в организм вещества, например креатин («клиренс тест»). Примером, иллюстрирующим обратный процесс того же типа, может служить восстановление концентрации гемоглобина в крови у донора или у больного, внезапно потерявшего много крови. Во всех этих случаях уменьшение количества введенного вещества (или, наоборот, восстановление недостающего количества) подчиняется закону $N = N_0 e^{-t/\tau}$, где N — количество (или, иными словами, число молекул) вещества, еще оставшегося в организме по прошествии времени t после введения количества N_0, а τ — так называемая *постоянная времени*: это время, по прошествии которого в организме остается $1/e$ часть первоначально введенного количества вещества. Постоянная времени, как легко проверить, в 1,44 раза больше времени полужизни (или времени полураспада), по истечении которого в организме остается половина первоначального количества вещества.

Пусть радиоактивное вещество выводится из организма со скоростью, характеризуемой постоянной времени τ_0, и в то же время спонтанно распадается с постоянной времени τ_p. Покажите, что в этом случае постоянная времени τ, характеризующая длительность сохранения вещества в организме, определяется из соотношения $\tau^{-1} = \tau_0^{-1} + \tau_p^{-1}$.

d) У донора было взято некоторое количество крови, содержащее 201 мг железа; для того чтобы компенсировать потерю железа, ему было велено принимать трижды в день в течение недели таблетки сернокислого железа, содержащие каждая 67 мг железа. Количество железа в крови донора восстанавливается до нормы по экспоненциальному закону с постоянной времени, равной примерно семи суткам. Полагая, что с наибольшей скоростью железо из таблеток включается в кровь сразу же после взятия крови, определите, какая примерно часть железа, содержащегося в таблетках, включится в кровь за все время восстановления нормального содержания железа в крови.

e) Больному со злокачественной опухолью было введено с диагностическими целями некоторое количество радиоактивного фосфора P^{32}, после чего через равные промежутки времени измерялась радиоактивность кожи бедра. Уменьшение радиоактивности подчинялось экспоненциальному закону. Так как период полураспада фосфора известен — он составляет 14,3 суток, — по полученным данным можно было определить постоянную времени процесса уменьшения радиоактивности за счет биологических причин. Найдите эту постоянную, если наблюдениями установлено, что постоянная времени процесса уменьшения радиоактивности в целом составляет 9,4 суток (см. выше задачу c)).

4. *Поглощение излучения.*

Прохождение излучения через среду сопровождается частичным поглощением излучения этой средой. Во многих случаях (линейная теория) можно считать, что, проходя через слой толщиной 2 единицы, излучение ослабляется так же, как при последовательном прохождении через два слоя толщиной 1 каждый.

a) Покажите, что при указанном условии поглощение излучения подчиняется закону $I = I_0 e^{-kl}$, где I_0 — интенсивность излучения, падающего на поглощающее вещество, I — интенсивность после прохождения слоя толщиной l, а k — коэффициент, имеющий размерность, обратную размерности длины.

b) Коэффициент k в случае поглощения света водой в зависимости от длины волны падающего света, например, таков: ультрафиолет, $k = 1{,}4 \cdot 10^{-2}\,\text{см}^{-1}$; синий, $k = 4{,}6 \cdot 10^{-4}\,\text{см}^{-1}$; зеленый, $k = 4{,}4 \cdot 10^{-4}\,\text{см}^{-1}$; красный, $k = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\,\text{см}^{-1}$. Солнечный свет падает вертикально на поверхность чистого озера глубиной 10 м. Сравните интенсивности каждой из перечисленных выше компонент солнечного света над поверхностью озера и на дне.

5. Покажите, что если закон движения точки $x = x(t)$ удовлетворяет уравнению $m\ddot{x} + kx = 0$ гармонических колебаний, то

a) величина $E = \frac{m\dot{x}^2(t)}{2} + \frac{kx^2(t)}{2}$ постоянна ($E = K + U$ — сумма кинетической $K = \frac{m\dot{x}^2(t)}{2}$ и потенциальной $U = \frac{kx^2(t)}{2}$ энергий точки в момент t);

b) если $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 0$, то $x(t) \equiv 0$;

c) существует и притом единственное движение $x = x(t)$ с начальными условиями $x(0) = x_0$ и $\dot{x}(0) = v_0$.

d) Проверьте, что если точка движется в среде с трением и $x = x(t)$ удовлетворяет уравнению $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$, $\alpha > 0$, то величина E (см. a)) убывает. Найдите скорость этого убывания и объясните физический смысл полученного результата, учитывая физический смысл величины E.

6. *Движение под действием гуковской*[1] *центральной силы* (плоский осциллятор).

В развитие рассмотренного в п. 6 и задаче 5 уравнения (21) линейного осциллятора рассмотрим уравнение $m\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = -k\boldsymbol{r}(t)$, которому удовлетворяет радиус-вектор $\boldsymbol{r}(t)$ точки массы m, движущейся в пространстве под действием притягивающей центральной силы, пропорциональной (с коэффициентом пропорциональности $k > 0$) расстоянию $|\boldsymbol{r}(t)|$ от центра. Такая сила возникает, если точка соединена с центром гуковской упругой связью, например пружиной с коэффициентом жесткости k.

a) Продифференцировав векторное произведение $\boldsymbol{r}(t) \times \dot{\boldsymbol{r}}(t)$, покажите, что все движение будет происходить в плоскости, проходящей через центр и содержащей векторы $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(t_0)$, $\dot{\boldsymbol{r}}_0 = \dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ начального положения и начальной скорости точки (плоский осциллятор). Если векторы $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(t_0)$, $\dot{\boldsymbol{r}}_0 = \dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ коллинеарны, то движение будет происходить на прямой, содержащей центр и вектор $\boldsymbol{r}_0$ (линейный осциллятор, рассмотренный в п. 6).

b) Проверьте, что орбитой плоского осциллятора является эллипс и движение по нему периодично. Найдите период обращения.

c) Покажите, что величина $E = m\dot{\boldsymbol{r}}^2(t) + k\boldsymbol{r}^2(t)$ сохраняется во времени.

d) Покажите, что начальные данные $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(t_0)$, $\dot{\boldsymbol{r}}_0 = \dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ вполне определяют дальнейшее движение точки.

7. *Эллиптичность планетных орбит.*

Предыдущая задача позволяет рассматривать движение точки под действием центральной гуковской силы происходящим в плоскости. Пусть это плоскость комплексной переменной $z = x + iy$. Движение определяется двумя вещественными функциями $x = x(t)$, $y = y(t)$ или, что то же самое, одной комплекснозначной функцией $z = z(t)$ времени t. Полагая для простоты в задаче 6 $m = 1$, $k = 1$, рассмотрим простейший вид уравнения такого движения $\ddot{z}(t) = -z(t)$.

a) Зная из задачи 6, что решение этого уравнения, отвечающее конкретным начальным данным $z_0 = z(t_0)$, $\dot{z}_0 = \dot{z}(t_0)$, единственно, найдите его в виде $z(t) = c_1e^{it} + c_2e^{-it}$ и, используя формулу Эйлера, проверьте еще раз, что траекторией движения является эллипс с центром в нуле (в определенных случаях он может превратиться в окружность или выродиться в отрезок — выясните когда).

[1] Р. Гук (1635 – 1703) — английский естествоиспытатель, разносторонний ученый и экспериментатор. Открыл клеточное строение тканей и ввел сам термин «клетка». Стоял у истоков математической теории упругости и волновой теории света, высказал гипотезу тяготения и закон обратных квадратов для гравитационного взаимодействия.

b) Учитывая, что величина $|\dot{z}(t)|^2 + |z(t)|^2$ не меняется в процессе движения точки $z(t)$, подчиненного уравнению $\ddot{z}(t) = -z(t)$, проверьте, что точка $w(t) = z^2(t)$ по отношению к новому параметру (времени) τ, связанному с t соотношением $\tau = \tau(t)$ таким, что $\frac{d\tau}{dt} = |z(t)|^2$, движется при этом, подчиняясь уравнению $\frac{d^2w}{d\tau^2} = -c\frac{w}{|w|^3}$, где c — постоянная, а $w = w(t(\tau))$. Таким образом, движения в центральном поле гуковских сил и движения в ньютоновском гравитационном поле оказались взаимосвязаны.

c) Сопоставьте это с результатом задачи 8 из § 5 и докажите теперь эллиптичность планетных орбит.

d) Если вам доступен компьютер, то, взглянув еще раз на изложенный в п. 5 метод ломаных Эйлера, для начала подсчитайте этим методом несколько значений e^x. (Заметьте, что кроме определения дифференциала, точнее, формулы $f(x_n) \approx f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})h$, где $h = x_n - x_{n-1}$, метод ничего не использует.)

Пусть теперь $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$, $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(0) = (1, 0)$, $\dot{\boldsymbol{r}}_0 = \dot{\boldsymbol{r}}(0) = (0, 1)$ и $\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = -\frac{\boldsymbol{r}(t)}{|\boldsymbol{r}(t)|^3}$. Опираясь на формулы

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(t_n) &\approx \boldsymbol{r}(t_{n-1}) + \boldsymbol{v}(t_{n-1})h,\\ \boldsymbol{v}(t_n) &\approx \boldsymbol{v}(t_{n-1}) + \boldsymbol{a}(t_{n-1})h,\end{aligned}$$

где $\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t)$, $\boldsymbol{a}(t) = \dot{\boldsymbol{v}}(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}(t)$, методом Эйлера рассчитайте траекторию движения точки, посмотрите, какой она формы и как она проходится точкой с течением времени.

§ 7. Первообразная

В дифференциальном исчислении, как мы убедились на примерах предыдущего параграфа, наряду с умением дифференцировать функции и записывать соотношения между их производными весьма ценным является умение находить функции по соотношениям, которым удовлетворяют их производные. Простейшей, но, как будет видно из дальнейшего, весьма важной задачей такого типа является вопрос об отыскании функции $F(x)$ по известной ее производной $F'(x) = f(x)$. Начальному обсуждению этого вопроса и посвящен настоящий параграф.

1. Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* или *первообразной* по отношению к функции $f(x)$ на некотором промежутке, если на этом промежутке функция F дифференцируема и удовлетворяет уравнению $F'(x) = f(x)$ или, что то же самое, соотношению $dF(x) = f(x)\,dx$.

Пример 1. Функция $F(x) = \operatorname{arctg} x$ является первообразной для $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ на всей числовой прямой, поскольку $\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$.

Пример 2. Функция $F(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ как на промежутке всех положительных чисел, так и на полуоси отрицательных чисел, ибо при $x \neq 0$

$$F'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} = f(x).$$

Как обстоит дело с существованием первообразной и каково множество первообразных данной функции?

В интегральном исчислении будет доказан фундаментальный факт о том, что любая непрерывная на промежутке функция имеет на этом промежутке первообразную.

Мы приводим этот факт для информации читателя, а в этом параграфе используется, по существу, лишь следующая, уже известная нам (см. гл. V, § 3, п. 1) характеристика множества первообразных данной функции на числовом промежутке, полученная из теоремы Лагранжа.

Утверждение 1. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные функции $f(x)$ на одном и том же промежутке, то их разность $F_1(x) - F_2(x)$ постоянна на этом промежутке.*

Условие, что сравнение F_1 и F_2 ведется на связном промежутке, как отмечалось при доказательстве этого утверждения, весьма существенно. Это можно заметить также из сопоставления примеров 1 и 2, в которых производные функций $F_1(x) = \operatorname{arctg} x$ и $F_2(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$ совпадают в области $\mathbb{R} \setminus 0$ их совместного определения. Однако

$$F_1(x) - F_2(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x = 0,$$

если $x > 0$, в то время как $F_1(x) - F_2(x) \equiv -\pi$ при $x < 0$, ибо при $x < 0$ имеем $\operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = \pi + \operatorname{arctg} x$.

Как и операция взятия дифференциала, имеющая свое название «дифференцирование» и свой математический символ $dF(x) = F'(x)\,dx$, операция перехода к первообразной имеет свое название «неопределенное интегрирование» и свой математический символ

$$\int f(x)\,dx, \tag{1}$$

называемый *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на заданном промежутке.

Таким образом, символ (1) мы будем понимать как обозначение любой из первообразных функции f на рассматриваемом промежутке.

В символе (1) знак $\int$ называется знаком *неопределенного интеграла*, f — *подынтегральная функция*, а $f(x)\,dx$ — *подынтегральное выражение*.

Из утверждения 1 следует, что если $F(x)$ — какая-то конкретная первообразная функции $f(x)$ на промежутке, то на этом промежутке

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{2}$$

т. е. любая другая первообразная может быть получена из конкретной $F(x)$ добавлением некоторой постоянной.

Если $F'(x) = f(x)$, т. е. F — первообразная для f на некотором промежутке, то из (2) имеем

$$\boxed{d\int f(x)\,dx = dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx.} \tag{3}$$

Кроме того, в соответствии с понятием неопределенного интеграла как любой из первообразных, из (2) следует также, что

$$\boxed{\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = F(x) + C.} \tag{4}$$

Формулы (3) и (4) устанавливают взаимность операций дифференцирования и неопределенного интегрирования. Эти операции взаимно обратны с точностью до появляющейся в формуле (4) неопределенной постоянной C.

До сих пор мы обсуждали лишь математическую природу постоянной C в формуле (2). Укажем теперь ее физический смысл на простейшем примере. Пусть точка движется по прямой так, что ее скорость $v(t)$

известна как функция времени (например, $v(t) \equiv v$). Если $x(t)$ — координата точки в момент t, то функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{x}(t) = v(t)$, т. е. является первообразной для $v(t)$. Можно ли по скорости $v(t)$ в каком-то интервале времени восстановить положение точки на оси? Ясно, что нет. По скорости и промежутку времени можно определить величину пройденного за это время пути s, но не положение на оси. Однако это положение также будет полностью определено, если указать его хотя бы в какой-то момент, например при $t = 0$, т. е. задать начальное условие $x(0) = x_0$. До задания начального условия закон движения $x(t)$ мог быть любым среди законов вида $x(t) = \tilde{x}(t) + c$, где $\tilde{x}(t)$ — любая конкретная первообразная функции $v(t)$, а c — произвольная постоянная. Но после задания начального условия $x(0) = x_0$ вся неопределенность исчезает, ибо мы должны иметь $x(0) = \tilde{x}(0) + c = x_0$, т. е. $c = x_0 - \tilde{x}(0)$, и $x(t) = x_0 + [\tilde{x}(t) - \tilde{x}(0)]$. Последняя формула вполне физична, поскольку произвольная первообразная $\tilde{x}$ участвует в формуле только в виде разности, определяя пройденный путь или величину смещения от известной начальной метки $x(0) = x_0$.

2. Основные общие приемы отыскания первообразной. В соответствии с определением символа (1) неопределенного интеграла, он обозначает функцию, производная которой равна подынтегральной функции. Исходя из этого определения, с учетом соотношения (2) и законов дифференцирования можно утверждать, что справедливы следующие соотношения:

a. $$\int (\alpha u(x) + \beta v(x))\, dx = \alpha \int u(x)\, dx + \beta \int v(x)\, dx + c. \tag{5}$$

b. $$\int (uv)'(x)\, dx = \int u'(x)v(x)\, dx + \int u(x)v'(x)\, dx + c. \tag{6}$$

c. *Если на некотором промежутке* I_x

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c,$$

а $\varphi\colon I_t \to I_x$ — *гладкое* (*т. е. непрерывно дифференцируемое*) *отображение промежутка* I_t *в* I_x, *то*

$$\int (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\, dt = (F \circ \varphi)(t) + c. \tag{7}$$

Равенства (5), (6), (7) проверяются прямым дифференцированием их левой и правой частей с использованием в (5) линейности дифференцирования, в (6) правила дифференцирования произведения и в (7) правила дифференцирования композиции функций.

Подобно правилам дифференцирования, позволяющим дифференцировать линейные комбинации, произведения и композиции уже известных функций, соотношения (5), (6), (7), как мы увидим, позволяют в ряде случаев сводить отыскание первообразной данной функции либо к построению первообразных более простых функций, либо вообще к уже известным первообразным. Набор таких известных первообразных может составить, например, следующая краткая таблица неопределенных интегралов, полученная переписыванием таблицы производных основных элементарных функций (см. § 2, п. 3):

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c \qquad (\alpha \neq -1),$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c,$$

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c \qquad (0 < a \neq 1),$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} \arcsin x + c, \\ -\arccos x + \tilde{c}, \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + c, \\ -\operatorname{arcctg} x + \tilde{c}, \end{cases}$$

$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + c,$$

$$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\, dx = \operatorname{th} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\, dx = -\operatorname{cth} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\, dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + c,$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c.$$

Каждая из этих формул рассматривается на тех промежутках вещественной оси $\mathbb{R}$, на которых определена соответствующая подынтегральная функция. Если таких промежутков несколько, то постоянная c в правой части может меняться от промежутка к промежутку.

Рассмотрим теперь некоторые примеры, показывающие соотношения (5), (6) и (7) в работе.

Сделаем предварительно следующее общее замечание.

Поскольку, найдя одну какую-нибудь первообразную заданной на промежутке функции, остальные можно получить добавлением постоянных, то условимся для сокращения записи всюду в дальнейшем произвольную постоянную добавлять только к окончательному результату, представляющему из себя конкретную первообразную данной функции.

a. Линейность неопределенного интеграла. Этот заголовок должен означать, что в силу соотношения (5) первообразную от линейной комбинации функций можно искать как линейную комбинацию первообразных этих функций.

Пример 3.

$$\int (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)\, dx =$$
$$= a_0 \int 1\, dx + a_1 \int x\, dx + \ldots + a_n \int x^n\, dx =$$
$$= c + a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \ldots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}.$$

Пример 4.

$$\int \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx = \int \left(x^2 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx =$$
$$= \int x^2\, dx + 2 \int x^{1/2}\, dx + \int \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{3} x^3 + \frac{4}{3} x^{3/2} + \ln |x| + c.$$

Пример 5.

$$\int \cos^2 \frac{x}{2}\, dx = \int \frac{1}{2} (1 + \cos x)\, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int 1\, dx + \frac{1}{2} \int \cos x\, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x + c.$$

b. Интегрирование по частям. Формулу (6) можно переписать в виде

$$u(x)v(x) = \int u(x)\, dv(x) + \int v(x)\, du(x) + c$$

или, что то же самое, в виде

$$\int u(x)\, dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\, du(x) + c. \tag{6$'$}$$

Это означает, что при отыскании первообразной функции $u(x)v'(x)$ дело можно свести к отысканию первообразной функции $v(x)u'(x)$, перебросив дифференцирование на другой сомножитель и частично проинтегрировав функцию, как показано в $(6')$, выделив при этом член $u(x)v(x)$. Формулу $(6')$ называют формулой *интегрирования по частям.*

Пример 6.

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x\, d \ln x = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx =$$
$$= x \ln x - \int 1\, dx = x \ln x - x + c.$$

Пример 7.

$$\int x^2 e^x\,dx = \int x^2\,de^x = x^2 e^x - \int e^x\,dx^2 = x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx =$$
$$= x^2 e^x - 2\int x\,de^x = x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x\,dx\right) =$$
$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c = (x^2 - 2x + 2)e^x + c.$$

c. Замена переменной в неопределенном интеграле. Формула (7) показывает, что при отыскании первообразной функции $(f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)$ можно поступать следующим образом:

$$\int (f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)\,dt = \int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) =$$
$$= \int f(x)\,dx = F(x) + c = F(\varphi(t)) + c,$$

т. е. сначала произвести замену $\varphi(t) = x$ под знаком интеграла и перейти к новой переменной x, а затем, найдя первообразную как функцию от x, вернуться к старой переменной t заменой $x = \varphi(t)$.

Пример 8.

$$\int \frac{t\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln|x| + c = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + c.$$

Пример 9.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} =$$
$$= \int \frac{du}{\operatorname{tg}u\cos^2 u} = \int \frac{d(\operatorname{tg}u)}{\operatorname{tg}u} = \int \frac{dv}{v} =$$
$$= \ln|v| + c = \ln|\operatorname{tg}u| + c = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c.$$

Мы рассмотрели несколько примеров, в которых использовались порознь свойства a, b, c неопределенного интеграла. На самом деле в большинстве случаев эти свойства используются совместно.

Пример 10.

$$\int \sin 2x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin 5x - \sin x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int \sin 5x\, dx - \int \sin x\, dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\int \sin 5x\, d(5x) + \cos x\right) =$$
$$= \frac{1}{10}\int \sin u\, du + \frac{1}{2}\cos x = -\frac{1}{10}\cos u + \frac{1}{2}\cos x + c =$$
$$= \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x + c.$$

Пример 11.

$$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x - \int x\, d\arcsin x =$$
$$= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\, du = x\arcsin x + u^{1/2} + c =$$
$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

Пример 12.

$$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{1}{a}\int \cos bx\, de^{ax} =$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx - \frac{1}{a}\int e^{ax}\, d\cos bx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\, dx =$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\int \sin bx\, de^{ax} = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx -$$
$$- \frac{b}{a^2}\int e^{ax}\, d\sin bx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2}e^{ax} - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx\, dx.$$

Из полученного равенства заключаем, что

$$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + c.$$

К этому результату можно было бы прийти, воспользовавшись формулой Эйлера и тем обстоятельством, что первообразной функции

$e^{(a+ib)x} = e^{ax}\cos bx + ie^{ax}\sin bx$ является функция

$$\frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{(a+ib)x} = \\ = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + i\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}.$$

Это полезно иметь в виду и в будущем. При вещественном x это легко проверить непосредственно, продифференцировав действительную и мнимую части функции $\frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x}$.

В частности, отсюда получаем также, что

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + c.$$

Уже этот небольшой набор разобранных примеров показывает, что при отыскании первообразных даже элементарных функций часто приходится прибегать к дополнительным преобразованиям и ухищрениям, чего совсем не было при отыскании производных композиции тех функций, производные которых нам были известны. Оказывается, это не случайная трудность. Например, в отличие от дифференцирования, переход к первообразной элементарной функции может привести к функции, которая уже не является композицией элементарных. Поэтому не следует отождествлять фразу «найти первообразную» с невыполнимым порой заданием «выразить первообразную данной элементарной функции через элементарные функции». Вообще, класс элементарных функций — вещь очень условная. Имеется еще много важных для приложений специальных функций, которые изучены и затабулированы ничуть не хуже, чем, скажем, $\sin x$ или e^x.

Например, *интегральный синус* $\mathrm{Si}\,x$ есть та первообразная $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ функции $\frac{\sin x}{x}$, которая стремится к нулю при $x \to 0$. Такая первообразная существует, но, как и любая другая первообразная функции $\frac{\sin x}{x}$, она не является композицией элементарных функций.

Аналогично, функция

$$\mathrm{Ci}\,x = \int \frac{\cos x}{x}\,dx,$$

выделяемая условием $\mathrm{Ci}\,x \to 0$ при $x \to \infty$, не является элементарной. Функция $\mathrm{Ci}\,x$ называется *интегральным косинусом.*

Первообразная $\int \frac{dx}{\ln x}$ функции $\frac{1}{\ln x}$ также неэлементарна. Одна из первообразных этой функции обозначается символом $\operatorname{li} x$ и называется *интегральным логарифмом.* Она удовлетворяет условию $\operatorname{li} x \to 0$ при $x \to +0$. (Подробнее о специальных функциях $\operatorname{Si} x$, $\operatorname{Ci} x$, $\operatorname{li} x$ будет сказано в гл. VI, § 5.)

Учитывая эти трудности отыскания первообразных, составлены довольно обширные таблицы неопределенных интегралов. Однако, чтобы успешно ими воспользоваться или чтобы не прибегать к ним, если вопрос совсем прост, необходимо иметь некоторые навыки обращения с неопределенными интегралами.

Дальнейшая часть этого параграфа посвящена интегрированию функций из некоторых специальных классов, первообразные которых выражаются в виде композиции элементарных функций.

3. Первообразные рациональных функций. Рассмотрим вопрос об интегралах вида $\int R(x)\,dx$, где $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ есть отношение полиномов.

Если действовать в области вещественных чисел, то, не выходя за пределы поля вещественных чисел, любую такую дробь, как известно из алгебры (см. формулу (37) из § 5, п. 4), можно разложить в сумму

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{k=1}^{k_j} \frac{a_{jk}}{(x-x_j)^k} \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m_j} \frac{b_{jk}x + c_{jk}}{(x^2+p_jx+q_j)^k} \right), \quad (8)$$

где $p(x)$ — многочлен (он появляется при делении $P(x)$ на $Q(x)$, только если степень $P(x)$ не меньше степени $Q(x)$), a_{jk}, b_{jk}, c_{jk} — однозначно определяемые действительные числа, а $Q(x) = (x-x_1)^{k_1} \ldots (x-x_l)^{k_l} \times$ $\times (x^2+p_1x+q_1)^{m_1} \ldots (x^2+p_nx+q_n)^{m_n}$.

О том, как строить разложение (8), мы уже говорили в § 5. После того как разложение (8) построено, интегрирование функции $R(x)$ сводится к интегрированию отдельных слагаемых.

Многочлен мы уже интегрировали в примере 1, поэтому остается рассмотреть только интегрирование дробей вида

$$\frac{1}{(x-a)^k} \quad \text{и} \quad \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}, \qquad \text{где} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Вопрос о первой из этих дробей решается сразу, ибо

$$\int \frac{1}{(x-a)^k}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1}+c & \text{при} \quad k\neq 1, \\ \ln|x-a|+c & \text{при} \quad k=1. \end{cases} \tag{9}$$

С интегралом

$$\int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}\,dx$$

поступим следующим образом. Представим многочлен x^2+px+q в виде $\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2+\left(q-\frac{1}{4}p^2\right)$, где $q-\frac{1}{4}p^2>0$, так как многочлен x^2+px+q не имеет вещественных корней. Полагая $x+\frac{1}{2}p=u$ и $q-\frac{1}{4}p^2=a^2$, получаем

$$\int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{\alpha u+\beta}{(u^2+a^2)^k}\,du,$$

где $\alpha=b,\ \beta=c-\frac{1}{2}bp$.

Далее,

$$\int \frac{u}{(u^2+a^2)^k}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{d(u^2+a^2)}{(u^2+a^2)^k} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2(1-k)}(u^2+a^2)^{-k+1} & \text{при} \quad k\neq 1, \\ \frac{1}{2}\ln(u^2+a^2) & \text{при} \quad k=1, \end{cases} \tag{10}$$

и остается разобраться с интегралом

$$I_k = \int \frac{du}{(u^2+a^2)^k}. \tag{11}$$

Интегрируя по частям и делая элементарные преобразования, имеем

$$I_k = \int \frac{du}{(u^2+a^2)^k} = \frac{u}{(u^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{u^2\,du}{(u^2+a^2)^{k+1}} =$$

$$= \frac{u}{(u^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{(u^2+a^2)-a^2}{(u^2+a^2)^{k+1}}\,du = \frac{u}{(u^2+a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2I_{k+1},$$

откуда следует рекуррентное соотношение

$$I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2}\frac{u}{(u^2+a^2)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2}I_k, \tag{12}$$

позволяющее понижать степень k в интеграле (11). Но I_1 легко вычислить:

$$I_1 = \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{u}{a}\right)}{1+\left(\frac{u}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + c; \tag{13}$$

таким образом, используя (12) и (13), можно вычислить также первообразную (11).

Итак, мы доказали следующее

Утверждение 2. *Первообразная любой рациональной функции* $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ *выражается через рациональные функции, а также трансцендентные функции* ln *и* arctg. *Рациональная часть первообразной, будучи приведена к общему знаменателю, должна в качестве такового иметь произведение всех сомножителей, на которые раскладывается многочлен* $Q(x)$, *только с кратностями на единицу меньшими, чем кратность их вхождения в разложение* $Q(x)$.

Пример 13. Вычислим $\displaystyle\int \frac{2x^2+5x+5}{(x^2-1)(x+2)}\,dx$.

Поскольку подынтегральная функция является правильной дробью и разложение знаменателя в произведение $(x-1)(x+1)(x+2)$ тоже известно, то сразу ищем разложение

$$\frac{2x^2+5x+5}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} \tag{14}$$

нашей дроби в сумму простейших дробей.

Приведя правую часть равенства (14) к общему знаменателю, имеем

$$\frac{2x^2+5x+5}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{(A+B+C)x^2+(3A+B)x+(2A-2B-C)}{(x-1)(x+1)(x+2)}.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты числителей, получаем систему

$$\begin{cases} A + B + C = 2, \\ 3A + B = 5, \\ 2A - 2B - C = 5, \end{cases}$$

из которой находим $(A, B, C) = (2, -1, 1)$.

Заметим, что в данном случае эти числа можно было бы найти и в уме. Действительно, домножая (14) на $x-1$ и полагая затем в полученном равенстве $x=1$, справа получим A, а слева — значение при $x=1$ дроби, полученной из нашей вычеркиванием в знаменателе сомножителя $x-1$, т. е. $A=\frac{2+5+5}{2\cdot 3}=2$. Аналогично можно было бы найти B и C.

Итак,

$$\int \frac{2x^2+5x+5}{(x^2-1)(x+2)}\,dx = 2\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x+2} =$$
$$= 2\ln|x-1| - \ln|x+1| + \ln|x+2| + c = \ln\left|\frac{(x-1)^2(x+2)}{x+1}\right| + c.$$

Пример 14. Вычислим первообразную функции

$$R(x)=\frac{x^7-2x^6+4x^5-5x^4+4x^3-5x^2-x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}.$$

Прежде всего заметим, что дробь не является правильной, поэтому, раскрыв скобки и найдя знаменатель дроби $Q(x)=x^6-2x^5+3x^4-{}$ $-4x^3+3x^2-2x+1$, делим на него числитель, после чего получаем

$$R(x)=x+\frac{x^5-x^4+x^3-3x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2},$$

а затем уже ищем разложение правильной дроби

$$\frac{x^5-x^4+x^3-3x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}. \quad (15)$$

Конечно, разложение можно найти каноническим путем, выписав систему шести уравнений с шестью неизвестными. Однако вместо этого мы продемонстрируем иные, иногда используемые, технические возможности.

Коэффициент A находим, домножив равенство (15) на $(x-1)^2$ и положив затем $x=1$: $A=-1$.

Перенесем дробь $\frac{A}{(x-1)^2}$ с уже известным значением $A=-1$ в левую часть равенства (15). Тогда получим

$$\frac{x^4+x^3+2x^2+x-1}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}, \quad (16)$$

откуда, домножая (16) на $x-1$ и полагая затем $x=1$, находим $B=1$.

Перенося теперь дробь $\frac{1}{x-1}$ в левую часть равенства (16), получим

$$\frac{x^2+x+2}{(x^2+1)^2} = \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1}. \tag{17}$$

Приводя правую часть равенства (17) к общему знаменателю, приравниваем числители

$$x^2+x+2 = Ex^3+Fx^2+(C+E)x+(D+F),$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} E = 0, \\ F = 1, \\ C + E = 1, \\ D + F = 2, \end{cases}$$

или $(C, D, E, F) = (1, 1, 0, 1)$.

Теперь нам известны все коэффициенты в равенстве (15). Первые две дроби при интегрировании дают соответственно $\frac{1}{x-1}$ и $\ln|x-1|$. Далее,

$$\int \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\,dx = \\ = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{-1}{2(x^2+1)} + I_2,$$

где

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x,$$

что следует из (12) и (13).

Наконец,

$$\int \frac{Ex+F}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x.$$

Собирая все интегралы, окончательно имеем

$$\int R(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x-1} + \frac{x}{2(x^2+1)^2} + \ln|x-1| + \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + c.$$

Рассмотрим теперь некоторые часто встречающиеся неопределенные интегралы, вычисление которых может быть сведено к отысканию первообразной рациональной функции.

4. Первообразные вида $\int R(\cos x,\, \sin x)\, dx$. Пусть $R(u,v)$ — рациональная функция от u и v, т. е. отношение $\frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ полиномов, являющихся линейными комбинациями мономов $u^m v^n$, где $m = 0, 1, \ldots$, $n = 0, 1, \ldots$

Для вычисления первообразной $\int R(\cos x,\, \sin x)\, dx$ существует несколько приемов, из которых один — вполне универсальный, хотя и не всегда самый экономный.

a. Сделаем замену $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Поскольку

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \qquad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

$$dt = \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}}, \quad \text{т. е.} \quad dx = \frac{2dt}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

то

$$\int R(\cos x,\, \sin x)\, dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\, dt,$$

и дело свелось к интегрированию рациональной функции.

Однако такой путь часто приводит к очень громоздкой рациональной функции, поэтому следует иметь в виду, что в ряде случаев существуют и другие возможности рационализации интеграла.

b. В случае интегралов вида $\int R(\cos^2 x, \sin^2 x)\, dx$ или $\int r(\operatorname{tg} x)\, dx$, где $r(u)$ — рациональная функция, удобна подстановка $t = \operatorname{tg} x$, ибо

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \qquad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

$$dt = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad \text{т. е.} \quad dx = \frac{dt}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

Выполнив указанную подстановку, получим соответственно

$$\int R(\cos^2 x, \sin^2 x)\, dx = \int R\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2},$$

$$\int r(\operatorname{tg} x)\, dx = \int r(t) \frac{dt}{1+t^2}.$$

с. В случае интегралов вида

$$\int R(\cos x,\, \sin^2 x)\sin x\,dx \qquad \text{или} \qquad \int R(\cos^2 x,\, \sin x)\cos x\,dx$$

можно внести функции $\sin x$, $\cos x$ под знак дифференциала и сделать замену $t = \cos x$ или $t = \sin x$ соответственно. После замены эти интегралы будут иметь вид

$$-\int R(t, 1-t^2)\,dt \qquad \text{или} \qquad \int R(1-t^2, t)\,dt.$$

Пример 15.

$$\int \frac{dx}{3+\sin x} = \int \frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{3t^2+2t+3} = \frac{2}{3}\int \frac{d\left(t+\frac{1}{3}\right)}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\int \frac{du}{u^2+\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3u}{2\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{2\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{2}} + c.$$

Здесь мы воспользовались универсальной заменой $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Пример 16.

$$\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2} = \int \frac{dx}{\cos^2 x(\operatorname{tg} x+1)^2} =$$

$$= \int \frac{d\operatorname{tg} x}{(\operatorname{tg} x+1)^2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{t+1} + c = c - \frac{1}{1+\operatorname{tg} x}.$$

Пример 17.

$$\int \frac{dx}{2\sin^2 3x - 3\cos^2 3x + 1} = \int \frac{dx}{\cos^2 3x\,(2\operatorname{tg}^2 3x - 3 + (1+\operatorname{tg}^2 3x))} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d\operatorname{tg} 3x}{3\operatorname{tg}^2 3x - 2} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{3t^2-2} = \frac{1}{3\cdot 2}\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{d\sqrt{\frac{3}{2}}t}{\frac{3}{2}t^2-1} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{6}}\int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{6\sqrt{6}}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + c =$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}t - 1}{\sqrt{\frac{3}{2}}t + 1} \right| + c = \frac{1}{6\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} 3x - \sqrt{\frac{2}{3}}}{\operatorname{tg} 3x + \sqrt{\frac{2}{3}}} \right| + c.$$

Пример 18.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x}\, dx = \int \frac{\cos^2 x \, d\sin x}{\sin^7 x} = \int \frac{(1-t^2)\, dt}{t^7} =$$
$$= \int \left(t^{-7} - t^{-5}\right)\, dt = -\frac{1}{6}t^{-6} + \frac{1}{4}t^{-4} + c = \frac{1}{4\sin^4 x} - \frac{1}{6\sin^6 x} + c.$$

5. Первообразные вида $\int R(x, y(x))\, dx$. Пусть, как и в пункте 4, $R(x,y)$ — рациональная функция. Рассмотрим некоторые специальные первообразные вида

$$\int R(x, y(x))\, dx,$$

где $y = y(x)$ — функция от x.

Прежде всего, ясно, что если удастся сделать замену $x = x(t)$ так, что обе функции $x = x(t)$ и $y = y(x(t))$ окажутся рациональными функциями от t, то $x'(t)$ — тоже рациональная функция и

$$\int R(x, y(x))\, dx = \int R(x(t), y(x(t)))x'(t)\, dt,$$

т. е. дело сведется к интегрированию рациональной функции.

Мы рассмотрим следующие специальные случаи задания функции $y = y(x)$.

a. Если $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, где $n \in \mathbb{N}$, то, полагая $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$, получаем

$$x = \frac{d \cdot t^n - b}{a - c \cdot t^n}, \qquad y = t,$$

и подынтегральное выражение рационализируется.

Пример 19.

$$\int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\, dx = \int t\, d\left(\frac{t^3+1}{1-t^3}\right) = t \cdot \frac{t^3+1}{1-t^3} - \int \frac{t^3+1}{1-t^3}\, dt =$$

$$= t \cdot \frac{t^3+1}{1-t^3} - \int \left(\frac{2}{1-t^3} - 1\right) dt =$$

$$= t \cdot \frac{t^3+1}{1-t^3} + t - 2\int \frac{dt}{(1-t)(1+t+t^2)} =$$

$$= \frac{2t}{1-t^3} - 2\int \left(\frac{1}{3(1-t)} + \frac{2+t}{3(1+t+t^2)}\right) dt =$$

$$= \frac{2t}{1-t^3} + \frac{2}{3}\ln|1-t| - \frac{2}{3}\int \frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dt =$$

$$= \frac{2t}{1-t^3} + \frac{2}{3}\ln|1-t| - \frac{1}{3}\ln\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right] -$$
$$- \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right) + c, \qquad \text{где} \quad t = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}.$$

b. Рассмотрим теперь случай, когда $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$, т.е. речь идет об интегралах вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx.$$

Выделяя полный квадрат в трехчлене ax^2+bx+c и делая соответствующую линейную замену переменной, сводим общий случай к одному из следующих трех простейших:

$$\int R\left(t, \sqrt{t^2+1}\right) dt, \qquad \int R\left(t, \sqrt{t^2-1}\right) dt, \qquad \int R\left(t, \sqrt{1-t^2}\right) dt. \tag{18}$$

Для рационализации этих интегралов теперь достаточно положить соответственно

$$\begin{array}{lllll}
\sqrt{t^2+1} = tu+1, & \text{или} & \sqrt{t^2+1} = tu-1, & \text{или} & \sqrt{t^2+1} = t-u; \\
\sqrt{t^2-1} = u(t-1), & \text{или} & \sqrt{t^2-1} = u(t+1), & \text{или} & \sqrt{t^2-1} = t-u; \\
\sqrt{1-t^2} = u(1-t), & \text{или} & \sqrt{1-t^2} = u(1+t), & \text{или} & \sqrt{1-t^2} = tu \pm 1.
\end{array}$$

Эти подстановки были предложены еще Эйлером (см. задачу 3 в конце параграфа).

Проверим, например, что после первой подстановки мы сведем первый интеграл к интегралу от рациональной функции.

В самом деле, если $\sqrt{t^2+1} = tu+1$, то $t^2+1 = t^2u^2+2tu+1$, откуда

$$t = \frac{2u}{1-u^2}$$

и, в свою очередь,

$$\sqrt{t^2+1} = \frac{1+u^2}{1-u^2}.$$

Таким образом, t и $\sqrt{t^2+1}$ выразились рационально через u, а следовательно, интеграл привелся к интегралу от рациональной функции.

Интегралы (18) подстановками $t = \operatorname{sh}\varphi$, $t = \operatorname{ch}\varphi$, $t = \sin\varphi$ (или $t = \cos\varphi$) соответственно приводятся также к тригонометрической форме

$$\int R(\operatorname{sh}\varphi, \operatorname{ch}\varphi)\operatorname{ch}\varphi\,d\varphi, \qquad \int R(\operatorname{ch}\varphi, \operatorname{sh}\varphi)\operatorname{sh}\varphi\,d\varphi$$

и

$$\int R(\sin\varphi, \cos\varphi)\cos\varphi\,d\varphi \quad \text{или} \quad -\int R(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi\,d\varphi.$$

Пример 20.

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{dx}{x+\sqrt{(x+1)^2+1}} = \int \frac{dt}{t-1+\sqrt{t^2+1}}.$$

Полагая $\sqrt{t^2+1} = u-t$, имеем $1 = u^2-2tu$, откуда $t = \frac{u^2-1}{2u}$. Поэтому

$$\int \frac{dt}{t-1+\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u-1}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u-1}\,du +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2(u-1)} = \frac{1}{2}\ln|u-1| + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u}\right)du =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u-1| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u}\right| + \frac{1}{2u} + c.$$

Теперь остается проделать обратный путь замен: $u = t+\sqrt{t^2+1}$ и $t = x+1$.

c. Эллиптические интегралы. Очень важными являются также первообразные вида

$$\int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right)\, dx, \tag{19}$$

где $P(x)$ — многочлен степени $n > 2$. Такой интеграл, как было показано Абелем и Лиувиллем, вообще говоря, уже не выражается через элементарные функции.

При $n = 3$ и $n = 4$ интеграл (19) называется *эллиптическим*, а при $n > 4$ — *гиперэллиптическим*.

Можно показать, что общий эллиптический интеграл элементарными подстановками с точностью до слагаемых, выражающихся через элементарные функции, приводится к следующим трем стандартным эллиптическим интегралам:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{20}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{21}$$

$$\int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{22}$$

где h и k — параметры, причем во всех трех случаях параметр k лежит в интервале $]0,1[$.

Подстановкой $x = \sin\varphi$ эти интегралы можно свести к следующим каноническим интегралам или их комбинациям:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{23}$$

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi, \tag{24}$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{25}$$

Интегралы (23), (24), (25) называются соответственно *эллиптическими интегралами первого, второго* и *третьего рода* (в форме Лежандра). Через $F(k,\varphi)$ и $E(k,\varphi)$ обозначают эллиптические интегралы

(23) и (24) первого и второго рода соответственно, выделяемые условиями $F(k,0)=0$ и $E(k,0)=0$.

Функции $F(k,\varphi)$, $E(k,\varphi)$ часто используются, и потому составлены достаточно подробные таблицы их значений для $0<k<1$ и $0\leqslant \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

Эллиптические интегралы, как показал Абель, естественно рассматривать в комплексной области, в неразрывной связи с так называемыми эллиптическими функциями, которые соотносятся с эллиптическими интегралами так же, как, например, функция $\sin\varphi$ с интегралом $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varphi^2}} = \arcsin\varphi$.

Задачи и упражнения

1. *Метод Остроградского*[1] *выделения рациональной части интеграла от правильной рациональной дроби.*

Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь; $q(x)$ — многочлен, имеющий те же корни, что и $Q(x)$, но кратности 1; $Q_1(x) = \frac{Q(x)}{q(x)}$.

Покажите, что

a) Имеет место следующая формула Остроградского:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx, \tag{26}$$

где $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, $\frac{p(x)}{q(x)}$ — правильные рациональные дроби, причем $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ — трансцендентная функция.

(В силу этого результата дробь $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ в (26) называется *рациональной частью* интеграла $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$.)

b) В формуле

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)' + \frac{p(x)}{q(x)},$$

полученной дифференцированием формулы Остроградского, сумма справа после надлежащих сокращений приводится к знаменателю $Q(x)$.

c) Многочлены $q(x)$, $Q_1(x)$, а затем и многочлены $p(x)$, $P_1(x)$ можно найти алгебраическим путем, даже не зная корней многочлена $Q(x)$. Таким образом, рациональную часть интеграла (26) можно полностью найти, даже не вычислив всей первообразной.

[1] М. В. Остроградский (1801 – 1861) — выдающийся русский механик и математик, один из инициаторов прикладного направления исследований в Петербургской математической школе.

d) Выделите рациональную часть интеграла (26), если

$$P(x) = 2x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 3x + 2,$$
$$Q(x) = x^7 + 3x^6 + 5x^5 + 7x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 3x + 1$$

(см. пример 17 в § 5 этой главы).

2. Пусть ищется первообразная

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx, \tag{27}$$

где $R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ — рациональная функция.

Покажите, что

a) если $R(-u,v) = R(u,v)$, то $R(u,v)$ имеет вид $R_1(u^2, v)$;

b) если $R(-u,v) = -R(u,v)$, то $R(u,v) = u \cdot R_2(u^2, v)$ и подстановка $t = \sin x$ рационализирует интеграл (27);

c) если $R(-u,-v) = R(u,v)$, то $R(u,v) = R_3\left(\frac{u}{v}, v^2\right)$ и подстановка $t = \operatorname{tg} x$ рационализирует интеграл (27).

3. *Интегралы вида*

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx. \tag{28}$$

a) Проверьте, что интеграл (28) приводится к интегралу от рациональной функции следующими *подстановками Эйлера*:

$t = \sqrt{ax^2 + bx + c} \pm \sqrt{a}x$, если $a > 0$,

$t = \sqrt{\frac{x - x_1}{x - x_2}}$, если x_1, x_2 — действительные корни трехчлена $ax^2 + bx + c$.

b) Пусть (x_0, y_0) — точка кривой $y^2 = ax^2 + bx + c$, а t — угловой коэффициент прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) и пересекающей кривую в некоторой точке (x, y). Выразите координаты (x, y) через (x_0, y_0) и t и свяжите эти формулы с подстановками Эйлера.

c) Кривая, задаваемая алгебраическим уравнением $P(x,y) = 0$, называется *уникурсальной*, если она допускает параметрическую запись $x = x(t)$, $y = y(t)$ при помощи рациональных функций $x(t)$, $y(t)$. Покажите, что интеграл $\int R(x, y(x))\, dx$, где $R(u,v)$ — рациональная функция, а $y(x)$ — алгебраическая функция, удовлетворяющая уравнению $P(x,y) = 0$, задающему уникурсальную кривую, приводится к интегралу от рациональной функции.

d) Покажите, что интеграл (28) всегда можно свести к вычислению интегралов следующих трех типов:

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx, \qquad \int \frac{dx}{(x - x_0)^k \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c}},$$
$$\int \frac{(Ax + B)\, dx}{(x^2 + px + q)^m \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

4. a) Покажите, что интеграл

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

от дифференциального бинома, где m, n, p — рациональные числа, приводится к интегралу

$$\int (a+bt)^p t^q\,dt, \tag{29}$$

где p, q — рациональные числа.

b) Интеграл (29) выражается через элементарные функции, если одно из трех чисел p, q, $p+q$ — целое. (П. Л. Чебышёв показал, что других случаев, при которых бы интеграл (29) выражался в элементарных функциях, не существует.)

5. *Эллиптические интегралы.*

a) Любой многочлен третьей степени с действительными коэффициентами имеет вещественный корень x_0 и заменой $x-x_0=t^2$ приводится к многочлену вида $t^2(at^4+bt^3+ct^2+dt+e)$, где $a\neq 0$.

b) Функция $R\left(x,\sqrt{P(x)}\right)$, где $R(u,v)$ — рациональная функция, а P — полином степени 3 или 4, приводится к виду $R_1\bigl(t,\sqrt{at^4+bt^3+\ldots+e}\bigr)$, где $a\neq 0$.

c) Многочлен четвертой степени $ax^4+bx^3+\ldots+e$ представляется в виде произведения $a(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)$ и заменой $x=\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+1}$ всегда может быть приведен к виду $\frac{(M_1+N_1t^2)(M_2+N_2t^2)}{(\gamma t+1)^2}$.

d) Функция $R\left(x,\sqrt{ax^4+bx^3+\ldots+e}\right)$ заменой $x=\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+1}$ может быть приведена к виду

$$R_1\bigl(t,\sqrt{A(1+m_1t^2)(1+m_2t^2)}\bigr).$$

e) Функция $R\left(x,\sqrt{y}\right)$ может быть представлена в виде суммы $R_1(x,y)+$ $+\frac{R_2(x,y)}{\sqrt{y}}$, где R_1 и R_2 — рациональные функции.

f) Любая рациональная функция может быть представлена как сумма четной и нечетной рациональных функций.

g) Если рациональная функция $R(x)$ четна, то она имеет вид $r(x^2)$, а если нечетна, то вид $xr(x^2)$, где $r(x)$ — рациональная функция.

h) Любая функция $R\left(x,\sqrt{y}\right)$ приводится к виду

$$R_1(x,y)+\frac{R_2(x^2,y)}{\sqrt{y}}+\frac{R_3(x^2,y)}{\sqrt{y}}x.$$

i) Любой интеграл вида $\int R\left(x,\sqrt{P(x)}\right)dx$, где $P(x)$ — многочлен четвертой степени, с точностью до элементарных слагаемых приводится к интегралу

$$\int \frac{r(t^2)\,dt}{\sqrt{A(1+m_1t^2)(1+m_2t^2)}},$$

где $r(t)$ — рациональная функция, $A = \pm 1$.

j) Если $|m_1| > |m_2| > 0$, то одной из замен вида $\sqrt{m_1}t = x$, $\sqrt{m_1}t = \sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{m_1}t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\sqrt{m_1}t = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ интеграл $\int \frac{r(t^2)\,dt}{\sqrt{A(1+m_1t^2)(1+m_2t^2)}}$ приводится к виду $\int \frac{\tilde{r}(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, где $0 < k < 1$, а $\tilde{r}$ — рациональная функция.

k) Выведите формулы понижения показателей $2n$, m для интегралов

$$\int \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad \int \frac{dx}{(x^2-a)^m \cdot \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

l) Любой эллиптический интеграл

$$\int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right)\,dx,$$

где P — полином четвертой степени, с точностью до слагаемых, представляющихся в виде элементарных функций, приводится к одному из трех канонических интегралов (20), (21), (22).

m) Интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ выразите через канонические эллиптические интегралы.

n) Выразите через эллиптические интегралы первообразные функций $\frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$ и $\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha - \cos x}}$.

6. Используя вводимые ниже обозначения, найдите с точностью до линейной функции $Ax + B$ первообразные следующих неэлементарных специальных функций:

a) $\mathrm{Ei}(x) = \int \frac{e^x}{x}\,dx$ (интегральная экспонента);

b) $\mathrm{Si}(x) = \int \frac{\sin x}{x}\,dx$ (интегральный синус);

c) $\mathrm{Ci}(x) = \int \frac{\cos x}{x}\,dx$ (интегральный косинус);

d) $\mathrm{Shi}(x) = \int \frac{\operatorname{sh} x}{x}\,dx$ (интегральный гиперболический синус);

e) $\mathrm{Chi}(x) = \int \frac{\operatorname{ch} x}{x}\,dx$ (интегральный гиперболический косинус);

$$\left.\begin{aligned} &\text{f) } S(x) = \int \sin x^2\,dx \\ &\text{g) } C(x) = \int \cos x^2\,dx \end{aligned}\right\} \text{(интегралы Френеля);}$$

h) $\Phi(x) = \int e^{-x^2}\,dx$ (интеграл Эйлера–Пуассона);

i) $\mathrm{li}(x) = \int \frac{dx}{\ln x}$ (интегральный логарифм).

7. Проверьте, что с точностью до постоянной справедливы следующие равенства:

a) $\mathrm{Ei}(x) = \mathrm{li}(e^x)$;

b) $\mathrm{Chi}(x) = \frac{1}{2}[\mathrm{Ei}(x) + \mathrm{Ei}(-x)]$;

c) $\mathrm{Shi}(x) = \frac{1}{2}[\mathrm{Ei}(x) - \mathrm{Ei}(-x)]$;

d) $\mathrm{Ei}(ix) = \mathrm{Ci}(x) + i\,\mathrm{Si}(x)$;

e) $e^{i\pi/4}\Phi\left(xe^{-i\pi/4}\right) = C(x) + iS(x)$.

8. Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

называют *уравнением с разделяющимися переменными*, поскольку его можно переписать в виде

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx,$$

в котором переменные x и y разделены. После этого уравнение можно решить:

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + c,$$

вычислив соответствующие первообразные.

Решите уравнения

a) $2x^3yy' + y^2 = 2$;

b) $xyy' = \sqrt{1+x^2}$;

c) $y' = \cos(y+x)$, положив $u(x) = y(x) + x$;

d) $x^2y' - \cos 2y = 1$ и выделите то решение, которое удовлетворяет условию $y(x) \to 0$ при $x \to +\infty$;

e) $\frac{1}{x}y'(x) = \mathrm{Si}(x)$;

f) $\frac{y'(x)}{\cos x} = C(x)$.

9. Парашютист прыгнул с высоты 1,5 км, а раскрыл парашют на высоте 0,5 км. Сколько времени он падал до раскрытия парашюта? Предельную скорость падения человека в воздухе нормальной плотности принять равной 50 м/с. Решите задачу в предположении, что сопротивление воздуха пропорционально

a) скорости;

b) квадрату скорости.

Изменением давления с высотой пренебречь.

10. Известно, что скорость истечения воды из небольшого отверстия в дне сосуда достаточно точно может быть вычислена по формуле $0{,}6\sqrt{2gH}$, где g — ускорение силы тяжести, а H — высота уровня воды над отверстием.

Цилиндрический бак поставлен вертикально и имеет отверстие в дне. Половина воды из полного бака вытекает за 5 мин. За какое время вытечет вся вода?

11. Какую форму должен иметь сосуд, являющийся телом вращения, чтобы при истечении из него воды уровень воды понижался равномерно? (Исходные данные см. в задаче 10.)

12. В рабочее помещение вместимостью 10^4 м^3 через вентиляторы в 1 минуту подается 10^3 м^3 свежего воздуха, содержащего 0,04 % CO_2, и одновременно такое же количество смеси выводится из помещения. В 9 часов утра в помещение входят служащие, и через полчаса содержание CO_2 в воздухе повышается до 0,12 %. Оцените содержание углекислого газа в помещении к 2 часам дня.

ГЛАВА VI

ИНТЕГРАЛ

§ 1. Определение интеграла и описание множества интегрируемых функций

1. Задача и наводящие соображения. Пусть точка движется вдоль числовой оси, $s(t)$ — ее координата в момент t, а $v(t) = s'(t)$ — ее скорость в тот же момент t. Предположим, что мы знаем положение $s(t_0)$ точки в момент t_0 и к нам поступают данные о ее скорости. Располагая ими, мы хотим вычислить $s(t)$ для любого фиксированного значения $t > t_0$.

Если считать скорость $v(t)$ меняющейся непрерывно, то смещение точки за малый промежуток времени приближенно можно вычислить как произведение $v(\tau)\Delta t$ скорости в произвольный момент τ, относящийся к этому промежутку времени, на величину Δt самого промежутка. Учитывая это замечание, разобьем отрезок $[t_0, t]$, отметив некоторые моменты t_i $(i = 0, \ldots, n)$, так, что $t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$, и так, что промежутки $[t_{i-1}, t_i]$ малы. Пусть $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ и $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, тогда имеем приближенное равенство

$$s(t) - s(t_0) \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i.$$

По нашим представлениям, это приближенное равенство будет уточняться, если переходить к разбиениям отрезка $[t_0, t]$ на всё более мелкие промежутки. Таким образом, надо полагать, что в пределе, когда величина λ наибольшего из промежутков разбиения стремится к нулю, получим точное равенство

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i = s(t) - s(t_0). \qquad (1)$$

Это равенство есть не что иное, как фундаментальная для всего анализа формула Ньютона – Лейбница. Она позволяет, с одной стороны, численно находить первообразную $s(t)$ по ее производной $v(t)$, а с другой стороны, по найденной каким-либо способом первообразной $s(t)$ функции $v(t)$ найти стоящий слева предел сумм $\sum\limits_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$.

Такие суммы, называемые *интегральными суммами*, встречаются в самых разнообразных случаях.

Попробуем, например, следуя Архимеду, найти площадь под параболой $y = x^2$ над отрезком $[0, 1]$ (рис. 47). Не останавливаясь здесь на подробном обсуждении понятия площади фигуры, о котором речь будет идти несколько позже, мы, как и Архимед, будем действовать методом исчерпания фигуры посредством простейших фигур — прямоугольников, площади которых мы вычислять умеем. Разбив отрезок $[0, 1]$ точками $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ на мелкие отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, мы, очевидно, можем приближенно вычислить искомую площадь σ как сумму площадей изображенных на рисунке прямоугольников:

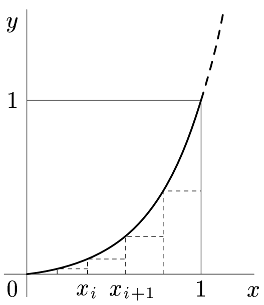


Рис. 47.

$$\sigma \approx \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 \Delta x_i;$$

здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Полагая $f(x) = x^2$ и $\xi_i = x_{i-1}$, мы перепишем полученную формулу в виде

$$\sigma \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

В этих обозначениях в пределе будем иметь

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sigma, \qquad (2)$$

где, как и выше, λ — длина наибольшего из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения.

Формула (2) только обозначениями отличается от формулы (1). Забыв на миг о геометрическом смысле $f(\xi_i)$, Δx_i и считая x временем, а $f(x)$ скоростью, найдем первообразную $F(x)$ функции $f(x)$ и тогда по формуле (1) получим, что $\sigma = F(1) - F(0)$.

В нашем случае $f(x) = x^2$, поэтому $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ и $\sigma = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}$. Это и есть результат Архимеда, который он получил прямым вычислением предела в (2).

Предел интегральных сумм называется *интегралом.* Таким образом, формула (1) Ньютона – Лейбница связывает интеграл и первообразную.

Перейдем теперь к точным формулировкам и проверке того, что на эвристическом уровне было получено выше из общих соображений.

2. Определение интеграла Римана

a. Разбиения

Определение 1. *Разбиением* P отрезка $[a, b]$, $a < b$, называется такая конечная система точек $x_0, \ldots, x_n$ этого отрезка, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ называются *отрезками разбиения* P.

Максимум $\lambda(P)$ из длин отрезков разбиения называется *параметром разбиения* P.

Определение 2. Говорят, что имеется *разбиение* (P, ξ) *с отмеченными точками* отрезка $[a, b]$, если имеется разбиение P отрезка $[a, b]$ и в каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения P выбрано по точке $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Набор $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ обозначается одним символом ξ.

b. База в множестве разбиений. В множестве $\mathcal{P}$ разбиений с отмеченными точками данного отрезка $[a, b]$ рассмотрим следующую базу $\mathcal{B} = \{B_d\}$. Элемент B_d, $d > 0$, базы $\mathcal{B}$ есть совокупность всех тех разбиений (P, ξ) с отмеченными точками отрезка $[a, b]$, для которых $\lambda(P) < d$.

Проверим, что $\{B_d\}$, $d > 0$, — действительно база в $\mathcal{P}$.

Во-первых, $B_d \neq \varnothing$. В самом деле, каким бы ни было число $d > 0$, очевидно, существует разбиение P отрезка $[a, b]$ с параметром $\lambda(P) < d$ (например, разбиение на n конгруэнтных отрезков). Но тогда существует и разбиение (P, ξ) с отмеченными точками, для которого $\lambda(P) < d$.

Во-вторых, если $d_1 > 0$, $d_2 > 0$ и $d = \min\{d_1, d_2\}$, то, очевидно, $B_{d_1} \cap B_{d_2} = B_d \in \mathcal{B}$.

Итак, $\mathcal{B} = \{B_d\}$ — действительно база в $\mathcal{P}$.

c. Интегральная сумма

Определение 3. Если функция f определена на отрезке $[a, b]$, а (P, ξ) — разбиение с отмеченными точками этого отрезка, то сумма

$$\sigma(f; P, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{3}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется *интегральной суммой* функции f, соответствующей разбиению (P, ξ) с отмеченными точками отрезка $[a, b]$.

Таким образом, при фиксированной функции f интегральная сумма $\sigma(f; P, \xi)$ оказывается функцией $\Phi(p) = \sigma(f; p)$ на множестве $\mathcal{P}$ разбиений $p = (P, \xi)$ с отмеченными точками отрезка $[a, b]$.

Поскольку в $\mathcal{P}$ имеется база $\mathcal{B}$, то можно ставить вопрос о пределе функции $\Phi(p)$ по этой базе.

d. Интеграл Римана. Пусть f — функция, заданная на отрезке $[a, b]$.

Определение 4. Говорят, что число I является *интегралом Римана* от функции f на отрезке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения (P, ξ) с отмеченными точками отрезка $[a, b]$, параметр которого $\lambda(P) < \delta$, имеет место соотношение

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right| < \varepsilon.$$

Поскольку разбиения $p = (P, \xi)$, для которых $\lambda(P) < \delta$, составляют элемент B_δ введенной выше базы $\mathcal{B}$ в множестве $\mathcal{P}$ разбиений с отмеченными точками, то определение 4 равносильно тому, что

$$I = \lim_{\mathcal{B}} \Phi(p),$$

т. е. интеграл I есть предел по базе $\mathcal{B}$ значений интегральных сумм функции f, отвечающих разбиению с отмеченными точками отрезка $[a, b]$.

Базу $\mathcal{B}$ естественно обозначить символом $\lambda(P) \to 0$, и тогда определение интеграла можно переписать в виде

$$I = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{4}$$

Интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ обозначается символом

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

в котором числа a, b называются *нижним* и *верхним пределом интегрирования* соответственно; f — *подынтегральная функция*, $f(x)dx$ — *подынтегральное выражение*, x — *переменная интегрирования*.

Итак,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.} \tag{5}$$

Определение 5. Функция f называется *интегрируемой по Риману* на отрезке $[a, b]$, если для нее существует указанный в (5) предел интегральных сумм при $\lambda(P) \to 0$ (т. е. если для нее определен интеграл Римана).

Множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$, будет обозначаться через $\mathcal{R}[a, b]$.

Поскольку пока мы не будем рассматривать другого интеграла, кроме интеграла Римана, условимся для краткости вместо терминов «интеграл Римана» и «функция, интегрируемая по Риману» говорить соответственно «интеграл» и «интегрируемая функция».

3. Множество интегрируемых функций. В силу определения интеграла (определение 4) и его переформулировок в виде (4) и (5), интеграл есть предел некоторой специальной функции $\Phi(p) = \sigma(f; P, \xi)$ — интегральной суммы, определенной на множестве $\mathcal{P}$ разбиений $p = (P, \xi)$ с отмеченными точками отрезка $[a, b]$. Предел этот берется по базе $\mathcal{B}$ в $\mathcal{P}$, которую мы обозначили как $\lambda(P) \to 0$.

Таким образом, интегрируемость функции f на $[a, b]$ зависит от наличия указанного предела.

В силу критерия Коши этот предел существует тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется элемент $B_\delta \in \mathcal{B}$ базы, в любых точках p', p'' которого выполнено соотношение

$$|\Phi(p') - \Phi(p'')| < \varepsilon.$$

В более подробной записи сказанное означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых разбиений (P', ξ'), (P'', ξ'') с отмеченными точками отрезка $[a, b]$, для которых $\lambda(P') < \delta$ и $\lambda(P'') < \delta$, выполнено неравенство

$$|\sigma(f; P', \xi') - \sigma(f; P'', \xi'')| < \varepsilon$$

или, что то же самое, неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{n'} f(\xi_i')\Delta x_i' - \sum_{i=1}^{n''} f(\xi_i'')\Delta x_i''\right| < \varepsilon. \tag{6}$$

Мы воспользуемся сформулированным критерием Коши для того, чтобы получить сначала простое необходимое, а затем и достаточное условие интегрируемости функции по Риману.

a. Необходимое условие интегрируемости

Утверждение 1. *Для того чтобы функция f, определенная на отрезке $[a, b]$, была интегрируема на нем по Риману, необходимо, чтобы она была ограничена на этом отрезке.*

Короче,

$$(f \in \mathcal{R}[a, b]) \Rightarrow (f \text{ ограничена на } [a, b]).$$

◀ Если f не ограничена на $[a, b]$, то при любом разбиении P отрезка $[a, b]$ функция f окажется неограниченной по крайней мере на одном из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения P. Это означает, что, выбирая различным образом точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, можно сделать величину $|f(\xi_i)\Delta x_i|$ сколь угодно большой. Но тогда и интегральную сумму $\sigma(f; P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ можно сделать по модулю сколь угодно большой за счет изменений только точки ξ_i в этом отрезке.

Ясно, что в таком случае не может быть и речи о конечном пределе интегральных сумм, что, впрочем, видно и из критерия Коши, ибо соотношение (6) в этом случае, очевидно, не имеет места даже для сколь угодно мелких разбиений. ►

Как мы увидим, полученное необходимое условие еще очень далеко от необходимого и достаточного условия интегрируемости, однако оно уже позволяет нам в дальнейшем исследовать только ограниченные функции.

b. Достаточное условие интегрируемости и важнейшие классы интегрируемых функций. Начнем с нескольких обозначений и замечаний, которые используются в дальнейшем изложении.

Условимся, когда задано разбиение P

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

отрезка $[a, b]$, наряду с символом Δx_i, обозначающим разность $x_i - x_{i-1}$, употреблять символ Δ_i для обозначения отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.

Если разбиение $\widetilde{P}$ отрезка $[a, b]$ получено из разбиения P только добавлением к P некоторых новых точек, то условимся называть разбиение $\widetilde{P}$ *продолжением* разбиения P.

При построении продолжения $\widetilde{P}$ разбиения P некоторые (быть может, и все) отрезки $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ разбиения P сами подвергаются разбиению $x_{i-1} = x_{i0} < \ldots < x_{in_i} = x_i$. В связи с этим нам будет удобно нумеровать точки разбиения $\widetilde{P}$ двумя индексами. В записи x_{ij} первый индекс означает, что $x_{ij} \in \Delta_i$, а второй индекс есть порядковый номер точки на отрезке Δ_i. Теперь естественно положить $\Delta x_{ij} := x_{ij} - x_{ij-1}$ и $\Delta_{ij} := [x_{ij-1}, x_{ij}]$. Таким образом, $\Delta x_i = \Delta x_{i1} + \ldots + \Delta x_{in_i}$.

Примером разбиения, являющегося продолжением как разбиения P', так и разбиения P'', может служить разбиение $\widetilde{P} = P' \cup P''$, полученное объединением точек разбиений P' и P''.

Напомним, наконец, что, как и прежде, символ $\omega(f; E)$ будет обозначать колебание функции f на множестве E, т. е.

$$\omega(f; E) := \sup_{x', x'' \in E} |f(x') - f(x'')|.$$

В частности, $\omega(f; \Delta_i)$ есть колебание функции f на отрезке Δ_i. Это колебание заведомо конечно, если f — ограниченная функция.

Теперь сформулируем и докажем следующее

Утверждение 2. *Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция f была интегрируема на нем, достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ нашлось число $\delta > 0$ такое, что при любом разбиении P отрезка $[a,b]$ с параметром $\lambda(P) < \delta$ выполнялось соотношение*

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f;\Delta_i)\Delta x_i < \varepsilon.$$

◀ Пусть P — разбиение отрезка $[a,b]$ и $\widetilde{P}$ — продолжение разбиения P. Оценим разность интегральных сумм $\sigma(f;\widetilde{P},\tilde{\xi}) - \sigma(f;P,\xi)$. Используя введенные выше обозначения, можем написать

$$\left|\sigma(f;\widetilde{P},\tilde{\xi}) - \sigma(f;P,\xi)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i} f(\xi_{ij})\Delta x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i} f(\xi_{ij})\Delta x_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i} f(\xi_i)\Delta x_{ij}\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i} \left(f(\xi_{ij}) - f(\xi_i)\right)\Delta x_{ij}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i} \left|f(\xi_{ij}) - f(\xi_i)\right|\Delta x_{ij} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i} \omega(f;\Delta_i)\Delta x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \omega(f;\Delta_i)\Delta x_i.$$

В этих выкладках мы использовали то, что $\Delta x_i = \sum\limits_{j=1}^{n_i} \Delta x_{ij}$, а также то, что $|f(\xi_{ij}) - f(\xi_i)| \leqslant \omega(f;\Delta_i)$, поскольку $\xi_{ij} \in \Delta_{ij} \subset \Delta_i$ и $\xi_i \in \Delta_i$.

Из полученной оценки разности интегральных сумм следует, что если функция f удовлетворяет достаточному условию, сформулированному в утверждении 2, то по любому числу $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что для любого разбиения P отрезка $[a,b]$ с параметром $\lambda(P) < \delta$ и его продолжения $\widetilde{P}$ при любом выборе отмеченных точек ξ и $\tilde{\xi}$ будем иметь

$$\left|\sigma(f;\widetilde{P},\tilde{\xi}) - \sigma(f;P,\xi)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если теперь (P', ξ') и (P'', ξ'') — произвольные разбиения с отмеченными точками отрезка $[a, b]$, параметры которых удовлетворяют условиям $\lambda(P') < \delta$, $\lambda(P'') < \delta$, то, рассмотрев разбиение $\widetilde{P} = P' \cup P''$, являющееся продолжением обоих разбиений P', P'', по доказанному будем иметь

$$\left|\sigma(f; \widetilde{P}, \tilde{\xi}) - \sigma(f; P', \xi')\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\sigma(f; \widetilde{P}, \tilde{\xi}) - \sigma(f; P'', \xi'')\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\left|\sigma(f; P', \xi') - \sigma(f; P'', \xi'')\right| < \varepsilon,$$

как только $\lambda(P') < \delta$, $\lambda(P'') < \delta$. Таким образом, в силу критерия Коши существует предел

$$\lim_{\lambda(P) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

интегральных сумм, т. е. $f \in \mathcal{R}[a, b]$. ►

Следствие 1. $(f \in C[a, b]) \Rightarrow (f \in \mathcal{R}[a, b])$, *т. е. любая непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.*

◄ Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на нем, так что необходимое условие интегрируемости в этом случае, очевидно, выполнено. Однако непрерывная на отрезке функция еще и равномерно непрерывна на нем, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что на любом отрезке $\Delta \subset [a, b]$ длины меньше δ будем иметь $\omega(f; \Delta) < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда для любого разбиения P с параметром $\lambda(P) < \delta$ будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

В силу утверждения 2 теперь можно заключить, что $f \in \mathcal{R}[a, b]$. ►

Следствие 2. *Если ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция f непрерывна на этом отрезке всюду, кроме, быть может, конечного множества точек, то $f \in \mathcal{R}[a, b]$.*

◄ Пусть $\omega(f; [a, b]) \leqslant C < \infty$ и f имеет k точек разрыва на отрезке $[a, b]$. Проверим выполнимость достаточного условия интегрируемости функции f.

При заданном $\varepsilon > 0$ возьмем число $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{8C \cdot k}$ и построим δ_1-окрестности каждой из k точек разрыва функции f на $[a, b]$. Дополнительное к объединению этих окрестностей множество точек отрезка $[a, b]$ состоит из конечного числа отрезков, на каждом из которых f непрерывна и, значит, равномерно непрерывна. Поскольку таких отрезков конечное число, по $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta_2 > 0$ так, что на любом отрезке Δ, длина которого меньше δ_2 и который полностью содержится в одном из указанных выше отрезков непрерывности f, будем иметь $\omega(f; \Delta) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Возьмем теперь число $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Пусть P — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$, для которого $\lambda(P) < \delta$. Сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i$, отвечающую разбиению P, разобьем на две части:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i = {\sum}' \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i + {\sum}'' \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i.$$

В сумму ${\sum}'$ включим те слагаемые, которые отвечают отрезкам Δ_i разбиения P, не имеющим общих точек с построенными δ_1-окрестностями точек разрыва. Для таких отрезков Δ_i имеем $\omega(f; \Delta_i) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, поэтому

$${\sum}' \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} {\sum}' \Delta x_i \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сумма длин оставшихся отрезков разбиения P, как легко видеть, меньше $(\delta + 2\delta_1 + \delta)k \leqslant 4\frac{\varepsilon}{8C \cdot k} \cdot k = \frac{\varepsilon}{2C}$, поэтому

$${\sum}'' \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i \leqslant C {\sum}'' \Delta x_i < C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, мы получаем, что при $\lambda(P) < \delta$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i < \varepsilon,$$

т. е. выполнено достаточное условие интегрируемости и $f \in \mathcal{R}[a, b]$. ►

Следствие 3. *Монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.*

◀ Из монотонности функции f на отрезке $[a, b]$ следует, что $\omega(f; [a, b]) = |f(b) - f(a)|$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{|f(b) - f(a)|}$. Мы считаем, что $f(b) - f(a) \neq 0$, поскольку в противном случае f постоянна и интегрируемость f не вызывает сомнений. Пусть P — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ с параметром $\lambda(P) < \delta$.

Тогда для него с учетом монотонности f имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i < \delta \sum_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i) = \delta \sum_{i=1}^{n} \bigl|f(x_i) - f(x_{i-1})\bigr| =$$
$$= \delta \left| \sum_{i=1}^{n} \bigl(f(x_i) - f(x_{i-1})\bigr) \right| = \delta |f(b) - f(a)| = \varepsilon.$$

Таким образом, f удовлетворяет достаточному условию интегрируемости, т. е. $f \in \mathcal{R}[a, b]$. ▶

Монотонная функция может иметь уже бесконечно много точек разрыва на отрезке (счетное множество). Например, функция, определяемая соотношениями

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2^n} & \text{при} \quad 1 - \frac{1}{2^n} \leqslant x < 1 - \frac{1}{2^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 1 & \text{при} \quad x = 1 \end{cases}$$

на отрезке $[0, 1]$, не убывает и в каждой точке вида $1 - \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, имеет разрыв.

Замечание. Отметим, что хотя мы сейчас имеем дело с вещественными функциями на отрезке, однако ни в определении интеграла, ни в доказанных выше утверждениях, за исключением следствия 3, мы по существу не использовали то, что рассматриваемые функции вещественнозначные, а не комплексно- или, например, векторнозначные функции точки отрезка $[a, b]$.

Понятия верхней и нижней интегральной суммы, к которым мы переходим, напротив, специфичны только для функций с действительными значениями.

Определение 6. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — действительнозначная функция, определенная и ограниченная на отрезке $[a, b]$; P — разбиение отрезка $[a, b]$; Δ_i $(i = 1, \ldots, n)$ — отрезки разбиения P. Пусть $m_i = \inf\limits_{x \in \Delta_i} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x \in \Delta_i} f(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Суммы

$$s(f;P) := \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

и

$$S(f;P) := \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

называются соответственно *нижней* и *верхней интегральной суммой* функции f на отрезке $[a,b]$, соответствующей разбиению P этого отрезка[1)]. Суммы $s(f;P)$ и $S(f;P)$ называют также *нижней* и *верхней суммой Дарбу*, соответствующей разбиению P отрезка $[a,b]$.

Если (P,ξ) — произвольное разбиение с отмеченными точками отрезка $[a,b]$, то, очевидно,

$$s(f;P) \leqslant \sigma(f;P,\xi) \leqslant S(f;P). \tag{7}$$

Лемма 1.

$$s(f;P) = \inf_{\xi} \sigma(f;P,\xi),$$
$$S(f;P) = \sup_{\xi} \sigma(f;P,\xi).$$

◀ Проверим, например, что верхняя сумма Дарбу, отвечающая разбиению P отрезка $[a,b]$, является верхней гранью значений интегральных сумм, соответствующих разбиению с отмеченными точками (P,ξ) отрезка $[a,b]$, причем верхняя грань берется по всевозможным наборам $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ отмеченных точек.

Ввиду (7), для доказательства достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ нашелся такой набор $\bar{\xi}$ отмеченных точек, что имеет место неравенство

$$S(f;P) < \sigma(f;P,\bar{\xi}) + \varepsilon. \tag{8}$$

По определению чисел M_i, при каждом $i \in \{1, \ldots, n\}$ найдется точка $\bar{\xi}_i \in \Delta_i$, в которой $M_i < f(\bar{\xi}_i) + \frac{\varepsilon}{b-a}$. Пусть $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_n)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} \left(f(\bar{\xi}_i) + \frac{\varepsilon}{b-a} \right) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{\xi}_i) \Delta x_i + \varepsilon,$$

[1)] Термин «интегральная сумма» здесь формально не вполне законен, так как не всегда m_i и M_i являются значениями функции f в некоторой точке $\xi_i \in \Delta_i$.

что и завершает доказательство второго утверждения леммы. Первое утверждение проверяется аналогично. ►

Из доказанной леммы и неравенства (7) с учетом определения интеграла Римана заключаем, что справедливо следующее

Утверждение 3. *Ограниченная вещественнозначная функция* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *интегрируема по Риману на отрезке* $[a, b]$ *тогда и только тогда, когда существуют и равны между собой пределы*

$$\underline{I} = \lim_{\lambda(P)\to 0} s(f; P), \qquad \overline{I} = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f; P). \tag{9}$$

При этом их общее значение $I = \underline{I} = \overline{I}$ *совпадает с интегралом*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

◄ Действительно, если пределы (9) существуют и равны между собой, то по свойствам предела из (7) заключаем о существовании предела интегральных сумм, причем

$$\underline{I} = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f; P, \xi) = \overline{I}.$$

С другой стороны, если $f \in \mathcal{R}[a, b]$, т. е. существует предел

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f; P, \xi) = I,$$

то из (7) и (8) заключаем, что существует предел $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} S(f; P) = \overline{I}$, причем $\overline{I} = I$.

Аналогично проверяется, что $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} s(f; P) = \underline{I} = I$. ►

В качестве следствия утверждения 3 получаем следующее уточнение утверждения 2.

Утверждение 2′. *Для того чтобы функция* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, заданная на отрезке* $[a, b]$*, была интегрируема по Риману, необходимо и достаточно выполнение соотношения*

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i = 0. \tag{10}$$

◀ Учитывая утверждение 2, нам остается лишь убедиться в необходимости соотношения (10) для интегрируемости f.

Заметим, что $\omega(f;\Delta_i) = M_i - m_i$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f;\Delta_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = S(f;P) - s(f;P),$$

и теперь (10) следует из утверждения 3, коль скоро $f \in \mathcal{R}[a,b]$. ▶

c. Векторное пространство $\boldsymbol{\mathcal{R}[a,b]}$. Над интегрируемыми функциями можно выполнять ряд операций, не выходя за пределы множества $\mathcal{R}[a,b]$.

Утверждение 4. *Если* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, *то*

a) $(f+g) \in \mathcal{R}[a,b]$;

b) $(\alpha f) \in \mathcal{R}[a,b]$, *где* α — *числовой множитель*;

c) $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$;

d) $f|_{[c,d]} \in \mathcal{R}[c,d]$, *если* $[c,d] \subset [a,b]$;

e) $(f \cdot g) \in \mathcal{R}[a,b]$.

Мы сейчас рассматриваем только вещественнозначные функции, но полезно отметить, что свойства a), b), c), d) окажутся справедливыми и для комплекснозначных и векторнозначных функций. Для векторнозначных функций, вообще говоря, не определено произведение $f \cdot g$, поэтому свойство e) для них не рассматривается. Однако это свойство остается в силе для функций с комплексными значениями.

Перейдем теперь к доказательству утверждения 4.

◀ a) Это утверждение очевидно, поскольку

$$\sum_{i=1}^{n}(f+g)(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i.$$

b) Это утверждение очевидно, поскольку

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha f)(\xi_i)\Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

c) Поскольку $\omega(|f|;E) \leqslant \omega(f;E)$, то можно написать, что

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(|f|;\Delta_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega(f;\Delta_i)\Delta x_i,$$

и на основании утверждения 2 заключить, что $(f \in \mathcal{R}[a,b]) \Rightarrow (|f| \in \in \mathcal{R}[a,b])$.

d) Мы хотим проверить, что ограничение $f|_{[c,d]}$ интегрируемой на отрезке $[a,b]$ функции на любой отрезок $[c,d] \subset [a,b]$ является функцией, интегрируемой на $[c,d]$. Пусть π — разбиение отрезка $[c,d]$. Добавив к π некоторые точки, достроим π до разбиения P отрезка $[a,b]$, но так, чтобы иметь $\lambda(P) \leqslant \lambda(\pi)$. Ясно, что это всегда можно сделать.

Теперь можно написать, что

$$\sum\nolimits_{\pi} \omega\big(f|_{[c,d]}; \Delta_i\big)\Delta x_i \leqslant \sum\nolimits_{P} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i,$$

где $\sum_{\pi}$ — сумма по всем отрезкам разбиения π, а $\sum_P$ — сумма по всем отрезкам разбиения P.

При $\lambda(\pi) \to 0$ по построению также $\lambda(P) \to 0$, и на основании утверждения $2'$ из полученного неравенства заключаем, что $(f \in \mathcal{R}[a,b]) \Rightarrow \Rightarrow (|f| \in \mathcal{R}[c,d])$, если $[c,d] \subset [a,b]$.

e) Проверим сначала, что если $f \in \mathcal{R}[a,b]$, то $f^2 \in \mathcal{R}[a,b]$.

Если $f \in \mathcal{R}[a,b]$, то f ограничена на $[a,b]$. Пусть $|f(x)| \leqslant C < \infty$ на $[a,b]$. Тогда

$$|f^2(x_1) - f^2(x_2)| = |(f(x_1) + f(x_2)) \cdot (f(x_1) - f(x_2))| \leqslant 2C|f(x_1) - f(x_2)|,$$

поэтому $\omega(f^2; E) \leqslant 2C\omega(f; E)$, если $E \subset [a,b]$. Значит,

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f^2; \Delta_i)\Delta x_i \leqslant 2C \sum_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i,$$

откуда на основании утверждения $2'$ заключаем, что

$$(f \in \mathcal{R}[a,b]) \Rightarrow \big(f^2 \in \mathcal{R}[a,b]\big)\,.$$

Теперь перейдем к общему случаю. Запишем тождество

$$(f \cdot g)(x) = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2(x) - (f-g)^2(x)\right].$$

Из этого тождества с учетом только что доказанного утверждения и проверенных пунктов a) и b) утверждения 4 заключаем, что

$$(f \in \mathcal{R}[a,b]) \wedge (g \in \mathcal{R}[a,b]) \Rightarrow (f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b])\,. \quad \blacktriangleright$$

Из курса алгебры вам уже известно понятие векторного пространства. Вещественнозначные функции, определенные на некотором множестве, можно поточечно складывать и умножать на действительное число, получая при этом снова функцию с вещественными значениями на том же множестве. Если функции рассматривать как векторы, то можно проверить, что при этом выполнены все аксиомы векторного пространства над полем действительных чисел и указанное множество действительных функций является векторным пространством относительно операций поточечного сложения функций и умножения функций на действительные числа.

В пунктах a), b) утверждения 4 сказано, что сложение интегрируемых функций и умножение интегрируемой функции на число не выводит за пределы множества $\mathcal{R}[a,b]$ интегрируемых функций. Таким образом, $\mathcal{R}[a,b]$ само является векторным пространством — подпространством векторного пространства вещественнозначных функций, определенных на отрезке $[a,b]$.

d. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману. В заключение приведем пока без доказательства теорему Лебега, дающую внутреннее описание интегрируемой по Риману функции.

Для этого введем следующее полезное само по себе понятие.

Определение 7. Говорят, что множество $E \subset \mathbb{R}$ имеет *меру нуль* или является *множеством меры нуль* (в смысле Лебега), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое покрытие множества E не более чем счетной системой $\{I_k\}$ интервалов, сумма $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |I_k|$ длин которых не превышает ε.

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |I_k|$ сходится абсолютно, порядок суммирования длин промежутков покрытия не влияет на сумму (см. утверждение 4 из гл. V, § 5, п. 2), поэтому данное определение корректно.

Лемма 2. a) *Точка и конечное число точек суть множества меры нуль.*

b) *Объединение конечного или счетного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль.*

c) *Подмножество множества меры нуль само есть множество меры нуль.*

d) *Отрезок $[a,b]$ при $a < b$ не является множеством меры нуль.*

◀ a) Точку можно покрыть одним интервалом длины меньшей, чем любое наперед заданное число $\varepsilon > 0$, поэтому точка является множеством меры нуль. В остальном a) вытекает из b).

b) Пусть $E = \bigcup\limits_n E^n$ — не более чем счетное объединение множеств E^n меры нуль. По $\varepsilon > 0$ для каждого E^n строим покрытие $\{I_k^n\}$ множества E^n такое, что $\sum\limits_k |I_k^n| < \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Поскольку объединение не более чем счетного числа не более чем счетных множеств само не более чем счетно, промежутки I_k^n, $k, n \in \mathbb{N}$, образуют не более чем счетное покрытие множества E, причем

$$\sum_{n,k} |I_k^n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^n} + \ldots = \varepsilon.$$

Порядок суммирования $\sum\limits_{n,k} |I_k^n|$ по индексам n и k безразличен, ибо ряд сходится к одной и той же сумме при любом порядке суммирования, если он сходится для какого-то порядка суммирования. Последнее в нашем случае имеет место, ибо любые частичные суммы нашего ряда ограничены сверху числом ε.

Итак, E есть множество меры нуль в смысле Лебега.

c) Это утверждение, очевидно, непосредственно следует из определения множества меры нуль и определения покрытия.

d) Поскольку из любого покрытия отрезка интервалами можно выделить конечное покрытие, сумма длин промежутков которого, очевидно, не превосходит суммы длин промежутков исходного покрытия, то нам достаточно проверить, что сумма длин интервалов, образующих конечное покрытие отрезка $[a, b]$, не меньше длины $b - a$ этого отрезка.

Проведем индукцию по количеству интервалов покрытия.

При $n = 1$, т. е. когда отрезок $[a, b]$ содержится в одном интервале (α, β), очевидно, имеем $\alpha < a < b < \beta$ и $\beta - \alpha > b - a$.

Пусть утверждение доказано до индекса $k \in \mathbb{N}$ включительно. Рассмотрим покрытие, состоящее из $k+1$ интервалов. Возьмем интервал (α_1, α_2), покрывающий точку a. Если $\alpha_2 \geqslant b$, то $\alpha_2 - \alpha_1 > b - a$ и все доказано. Если же $a < \alpha_2 < b$, то отрезок $[\alpha_2, b]$ покрыт системой, состоящей уже не более чем из k интервалов, сумма длин которых по предположению индукции не меньше чем $b - \alpha_2$. Но

$$b - a = (b - \alpha_2) + (\alpha_2 - a) < (b - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_1)$$

и, таким образом, сумма длин интервалов исходного покрытия отрезка $[a, b]$ больше, чем его длина $b - a$. ►

Интересно отметить, что в силу пунктов a) и b) леммы 2 множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных точек числовой прямой $\mathbb{R}$ является множеством меры нуль, что на первый взгляд выглядит несколько неожиданным при сопоставлении с пунктом d) той же леммы.

Определение 8. Если некоторое свойство выполнено в любой точке множества X, кроме, быть может, точек множества меры нуль, то говорят, что это свойство имеет место *почти всюду* на множестве X или *почти во всех точках* множества X.

Теперь сформулируем критерий Лебега.

Теорема. *Функция, определенная на отрезке, интегрируема по Риману на этом отрезке в том и только в том случае, когда она ограничена на этом отрезке и непрерывна почти во всех его точках.*

Итак,

$$(f \in \mathcal{R}[a, b]) \Leftrightarrow (f \text{ ограничена на } [a, b]) \wedge \\ \wedge (f \text{ непрерывна почти всюду на } [a, b]) .$$

Из критерия Лебега и свойств множеств меры нуль, изложенных в лемме 2, очевидно, легко можно получить как следствия 1, 2, 3 утверждения 2, так и утверждение 4.

Мы не станем сейчас доказывать критерий Лебега, поскольку при работе с достаточно регулярными функциями, с которыми нам предстоит иметь дело, он нам пока не нужен. Однако идейную сторону критерия Лебега вполне можно объяснить уже сейчас.

Утверждение $2'$ содержало критерий интегрируемости, выраженный соотношением (10). Сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i$ может быть мала, прежде всего, за счет множителей $\omega(f; \Delta_i)$, которые малы в малых окрестностях точек непрерывности функции. Если же некоторые из отрезков Δx_i содержат точки разрыва функции, то для них $\omega(f; \Delta_i)$ не стремится к нулю, сколь мелким бы ни было разбиение P отрезка $[a, b]$. Однако $\omega(f; \Delta_i) \leqslant \omega(f; [a, b]) < \infty$ в силу ограниченности f на $[a, b]$, поэтому сумма тех слагаемых, которые содержат точки разрыва, тоже может оказаться маленькой, если только мала сумма длин отрезков разбиения, покрывающих множество точек разрыва, или, точнее, если рост колебания функции на некоторых отрезках разбиения компенсируется малостью длин этих отрезков.

Точной реализацией и формулировкой этого наблюдения и является критерий Лебега.

Приведем теперь два классических примера, поясняющих свойство функции быть интегрируемой по Риману.

Пример 1. Функция Дирихле

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{при } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

рассматриваемая на отрезке $[0,1]$, не интегрируема на нем, поскольку для любого разбиения P отрезка $[0,1]$ в каждом отрезке Δ_i разбиения P можно отметить как рациональную точку ξ_i', так и иррациональную точку ξ_i''. Тогда

$$\sigma(f; P, \xi') = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = 1,$$

в то время как

$$\sigma(f; P, \xi'') = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Таким образом, интегральные суммы функции $\mathcal{D}(x)$ не могут иметь предел при $\lambda(P) \to 0$.

С точки зрения критерия Лебега неинтегрируемость функции Дирихле тоже очевидна, поскольку функция $\mathcal{D}(x)$ разрывна в каждой точке отрезка $[0,1]$, который, как было показано в лемме 2, не есть множество меры нуль.

Пример 2. Рассмотрим функцию Римана

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \text{ и } x = \frac{m}{n} \text{ — несократимая дробь}, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Мы уже рассматривали эту функцию в гл. IV, § 2, п. 2, и знаем, что функция $\mathcal{R}(x)$ непрерывна во всех иррациональных точках и разрывна во всех рациональных точках. Таким образом, множество точек разрыва функции $\mathcal{R}(x)$ счетно и потому имеет меру нуль. В силу критерия Лебега можно заключить, что функция $\mathcal{R}(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$, несмотря на то, что точки разрыва этой функции попадают в любой отрезок любого разбиения отрезка интегрирования.

Пример 3. Рассмотрим теперь еще один, менее классический вопрос и пример.

Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — интегрируемая на $[a,b]$ функция, принимающая значения на отрезке $[c,d]$, на котором непрерывна функция $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$. Тогда композиция $g \circ f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, очевидно, определена и непрерывна во всех точках отрезка $[a,b]$, в которых непрерывна функция f. В силу критерия Лебега отсюда следует, что $(g \circ f) \in \mathcal{R}[a,b]$.

Покажем теперь на примере, что композиция произвольных интегрируемых функций — уже не всегда интегрируемая функция.

Рассмотрим функцию $g(x) = |\operatorname{sgn}|(x)$. Эта функция равна единице при $x \neq 0$ и нулю при $x = 0$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что если, например, на отрезке $[1,2]$ рассмотреть в качестве f функцию Римана $\mathcal{R}(x)$, то на этом отрезке композиция $(g \circ f)(x)$ есть не что иное, как функция Дирихле $\mathcal{D}(x)$. Таким образом, наличие даже одной точки разрыва у $g(x)$ привело к неинтегрируемости композиции $g \circ f$.

Задачи и упражнения

1. *Теорема Дарбу.*

a) Пусть $s(f;P)$ и $S(f;P)$ — нижняя и верхняя суммы Дарбу вещественнозначной функции f, определенной и ограниченной на отрезке $[a,b]$, отвечающие разбиению P этого отрезка. Покажите, что для любых двух разбиений P_1, P_2 отрезка $[a,b]$ справедливо неравенство

$$s(f;P_1) \leqslant S(f;P_2).$$

b) Пусть разбиение $\widetilde{P}$ является продолжением разбиения P отрезка $[a,b]$ и пусть $\Delta_{i_1}, \ldots, \Delta_{i_k}$ — те отрезки разбиения P, которые содержат точки разбиения $\widetilde{P}$, не входящие в разбиение P. Покажите, что справедливы оценки

$$0 \leqslant S(f;P) - S(f;\widetilde{P}) \leqslant \omega(f;[a,b]) \cdot (\Delta x_{i_1} + \ldots + \Delta x_{i_k}),$$
$$0 \leqslant s(f;\widetilde{P}) - s(f;P) \leqslant \omega(f;[a,b]) \cdot (\Delta x_{i_1} + \ldots + \Delta x_{i_k}).$$

c) Величины $\underline{I} = \sup\limits_{P} s(f;P)$, $\overline{I} = \inf\limits_{P} S(f;P)$ называются соответственно *нижним* и *верхним интегралом Дарбу* функции f на отрезке $[a,b]$. Покажите, что $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.

d) Докажите теорему Дарбу:

$$\underline{I} = \lim_{\lambda(P)\to 0} s(f;P), \qquad \overline{I} = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f;P).$$

e) Покажите, что $(f \in \mathcal{R}[a,b]) \Leftrightarrow (\underline{I} = \overline{I})$.

f) Покажите, что $f \in \mathcal{R}[a,b]$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение P отрезка $[a,b]$, что $S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$.

2. *Канторово множество лебеговой меры нуль.*

a) Канторово множество, описанное в задаче 7 § 4 гл. II, несчетно. Проверьте, что оно тем не менее есть множество меры нуль в смысле Лебега. Укажите, как следует видоизменить конструкцию канторова множества, чтобы получить аналогичное всюду «дырявое» множество, не являющееся множеством меры нуль. (Его тоже называют канторовым.)

b) Покажите, что заданная на отрезке $[0,1]$ функция, равная нулю вне канторова множества и единице в точках канторова множества, интегрируема по Риману на этом отрезке, если и только если канторово множество имеет меру нуль.

c) Постройте неубывающую, непрерывную и не постоянную на отрезке $[0,1]$ функцию, которая имеет нулевую производную всюду, кроме, быть может, точек канторова множества меры нуль.

3. *Критерий Лебега.*

a) Проверьте непосредственно (без ссылки на критерий Лебега) интегрируемость функции Римана из примера 2 настоящего параграфа.

b) Покажите, что ограниченная функция $f \in \mathcal{R}[a,b]$ тогда и только тогда, когда для любых двух чисел $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдется разбиение P отрезка $[a,b]$ такое, что сумма длин тех отрезков разбиения, на которых колебание функции больше ε, не превосходит δ.

c) Покажите, что $f \in \mathcal{R}[a,b]$ тогда и только тогда, когда f ограничена на $[a,b]$ и для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ множество точек отрезка $[a,b]$, в которых f имеет колебание больше чем ε, можно покрыть конечным число интервалов, сумма длин которых меньше δ (*критерий Дюбуа – Реймона*[1]).

d) Используя предыдущую задачу, докажите критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

4. Покажите, что если $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ и f, g действительны, то $\max\{f,g\} \in \mathcal{R}[a,b]$ и $\min\{f,g\} \in \mathcal{R}[a,b]$.

5. Покажите, что

a) если $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ и $f(x) = g(x)$ почти всюду на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx$;

[1] П. Дюбуа – Реймон (1831 – 1889) — немецкий математик.

b) если $f \in \mathcal{R}[a,b]$ и $f(x) = g(x)$ почти всюду на $[a,b]$, то g может не быть интегрируемой по Риману на $[a,b]$, даже если g определена и ограничена на $[a,b]$.

6. *Интеграл от векторнозначной функции.*

a) Пусть $\boldsymbol{r}(t)$ — радиус-вектор точки, движущейся в пространстве; $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(0)$ — начальное положение точки; $\boldsymbol{v}(t)$ — вектор скорости как функция времени. Восстановите $\boldsymbol{r}(t)$ по $\boldsymbol{r}_0$ и функции $\boldsymbol{v}(t)$.

b) Сводится ли интегрирование векторнозначной функции к интегрированию вещественнозначных функций?

c) Верен ли для векторнозначных функций критерий интегрируемости, выраженный в утверждении $2'$?

d) Верен ли критерий Лебега для векторнозначных функций?

e) Какие из понятий и фактов этого параграфа переносятся на функции с комплексными значениями?

§ 2. Линейность, аддитивность и монотонность интеграла

1. Интеграл как линейная функция на пространстве $\mathcal{R}[a,b]$

Теорема 1. *Если f и g — интегрируемые на отрезке $[a,b]$ функции, то их линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ также является интегрируемой на $[a,b]$ функцией, причем*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx. \tag{1}$$

◀ Рассмотрим интегральную сумму для интеграла, стоящего в левой части соотношения (1), и преобразуем ее:

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha f + \beta g)(\xi_i)\Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i. \tag{2}$$

Поскольку правая часть последнего равенства стремится к линейной комбинации интегралов, стоящих в правой части равенства (1), если параметр $\lambda(P)$ разбиения стремится к нулю, то левая часть равенства (2) тоже имеет предел при $\lambda(P) \to 0$ и этот предел совпадает с пределом правой части. Таким образом, $(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}[a,b]$ и выполнено равенство (1). ▶

Если множество $\mathcal{R}[a,b]$ рассматривать как векторное пространство над полем действительных чисел, а интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ — как действительнозначную функцию, определенную на векторах пространства $\mathcal{R}[a,b]$, то теорема 1 утверждает, что интеграл есть линейная функция на векторном пространстве $\mathcal{R}[a,b]$.

Во избежание возможной путаницы, функции, определенные на функциях, называют обычно *функционалами*. Таким образом, мы доказали, что интеграл есть линейный функционал на векторном пространстве интегрируемых функций.

2. Интеграл как аддитивная функция отрезка интегрирования. Значение интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx = I(f;[a,b])$ зависит как от подынтегральной функции, так и от отрезка, по которому ведется интегрирование. Например, если $f \in \mathcal{R}[a,b]$, то, как мы уже знаем, $f|_{[\alpha,\beta]} \in \mathcal{R}[\alpha,\beta]$, если $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, т. е. определен интеграл $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx$, который мы можем исследовать с точки зрения его зависимости от отрезка $[\alpha,\beta]$ интегрирования.

Лемма 1. *Если $a<b<c$ и $f \in \mathcal{R}[a,c]$, то $f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}[a,b]$, $f|_{[b,c]} \in \mathcal{R}[b,c]$ и имеет место равенство*[1)]

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx. \tag{3}$$

◀ Отметим прежде всего, что интегрируемость ограничений функции f на отрезки $[a,b]$ и $[b,c]$ гарантируется утверждением 4 из предыдущего параграфа.

Далее, поскольку $f \in \mathcal{R}[a,c]$, то при вычислении интеграла $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ как предела интегральных сумм мы вправе выбирать любые удобные нам разбиения отрезка $[a,c]$. В качестве таковых будем сейчас рассматривать только те разбиения P отрезка $[a,c]$, которые содержат точку b.

[1)] Напомним, что символ $f|_E$ обозначает сужение функции f на множество E, лежащее в области определения функции f. В правой части равенства (3) формально полагалось бы написать не f, а сужения f на соответствующие отрезки.

Каждое такое разбиение с отмеченными точками (P, ξ), очевидно, порождает разбиения (P', ξ') и (P'', ξ'') отрезков $[a, b]$ и $[b, c]$ соответственно, причем $P = P' \cup P''$ и $\xi = \xi' \cup \xi''$.

Но тогда имеет место следующее равенство между соответствующими интегральными суммами:

$$\sigma(f; P, \xi) = \sigma(f; P', \xi') + \sigma(f; P'', \xi'').$$

Поскольку $\lambda(P') \leqslant \lambda(P)$ и $\lambda(P'') \leqslant \lambda(P)$, то при достаточно малом $\lambda(P)$ каждая из написанных интегральных сумм близка к соответствующему интегралу из (3). Таким образом, равенство (3) действительно имеет место. ►

Чтобы несколько расширить применимость полученного результата, вернемся временно вновь к определению интеграла.

Мы определили интеграл как предел интегральных сумм

$$\sigma(f; P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{4}$$

отвечающих разбиениям с отмеченными точками (P, ξ) отрезка интегрирования $[a, b]$. Разбиение P составляла монотонная конечная последовательность точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$, причем точка x_0 совпадала с нижним пределом интегрирования a, а последняя точка x_n совпадала с верхним пределом интегрирования b. Эта конструкция проводилась в предположении, что $a < b$. Если теперь взять произвольно два числа a и b, не требуя, чтобы обязательно было $a < b$, и, считая a нижним пределом интегрирования, а b верхним, провести указанную конструкцию, то мы вновь получим сумму вида (4), в которой на сей раз будет $\Delta x_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, если $a < b$, и $\Delta x_i < 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ при $a > b$, ибо $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Таким образом, сумма (4) при $a > b$ будет отличаться от интегральной суммы соответствующего разбиения отрезка $[b, a]$ $(b < a)$ только знаком.

По этим соображениям принимается следующее соглашение: если $a > b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{5}$$

В связи с этим естественно также положить, что

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0. \tag{6}$$

После этих соглашений с учетом леммы 1 приходим к следующему важному свойству интеграла.

Теорема 2. *Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}$ и пусть f — функция, интегрируемая на наибольшем из отрезков с концами в указанных точках. Тогда сужение f на каждый из двух других отрезков также интегрируемо на соответствующем отрезке и имеет место равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0. \tag{7}$$

◀ В силу симметрии равенства (7) относительно a, b, c, мы без ограничения общности можем считать, что $a = \min\{a, b, c\}$.

Если $\max\{a, b, c\} = c$ и $a < b < c$, то по лемме 1

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx = 0,$$

что с учетом соглашения (5) дает равенство (7).

Если $\max\{a, b, c\} = b$ и $a < c < b$, то по лемме 1

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = 0,$$

что с учетом (5) вновь дает (7).

Наконец, если какие-то две из точек a, b, c или все три совпадают, то (7) следует из соглашений (5) и (6). ▶

Определение 1. Пусть каждой упорядоченной паре (α, β) точек α, β отрезка $[a, b]$ поставлено в соответствие число $I(\alpha, \beta)$, причем так, что для любой тройки точек $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ выполнено равенство

$$I(\alpha, \gamma) = I(\alpha, \beta) + I(\beta, \gamma).$$

Тогда функция $I(\alpha, \beta)$ называется *аддитивной функцией ориентированного промежутка*, определенной на промежутках, лежащих в отрезке $[a, b]$.

Если $f \in \mathcal{R}[A, B]$ и $a, b, c \in [A, B]$, то, полагая $I(a, b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, из (7) заключаем, что

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx, \tag{8}$$

т. е. интеграл есть аддитивная функция промежутка интегрирования. Ориентированность промежутка состоит в данном случае в том, что мы упорядочиваем пару концов отрезка интегрирования, указывая, какой из них первый (являющийся нижним пределом интегрирования) и какой второй (являющийся верхним пределом интегрирования).

3. Оценка интеграла, монотонность интеграла, теоремы о среднем

a. Одна общая оценка интеграла. Начнем с одной общей оценки интеграла, которая, как потом выяснится, справедлива не только для интегралов от действительнозначных функций.

Теорема 3. *Если $a \leqslant b$ и $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ и справедливо неравенство*

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f|(x)\,dx. \tag{9}$$

Если при этом $|f|(x) \leqslant C$ на $[a, b]$, то

$$\int\limits_a^b |f|(x)\,dx \leqslant C(b - a). \tag{10}$$

◀ При $a = b$ утверждение тривиально, поэтому будем считать, что $a < b$.

Для доказательства теоремы достаточно вспомнить теперь, что $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ (см. утверждение 4 из § 1), и написать следующую оценку интегральной суммы $\sigma(f;P,\xi)$:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)||\Delta x_i| = \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x_i \leqslant C\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = C(b-a).$$

Переходя к пределу при $\lambda(P)\to 0$, получаем

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f|(x)\,dx \leqslant C(b-a). \quad \blacktriangleright$$

b. Монотонность интеграла и первая теорема о среднем. Все дальнейшее специфично для интегралов от действительнозначных функций.

Теорема 4. *Если $a\leqslant b$, $f_1,f_2\in\mathcal{R}[a,b]$ и $f_1(x)\leqslant f_2(x)$ в любой точке $x\in[a,b]$, то*

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \leqslant \int_a^b f_2(x)\,dx. \tag{11}$$

$\blacktriangleleft$ При $a=b$ утверждение тривиально. Если же $a<b$, то достаточно записать для интегральных сумм неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i,$$

справедливое, поскольку $\Delta x_i>0$ $(i=1,\ldots,n)$, и затем перейти в нем к пределу при $\lambda(P)\to 0$. $\blacktriangleright$

Теорему 4 можно трактовать как утверждение о монотонности зависимости интеграла от подынтегральной функции.

Из теоремы 4 получается ряд полезных следствий.

Следствие 1. *Если $a\leqslant b$, $f\in\mathcal{R}[a,b]$ и $m\leqslant f(x)\leqslant M$ на $x\in[a,b]$, то*

$$m\cdot(b-a)\leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\cdot(b-a), \tag{12}$$

и, в частности, если $0\leqslant f(x)$ на $[a,b]$, то

$$0\leqslant \int_a^b f(x)\,dx.$$

◀ Соотношение (12) получается, если проинтегрировать каждый член неравенств $m \leqslant f(x) \leqslant M$ и воспользоваться теоремой 4. ▶

Следствие 2. *Если* $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, *то найдется число* $\mu \in [m, M]$ *такое, что*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu\cdot(b-a). \tag{13}$$

◀ Если $a = b$, то утверждение тривиально. Если $a \neq b$, то положим $\mu = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Тогда из (12) следует, что $m \leqslant \mu \leqslant M$, если $a < b$. Но обе части (13) меняют знак при перестановке местами a и b, поэтому (13) справедливо и при $b < a$. ▶

Следствие 3. *Если* $f \in C[a,b]$, *то найдется точка* $\xi \in [a,b]$ *такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \tag{14}$$

◀ По теореме о промежуточном значении для непрерывной функции, на отрезке $[a,b]$ найдется точка ξ, в которой $f(\xi) = \mu$, если только

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant \mu \leqslant \max_{x\in[a,b]} f(x) = M.$$

Таким образом, (14) следует из (13). ▶

Равенство (14) часто называют *первой теоремой о среднем* для интеграла. Мы же зарезервируем это название для следующего, несколько более общего утверждения.

Теорема 5 (первая теорема о среднем для интеграла)**.** *Пусть* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. *Если функция* g *неотрицательна (или неположительна) на отрезке* $[a,b]$, *то*

$$\int\limits_a^b (f\cdot g)(x)\,dx = \mu\int\limits_a^b g(x)\,dx, \tag{15}$$

где $\mu \in [m, M]$.

Если, кроме того, известно, что $f \in C[a,b]$, *то найдется точка* $\xi \in [a,b]$ *такая, что*

$$\int\limits_a^b (f \cdot g)(x)\,dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{16}$$

◀ Поскольку перестановка пределов интегрирования приводит к изменению знака одновременно в обеих частях равенства (15), то достаточно проверить это равенство в случае $a < b$. Изменение знака функции $g(x)$ тоже одновременно меняет знак обеих частей равенства (15), поэтому можно без ограничения общности доказательства считать, что $g(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$.

Поскольку $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, то при $g(x) \geqslant 0$

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x).$$

Поскольку $m \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$, $f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$ и $M \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$, то, применяя теорему 4 и теорему 1, получаем

$$m\int\limits_a^b g(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{17}$$

Если $\int\limits_a^b g(x)\,dx = 0$, то, как видно из этих неравенств, соотношение (15) выполнено.

Если же $\int\limits_a^b g(x)\,dx \neq 0$, то, полагая

$$\mu = \left(\int\limits_a^b g(x)\,dx\right)^{-1} \cdot \int\limits_a^b (f \cdot g)(x)\,dx,$$

из (17) находим, что

$$m \leqslant \mu \leqslant M,$$

но это равносильно соотношению (15).

Равенство (16) теперь следует из (15) и теоремы о промежуточном значении для функции $f \in C[a,b]$, с учетом того, что в случае $f \in C[a,b]$

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{и} \qquad M = \max_{x\in[a,b]} f(x). \quad \blacktriangleright$$

Заметим, что равенство (13) получается из (15), если $g(x) \equiv 1$ на $[a,b]$.

c. Вторая теорема о среднем для интеграла. Значительно более специальной и деликатной в рамках теории интеграла Римана является так называемая *вторая теорема о среднем*[1)].

Чтобы не осложнять доказательство этой теоремы, сделаем несколько полезных заготовок, представляющих и самостоятельный интерес.

Преобразование Абеля. Так называется следующее преобразование суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$. Пусть $A_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$; положим также $A_0 = 0$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} (A_i - A_{i-1}) b_i = \sum_{i=1}^{n} A_i b_i - \sum_{i=1}^{n} A_{i-1} b_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} A_i b_i - \sum_{i=0}^{n-1} A_i b_{i+1} = A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}).$$

Итак,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = (A_n b_n - A_0 b_1) + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}), \tag{18}$$

или, поскольку $A_0 = 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}). \tag{19}$$

На основе преобразования Абеля легко проверяется следующая

Лемма 2. *Если числа* $A_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$ $(k = 1, \ldots, n)$ *удовлетворяют неравенствам* $m \leqslant A_k \leqslant M$, *а числа* b_i $(i = 1, \ldots, n)$ *неотрицательны*

[1)] При некотором дополнительном и часто вполне приемлемом условии на функции основную теорему 6 этого раздела можно легко получить из первой теоремы о среднем. См. по этому поводу задачу 3 к следующему параграфу.

и $b_i \geqslant b_{i+1}$ *при* $i = 1, \ldots, n-1$, *то*

$$mb_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant M b_1. \tag{20}$$

◄ Используя то, что $b_n \geqslant 0$ и $b_i - b_{i+1} \geqslant 0$ при $i = 1, \ldots, n-1$, из (19) получаем

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant M b_n + \sum_{i=1}^{n-1} M(b_i - b_{i+1}) = M b_n + M(b_1 - b_n) = M b_1.$$

Аналогично проверяется и левое неравенство в соотношении (20). ►

Лемма 3. *Если* $f \in \mathcal{R}[a,b]$, *то при любом* $x \in [a,b]$ *определена функция*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{21}$$

и $F(x) \in C[a,b]$.

◄ Существование интеграла (21) при любом $x \in [a,b]$ нам уже известно из утверждения 4 § 1, поэтому остается проверить непрерывность функции $F(x)$. Поскольку $f \in \mathcal{R}[a,b]$, имеем $|f| \leqslant C < \infty$ на $[a,b]$. Пусть $x \in [a,b]$ и $x + h \in [a,b]$. Тогда в силу аддитивности интеграла и неравенств (9), (10) получаем

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| =$$

$$= \left| \int_x^{x+h} f(t)\,dt \right| \leqslant \left| \int_x^{x+h} |f(t)|\,dt \right| \leqslant C|h|.$$

Мы воспользовались неравенством (10) с учетом того, что при $h < 0$ имеем

$$\left| \int_x^{x+h} |f(t)|\,dt \right| = \left| -\int_{x+h}^{x} |f(t)|\,dt \right| = \int_{x+h}^{x} |f(t)|\,dt.$$

Итак, мы показали, что если x, $x + h \in [a,b]$, то

$$|F(x+h) - F(x)| \leqslant C|h|, \tag{22}$$

откуда, очевидно, следует непрерывность функции F в любой точке отрезка $[a,b]$. ►

Теперь докажем лемму, которая уже является вариантом второй теоремы о среднем.

Лемма 4. *Если* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ *и* g — *неотрицательная и невозрастающая на отрезке* $[a,b]$ *функция, то найдется точка* $\xi \in [a,b]$ *такая, что*

$$\int\limits_a^b (f \cdot g)(x)\,dx = g(a) \int\limits_a^\xi f(x)\,dx. \tag{23}$$

Прежде чем переходить к доказательству, отметим, что, в отличие от соотношения (16) первой теоремы о среднем, в (23) под знаком интеграла осталась функция f, а не монотонная функция g.

◄ Для доказательства формулы (23), как и в уже рассмотренных выше случаях, постараемся оценить соответствующую интегральную сумму.

Пусть P — разбиение отрезка $[a,b]$. Запишем сначала тождество

$$\int\limits_a^b (f \cdot g)(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (f \cdot g)(x)\,dx =$$
$$= \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [g(x) - g(x_{i-1})] f(x)\,dx$$

и покажем, что при $\lambda(P) \to 0$ последняя сумма стремится к нулю.

Поскольку $f \in \mathcal{R}[a,b]$, то $|f(x)| \leqslant C < \infty$ на $[a,b]$. Тогда, используя уже доказанные свойства интеграла, получаем

$$\left| \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [g(x) - g(x_{i-1})] f(x)\,dx \right| \leqslant \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - g(x_{i-1})||f(x)|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - g(x_{i-1})|\,dx \leqslant C \sum_{i=1}^n \omega(g; \Delta_i) \Delta x_i \to 0$$

при $\lambda(P) \to 0$, ввиду того, что $g \in \mathcal{R}[a,b]$ (см. утверждение 2 из § 1). Значит,

$$\int_a^b (f\cdot g)(x)\,dx = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx. \tag{24}$$

Оценим теперь сумму, стоящую в правой части равенства (24). Положив

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

по лемме 3 получаем функцию, непрерывную на отрезке $[a,b]$.

Пусть

$$m = \min_{x\in[a,b]} F(x) \qquad \text{и} \qquad M = \max_{x\in[a,b]} F(x).$$

Поскольку $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = F(x_i) - F(x_{i-1})$, то

$$\sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) g(x_{i-1}). \tag{25}$$

Учитывая неотрицательность и невозрастание функции g на $[a,b]$ и полагая

$$a_i = F(x_i) - F(x_{i-1}), \qquad b_i = g(x_{i-1}),$$

по лемме 2 находим, что

$$mg(a) \leqslant \sum_{i=1}^n \big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) g(x_{i-1}) \leqslant Mg(a), \tag{26}$$

поскольку

$$A_k = \sum_{i=1}^k a_i = F(x_k) - F(x_0) = F(x_k) - F(a) = F(x_k).$$

Мы показали, что суммы (25) удовлетворяют неравенствам (26). Вспоминая соотношение (24), теперь имеем

$$mg(a) \leqslant \int_a^b (f\cdot g)(x)\,dx \leqslant Mg(a). \tag{27}$$

Если $g(a) = 0$, то, как показывают неравенства (27), доказываемое соотношение (23), очевидно, справедливо.

Если же $g(a) > 0$, то положим

$$\mu = \frac{1}{g(a)} \int\limits_a^b (f \cdot g)(x)\, dx.$$

Из (27) следует, что $m \leqslant \mu \leqslant M$, а из непрерывности функции $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ на $[a, b]$ следует, что найдется точка $\xi \in [a, b]$, в которой $F(\xi) = \mu$. Но именно это и утверждает формула (23). ►

Теорема 6 (вторая теорема о среднем для интеграла)**.** *Если* $f, g \in \in \mathcal{R}[a, b]$ *и* g *— монотонная на* $[a, b]$ *функция, то найдется точка* $\xi \in \in [a, b]$ *такая, что*

$$\int\limits_a^b (f \cdot g)(x)\, dx = g(a) \int\limits_a^\xi f(x)\, dx + g(b) \int\limits_\xi^b f(x)\, dx. \tag{28}$$

Равенство (28) (как, впрочем, и равенство (23)) часто называют *формулой Бонне*[1)].

◄ Пусть g — неубывающая на $[a, b]$ функция. Тогда $G(x) = g(b) - - g(x)$ — неотрицательная, невозрастающая, интегрируемая на $[a, b]$ функция. Применяя формулу (23), находим

$$\int\limits_a^b (f \cdot G)(x)\, dx = G(a) \int\limits_a^\xi f(x)\, dx. \tag{29}$$

Но

$$\int\limits_a^b (f \cdot G)(x)\, dx = g(b) \int\limits_a^b f(x)\, dx - \int\limits_a^b (f \cdot g)(x)\, dx,$$

$$G(a) \int\limits_a^\xi f(x)\, dx = g(b) \int\limits_a^\xi f(x)\, dx - g(a) \int\limits_a^\xi f(x)\, dx.$$

[1)] П. О. Бонне (1819 – 1892) — французский математик и астроном. Наиболее значительные математические работы Бонне связаны с дифференциальной геометрией.

Учитывая эти соотношения и свойство аддитивности интеграла, из (29) получаем доказываемое равенство (28).

Если g — невозрастающая функция, то, полагая $G(x) = g(x) - g(b)$, получим, что $G(x)$ — неотрицательная, невозрастающая, интегрируемая на $[a, b]$ функция. Далее вновь получаем формулу (29), а за ней и формулу (28). ►

Задачи и упражнения

1. Покажите, что если $f \in \mathcal{R}[a, b]$ и $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$, то

a) при условии, что в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$ непрерывности функция $f(x)$ принимает положительное значение $f(x_0) > 0$, имеет место строгое неравенство

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0;$$

b) из условия $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ следует, что $f(x) = 0$ почти во всех точках отрезка $[a, b]$.

2. Покажите, что если $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $m = \inf\limits_{]a,b[} f(x)$, $M = \sup\limits_{]a,b[} f(x)$, то

a) $\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b - a)$, где $\mu \in [m, M]$ (см. задачу 5a) предыдущего параграфа);

b) при условии непрерывности f на $[a, b]$ найдется такая точка $\xi \in]a, b[$, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b - a).$$

3. Покажите, что если $f \in C[a, b]$, $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$ и $M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{1/n} = M.$$

4. a) Покажите, что если $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то $|f|^p \in \mathcal{R}[a, b]$ при $p \geqslant 0$.

b) Исходя из неравенства Гёльдера для сумм, получите неравенство Гёльдера для интегралов[1]:

$$\left|\int_a^b (f\cdot g)(x)\,dx\right| \leqslant \left(\int_a^b |f|^p(x)\,dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g|^q(x)\,dx\right)^{1/q},$$

если $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ и $p \geqslant 1,\ q \geqslant 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

c) Исходя из неравенства Минковского для сумм, получите неравенство Минковского для интегралов:

$$\left(\int_a^b |f+g|^p(x)\,dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p(x)\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p(x)\,dx\right)^{1/p},$$

если $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ и $p \geqslant 1$. Покажите, что это неравенство меняется на противоположное, если $0 < p < 1$.

d) Проверьте, что если f — непрерывная, выпуклая на $\mathbb{R}$ функция, а φ — произвольная непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, то при $c \neq 0$ справедливо неравенство Иенсена:

$$f\left(\frac{1}{c}\int_0^c \varphi(t)\,dt\right) \leqslant \frac{1}{c}\int_0^c f(\varphi(t))\,dt.$$

§ 3. Интеграл и производная

1. Интеграл и первообразная. Пусть f — интегрируемая по Риману на отрезке $[a,b]$ функция. Рассмотрим на этом же отрезке функцию

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \tag{1}$$

часто называемую *интегралом с переменным верхним пределом.*

Поскольку $f \in \mathcal{R}[a,b]$, то $f|_{[a,x]} \in \mathcal{R}[a,x]$, если $[a,x] \subset [a,b]$; поэтому функция $x \mapsto F(x)$ корректно определена для $x \in [a,b]$.

---

[1] Алгебраическое неравенство Гёльдера при $p = q = 2$ впервые было получено в 1821 г. Коши и носит его имя. Неравенство Гёльдера для интегралов при $p = q = 2$ впервые нашел в 1859 г. русский математик В. Я. Буняковский (1804–1889). Это важное интегральное неравенство (в случае $p = q = 2$) называют *неравенством Буняковского* или *неравенством Коши–Буняковского.* Встречается иногда и менее точное его название «неравенство Шварца» — по имени немецкого математика Г. К. А. Шварца (1843–1921), в работах которого оно появилось в 1884 г.

Если $|f(t)| \leqslant C < +\infty$ на $[a, b]$ (а f, как интегрируемая функция, ограничена на $[a, b]$), то из аддитивности интеграла и простейшей оценки интеграла следует, что

$$|F(x+h) - F(x)| \leqslant C|h|, \tag{2}$$

если $x, x+h \in [a, b]$.

Об этом мы, кстати, уже говорили, доказывая лемму 3 предыдущего параграфа.

Из неравенства (2), в частности, следует непрерывность функции F на $[a, b]$. Итак, $F \in C[a, b]$.

Теперь мы исследуем функцию F более тщательно.

Имеет место следующая основная для всего дальнейшего

Лемма 1. *Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$ и функция f непрерывна в некоторой точке $x \in [a, b]$, то функция F, определяемая на $[a, b]$ формулой* (1), *дифференцируема в этой точке x, причем имеет место равенство*

$$F'(x) = f(x).$$

◀ Пусть $x, x+h \in [a, b]$. Оценим разность $F(x+h) - F(x)$. Из непрерывности f в точке x следует, что $f(t) = f(x) + \Delta(t)$, где $\Delta(t) \to 0$ при $t \to x$, $t \in [a, b]$. Функция $\Delta(t) = f(t) - f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, как разность интегрируемой функции $t \mapsto f(t)$ и постоянной $f(x)$, если x — фиксированная точка. Обозначим через $M(h)$ величину $\sup\limits_{t \in I(h)} |\Delta(t)|$, где $I(h)$ — отрезок с концами $x, x+h \in [a, b]$. По условию, $M(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Теперь запишем

$$F(x+h) - F(x) = \int\limits_a^{x+h} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x} f(t)\,dt = \int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_x^{x+h} \bigl(f(x) + \Delta(t)\bigr)\,dt = \int\limits_x^{x+h} f(x)\,dt + \int\limits_x^{x+h} \Delta(t)\,dt = f(x)h + \alpha(h)h,$$

где положено

$$\int\limits_x^{x+h} \Delta(t)\,dt = \alpha(h)h.$$

Поскольку

$$\left|\int\limits_{x}^{x+h} \Delta(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int\limits_{x}^{x+h} |\Delta(t)|\,dt\right| \leqslant \left|\int\limits_{x}^{x+h} M(h)\,dt\right| = M(h)|h|,$$

то $|\alpha(h)| \leqslant M(h)$ и потому $\alpha(h) \to 0$, когда $h \to 0$ (но так, что $x + h \in \in [a, b]$).

Таким образом, показано, что если функция f непрерывна в точке $x \in [a, b]$, то при смещениях h от точки x таких, что $x + h \in [a, b]$, имеет место равенство

$$F(x + h) - F(x) = f(x)h + \alpha(h)h, \tag{3}$$

где $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Но это и означает, что функция $F(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ в точке $x \in [a, b]$ и что $F'(x) = f(x)$. ►

Важнейшим непосредственным следствием леммы 1 является следующая

Теорема 1. *Каждая непрерывная на отрезке* $[a, b]$ *функция* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *имеет на этом отрезке первообразную, причем любая первообразная функции* f *на* $[a, b]$ *имеет вид*

$$\mathcal{F}(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt + c, \tag{4}$$

где c *— некоторая постоянная.*

◄ $(f \in C[a, b]) \Rightarrow (f \in \mathcal{R}[a, b])$, поэтому на основании леммы 1 функция (1) является первообразной для f на $[a, b]$. Но две первообразные $\mathcal{F}(x)$ и $F(x)$ одной и той же функции на отрезке могут отличаться на этом отрезке только на постоянную, поэтому $\mathcal{F}(x) = F(x) + c$. ►

Для дальнейших приложений удобно несколько расширить понятие первообразной и принять

Определение 1. Непрерывная на числовом промежутке функция $x \mapsto \mathcal{F}(x)$ называется *первообразной* (*обобщенной первообразной*) функции $x \mapsto f(x)$, определенной на том же промежутке, если во всех точках промежутка, за исключением, быть может, конечного их числа, имеет место соотношение $\mathcal{F}'(x) = f(x)$.

Учитывая это определение, можно утверждать, что справедлива следующая

Теорема 1′. *Каждая определенная и ограниченная на отрезке* $[a, b]$ *функция* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *с конечным множеством точек разрыва имеет на этом отрезке (обобщенную) первообразную, причем любая первообразная функции* f *на* $[a, b]$ *имеет вид* (4).

◀ Поскольку f имеет конечное множество точек разрыва, то $f \in \mathcal{R}[a, b]$ и по лемме 1 функция (1) является обобщенной первообразной для f на $[a, b]$. При этом мы учли, что, как уже отмечалось, в силу (2) функция (1) непрерывна на $[a, b]$. Если $\mathcal{F}(x)$ — другая первообразная функции f на $[a, b]$, то $\mathcal{F}(x) - F(x)$ — непрерывная функция, постоянная на каждом из конечного числа промежутков, на которые точки разрыва функции f разбивают отрезок $[a, b]$. Из непрерывности $\mathcal{F}(x) - F(x)$ на $[a, b]$ тогда следует, что $\mathcal{F}(x) - F(x) \equiv \mathrm{const}$ на $[a, b]$. ▶

2. Формула Ньютона – Лейбница

Теорема 2. *Если* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ — *ограниченная функция с конечным числом точек разрыва, то* $f \in \mathcal{R}[a, b]$ *и*

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a),} \tag{5}$$

где $\mathcal{F}\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ — *любая из первообразных функции* f *на отрезке* $[a, b]$.

◀ Интегрируемость ограниченной на отрезке функции с конечным числом точек разрыва нам уже известна (см. § 1, следствие 2 утверждения 2). Наличие обобщенной первообразной $\mathcal{F}(x)$ функции f на $[a, b]$ гарантирует теорема 1′, в силу которой $\mathcal{F}(x)$ имеет вид (4). Полагая в (4) $x = a$, получим, что $\mathcal{F}(a) = c$, откуда

$$\mathcal{F}(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt + \mathcal{F}(a).$$

В частности,

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a),$$

что с точностью до обозначения переменной интегрирования совпадает с доказываемой формулой (5). ►

Фундаментальное для всего анализа соотношение (5) называется *формулой Ньютона – Лейбница.*

Разность $\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)$ значений любой функции часто записывают символом $\mathcal{F}(x)\big|_a^b$. В этих обозначениях формула Ньютона – Лейбница приобретает вид

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{F}(x)\big|_a^b\,.}$$

Поскольку обе части этой формулы одновременно меняют знак при перестановке a и b, то формула справедлива при любом соотношении величин a и b, т.е. как при $a \leqslant b$, так и при $a \geqslant b$.

На упражнениях по анализу формула Ньютона – Лейбница большей частью используется только для вычисления стоящего слева интеграла, и это может породить несколько искаженное представление об ее использовании. На самом деле положение вещей таково, что конкретные интегралы редко находят через первообразную, а чаще прибегают к прямому счету на ЭВМ с помощью хорошо разработанных численных методов. Формула Ньютона – Лейбница занимает ключевую, связывающую интегрирование и дифференцирование, позицию в самой теории математического анализа, в которой она, в частности, получает далеко идущее развитие в виде так называемой *общей формулы Стокса*[1)].

Примером того, как формула Ньютона – Лейбница используется в самом анализе, может служить уже материал следующего пункта настоящего параграфа.

3. Интегрирование по частям в определенном интеграле и формула Тейлора

Утверждение 1. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке с концами a и b, то справедливо соотношение*

$$\int_a^b (u \cdot v')(x)\,dx = (u \cdot v)(x)\big|_a^b - \int_a^b (v \cdot u')(x)\,dx. \tag{6}$$

[1)] Д. Г. Стокс (1819 – 1903) — английский физик и математик.

Эту формулу принято записывать в сокращенном виде

$$\int\limits_a^b u\,dv = u\cdot v\big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$$

и называть *формулой интегрирования по частям* в определенном интеграле.

◄ По правилу дифференцирования произведения функций имеем

$$(u\cdot v)'(x) = (u'\cdot v)(x) + (u\cdot v')(x).$$

По условию все функции в этом равенстве непрерывны, а значит, и интегрируемы на отрезке с концами a и b. Используя линейность интеграла и формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$(u\cdot v)(x)\big|_a^b = \int\limits_a^b (u'\cdot v)(x)\,dx + \int\limits_a^b (u\cdot v')(x)\,dx. \quad ►$$

В качестве следствия получим теперь формулу Тейлора с интегральным остаточным членом.

Пусть на отрезке с концами a и x функция $t\mapsto f(t)$ имеет n непрерывных производных. Используя формулу Ньютона–Лейбница и формулу (6), проделаем следующую цепочку преобразований, в которых все дифференцирования и подстановки производятся по переменной t:

$$f(x) - f(a) = \int\limits_a^x f'(t)\,dt = -\int\limits_a^x f'(t)(x-t)'dt =$$

$$= -f'(t)(x-t)\big|_a^x + \int\limits_a^x f''(t)(x-t)\,dt =$$

$$= f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}\int\limits_a^x f''(t)\big((x-t)^2\big)'\,dt =$$

$$= f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}f''(t)(x-t)^2\big|_a^x + \frac{1}{2}\int\limits_a^x f'''(t)(x-t)^2dt =$$

$$= f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 - \frac{1}{2\cdot 3}\int\limits_a^x f'''(t)\big((x-t)^3\big)'dt = \ldots =$$

$$= f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)} f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + r_{n-1}(a;x),$$

где

$$\boxed{r_{n-1}(a;x) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt.} \tag{7}$$

Итак, доказано следующее

Утверждение 2. *Если функция $t \mapsto f(t)$ имеет на отрезке с концами a и x непрерывные производные до порядка n включительно, то справедлива формула Тейлора*

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + r_{n-1}(a;x)$$

с остатком $r_{n-1}(a;x)$, представленным в интегральной форме (7).

Отметим, что функция $(x-t)^{n-1}$ не меняет знак на отрезке с концами a и x, и поскольку функция $t \mapsto f^{(n)}(t)$ непрерывна на этом отрезке, то по первой теореме о среднем на нем найдется такая точка ξ, что

$$r_{n-1}(a;x) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt =$$
$$= \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi) \int\limits_a^x (x-t)^{n-1} dt =$$
$$= \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi) \left(-\frac{1}{n}(x-t)^n\right)\Bigg|_a^x = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x-a)^n.$$

Мы вновь получили знакомую форму Лагранжа остаточного члена формулы Тейлора. (На основании задачи 2b) из предыдущего параграфа, можно считать, что ξ лежит в интервале с концами a, x.)

Это рассуждение можно было бы повторить, вынося из-под знака интеграла (7) $f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^{n-k}$, где $k \in [1, n]$. Значениям $k = 1$ и $k = n$ отвечают получаемые при этом соответственно формулы Коши и Лагранжа остаточного члена.

4. Замена переменной в интеграле. Одной из основных формул интегрального исчисления является формула замены переменной в определенном интеграле. Эта формула в теории интеграла столь же важна, как в дифференциальном исчислении формула дифференцирования композиции функций, с которой она может быть при определенных условиях связана посредством формулы Ньютона – Лейбница.

Утверждение 3. *Если* $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ — *непрерывно дифференцируемое отображение отрезка* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ *в отрезок* $a \leqslant x \leqslant b$ *такое, что* $\varphi(\alpha) = a$ *и* $\varphi(\beta) = b$, *то при любой непрерывной на* $[a,b]$ *функции* $f(x)$ *функция* $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ *непрерывна на отрезке* $[\alpha,\beta]$ *и справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{8}$$

◀ Пусть $\mathcal{F}(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $[a,b]$. Тогда, по теореме о дифференцировании композиции функций, функция $\mathcal{F}(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, непрерывной, как композиция и произведение непрерывных функций на отрезке $[\alpha,\beta]$. По формуле Ньютона – Лейбница $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)$ и $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \mathcal{F}(\varphi(\beta)) - \mathcal{F}(\varphi(\alpha))$. Но, по условию, $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$; таким образом, равенство (8) действительно имеет место. ▶

Из формулы (8) видно, насколько удобно иметь под интегралом не просто знак функции, а дифференциальное выражение $f(x)dx$, позволяющее после подстановки $x = \varphi(t)$ автоматически получать правильное подынтегральное выражение в интеграле по новой переменной.

Для того чтобы не осложнять дела громоздким доказательством, мы в утверждении 3 умышленно сузили истинную область применимости формулы (8) и получили (8) из формулы Ньютона – Лейбница. Теперь перейдем к основной теореме о замене переменной, условия которой несколько отличаются от условий утверждения 3. Доказательство этой теоремы будет опираться непосредственно на определение интеграла как предела интегральных сумм.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ — *непрерывно дифференцируемое, строго монотонное отображение отрезка* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ *в отрезок* $a \leqslant x \leqslant b$ *с соответствием концов* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ *или* $\varphi(\alpha) = b$,

$\varphi(\beta) = a$. *Тогда при любой функции* $f(x)$, *интегрируемой на отрезке* $[a,b]$, *функция* $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ *интегрируема на отрезке* $[\alpha,\beta]$ *и справедливо равенство*

$$\boxed{\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.} \tag{9}$$

◄ Поскольку φ — строго монотонное отображение отрезка $[\alpha,\beta]$ на отрезок $[a,b]$ с соответствием концов, то любое разбиение P_t $(\alpha = t_0 < \ldots < t_n = \beta)$ отрезка $[\alpha,\beta]$ посредством образов $x_i = \varphi(t_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ точек разбиения P_t порождает соответствующее разбиение P_x отрезка $[a,b]$, которое можно условно обозначить как $\varphi(P_t)$. При этом $x_0 = a$, если $\varphi(\alpha) = a$, и $x_0 = b$, если $\varphi(\alpha) = b$. Из равномерной непрерывности φ на $[\alpha,\beta]$ следует, что если $\lambda(P_t) \to 0$, то величина $\lambda(P_x) = \lambda(\varphi(P_t))$ тоже стремится к нулю.

Используя теорему Лагранжа, преобразуем интегральную сумму $\sigma(f; P_x, \xi)$ следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tilde{\tau}_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tilde{\tau}_i)\Delta t_i.$$

Здесь $x_i = \varphi(t_i)$, $\xi_i = \varphi(\tau_i)$, ξ_i лежит на отрезке с концами x_{i-1}, x_i, а точки τ_i, $\tilde{\tau}_i$ лежат на отрезке с концами t_{i-1}, t_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Далее,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tilde{\tau}_i)\Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\left(\varphi'(\tilde{\tau}_i) - \varphi'(\tau_i)\right)\Delta t_i.$$

Оценим последнюю сумму. Поскольку $f \in \mathcal{R}[a,b]$, функция f ограничена на $[a,b]$. Пусть $|f(x)| \leqslant C$ на $[a,b]$. Тогда

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\left(\varphi'(\tilde{\tau}_i) - \varphi'(\tau_i)\right)\Delta t_i\right| \leqslant C \cdot \sum_{i=1}^{n} \omega(\varphi'; \Delta_i)\Delta t_i,$$

где Δ_i — отрезок с концами t_{i-1}, t_i.

Последняя сумма стремится к нулю при $\lambda(P_t) \to 0$, поскольку φ' — непрерывная на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция.

Таким образом, мы показали, что

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i + \alpha,$$

где $\alpha \to 0$ при $\lambda(P_t) \to 0$. Как уже отмечалось, если $\lambda(P_t) \to 0$, то и $\lambda(P_x) \to 0$. Но $f \in \mathcal{R}[a, b]$, поэтому при $\lambda(P_x) \to 0$ сумма в левой части последнего равенства стремится к интегралу $\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx$. Значит, при $\lambda(P_t) \to 0$ и сумма в правой части этого равенства имеет и притом тот же предел.

Но сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$ можно считать совершенно произвольной интегральной суммой функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, соответствующей разбиению P_t с отмеченными точками $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, поскольку, ввиду строгой монотонности φ, любой набор точек τ можно получить из некоторого соответствующего ему набора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ точек, отмеченных в отрезках разбиения $P_x = \varphi(P_t)$.

Таким образом, предел этой суммы есть, по определению, интеграл от функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ по отрезку $[\alpha, \beta]$, и мы доказали одновременно как интегрируемость функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, так и формулу (9). ►

5. Некоторые примеры. Рассмотрим теперь некоторые примеры использования полученных формул и доказанных в последних двух параграфах теорем о свойствах интеграла.

Пример 1.

$$\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t\, dt = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

Для вычисления интеграла мы сделали замену переменной $x = \sin t$, а затем, найдя первообразную получившейся после этой замены подынтегральной функции, воспользовались формулой Ньютона – Лейбница.

Конечно, можно было бы поступить и иначе: найти довольно громоздкую первообразную $\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x$ функции $\sqrt{1-x^2}$ и затем воспользоваться формулой Ньютона – Лейбница. Пример показывает, что при вычислении определенного интеграла, к счастью, иногда удается избежать отыскания первообразной подынтегральной функции.

Пример 2. Покажем, что

$$\text{a)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0, \quad \text{b)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\, dx = \pi, \quad \text{c)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi$$

при $m, n \in \mathbb{N}$.

$$\text{a)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\sin(n+m)x - \sin(n-m)x\right)\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n+m}\cos(n+m)x + \frac{1}{n-m}\cos(n-m)x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

если $n - m \neq 0$. Случай, когда $n - m = 0$, можно рассмотреть отдельно, и в этом случае, очевидно, вновь приходим к тому же результату.

$$\text{b)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1 - \cos 2mx)\, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2m}\sin 2mx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

$$\text{c)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1 + \cos 2nx)\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2n}\sin 2nx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Пример 3. Пусть $f \in \mathcal{R}[-a, a]$. Покажем, что

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx = \begin{cases} 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\, dx, & \text{если } f \text{ — четная функция,} \\ 0, & \text{если } f \text{ — нечетная функция.} \end{cases}$$

Если $f(-x) = f(x)$, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\, dx = \int\limits_{a}^{0} f(-t)(-1)\, dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)\, dx =$$

$$= \int_0^a f(-t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a \left(f(-x) + f(x)\right)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Если же $f(-x) = -f(x)$, то, как видно из тех же выкладок, получим

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a \left(f(-x) + f(x)\right)\,dx = \int_0^a 0\,dx = 0.$$

Пример 4. Пусть f — определенная на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ периодическая функция с периодом T, т. е. $f(x+T) = f(x)$ при $x \in \mathbb{R}$.

Если f — интегрируемая на каждом конечном отрезке функция, то при любом $a \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx,$$

т. е. интеграл от периодической функции по отрезку длины периода T этой функции не зависит от положения отрезка интегрирования на числовой прямой:

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx =$$
$$= \int_0^T f(x)\,dx + \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(t+T)\cdot 1\,dt =$$
$$= \int_0^T f(x)\,dx + \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(t)\,dt = \int_0^T f(x)\,dx.$$

Мы сделали замену $x = t + T$ и воспользовались периодичностью функции $f(x)$.

Пример 5. Пусть нам нужно вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \sin x^2\,dx$, например, с точностью до 10^{-2}.

Мы знаем, что первообразная $\int \sin x^2 dx$ (интеграл Френеля) не выражается в элементарных функциях, поэтому использовать формулу Ньютона – Лейбница здесь в традиционном смысле нельзя.

Поступим иначе. Исследуя в дифференциальном исчислении формулу Тейлора, мы в качестве примера (см. гл. V, § 3, пример 11) нашли, что на отрезке $[-1,1]$ с точностью до 10^{-3} имеет место равенство

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 =: P(x).$$

Но если $|\sin x - P(x)| < 10^{-3}$ на отрезке $[-1,1]$, то верно также, что $\left|\sin x^2 - P\left(x^2\right)\right| < 10^{-3}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Следовательно,

$$\left|\int_0^1 \sin x^2\, dx - \int_0^1 P\left(x^2\right)\, dx\right| \leqslant \int_0^1 \left|\sin x^2 - P\left(x^2\right)\right|\, dx < \int_0^1 10^{-3}\, dx < 10^{-3}.$$

Таким образом, для вычисления интеграла $\int\limits_0^1 \sin x^2 dx$ с нужной точностью достаточно вычислить интеграл $\int\limits_0^1 P(x^2)\, dx$. Но

$$\int_0^1 P\left(x^2\right)\, dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{5!}x^{10}\right)\, dx =$$
$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3!\,7}x^7 + \frac{1}{5!\,11}x^{11}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3!\,7} + \frac{1}{5!\,11} = 0{,}310 \pm 10^{-3},$$

поэтому

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = 0{,}310 \pm 2 \cdot 10^{-3} = 0{,}31 \pm 10^{-2}.$$

Пример 6. Величина $\mu = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ называется *интегральным средним значений функции на отрезке* $[a,b]$.

Пусть f — определенная на $\mathbb{R}$ и интегрируемая на любом отрезке функция.

Построим по f новую функцию

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)dt,$$

значение которой в точке x есть интегральное среднее значений f в δ-окрестности точки x.

Покажем, что функция $F_\delta(x)$ (называемая *усреднением* f) более регулярна по сравнению с f. Точнее, если f интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, то $F_\delta(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, а если $f \in C(\mathbb{R})$, то $F_\delta(x) \in C^{(1)}(\mathbb{R})$.

Проверим сначала непрерывность функции $F_\delta(x)$:

$$|F_\delta(x+h) - F_\delta(x)| = \frac{1}{2\delta}\left|\int\limits_{x+\delta}^{x+\delta+h} f(t)\,dt + \int\limits_{x-\delta+h}^{x-\delta} f(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\delta}\left(C|h| + C|h|\right) = \frac{C}{\delta}|h|,$$

если $|f(t)| \leqslant C$, например, в 2δ-окрестности точки x и $|h| < \delta$. Из этой оценки, очевидно, следует непрерывность функции $F_\delta(x)$.

Если же $f \in C(\mathbb{R})$, то по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{d\varphi}\int\limits_a^{\varphi} f(t)\,dt \cdot \frac{d\varphi}{dx} = f(\varphi(x))\varphi'(x),$$

поэтому из записи

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta}\int\limits_a^{x+\delta} f(t)\,dt - \frac{1}{2\delta}\int\limits_a^{x-\delta} f(t)\,dt$$

получаем, что

$$F'_\delta(x) = \frac{f(x+\delta) - f(x-\delta)}{2\delta}.$$

Функцию $F_\delta(x)$ после замены $t = x + u$ переменной интегрирования можно записать в виде

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+u)\,du.$$

Если $f \in C(\mathbb{R})$, то, применяя первую теорему о среднем, находим, что

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta} f(x+\tau) \cdot 2\delta = f(x+\tau),$$

где $|\tau| \leqslant \delta$. Отсюда следует, что

$$\lim_{\delta \to +0} F_\delta(x) = f(x),$$

что вполне естественно.

Задачи и упражнения

1. Используя интеграл, найдите

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{n}{(2n)^2}\right]$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, если $\alpha \geqslant 0$.

2. a) Покажите, что любая непрерывная на интервале функция имеет на нем первообразную.

b) Покажите, что если $f \in C^{(1)}[a,b]$, то f может быть представлена как разность двух неубывающих на отрезке $[a,b]$ функций (см. задачу 4 из § 1).

3. Покажите, что в предположении гладкости функции g вторая теорема о среднем (теорема 6 из § 2) интегрированием по частям непосредственно сводится к первой теореме о среднем.

4. Покажите, что если $f \in C(\mathbb{R})$, то для любого фиксированного отрезка $[a,b]$ по заданному $\varepsilon > 0$ можно так подобрать $\delta > 0$, что на $[a,b]$ будет выполнено неравенство $|F_\delta(x) - f(x)| < \varepsilon$, где F_δ — осреднение функции, рассмотренное в примере 6.

5. Покажите, что

$$\int\limits_1^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt \sim \frac{1}{x^2} e^{x^2} \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

6. a) Проверьте, что функция $f(x) = \int\limits_x^{x+1} \sin t^2\,dt$ при $x \to \infty$ имеет следующее представление:

$$f(x) = \frac{\cos x^2}{2x} - \frac{\cos{(x+1)^2}}{2(x+1)} + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

b) Найдите $\varliminf\limits_{x\to\infty} xf(x)$ и $\varlimsup\limits_{x\to\infty} xf(x)$.

7. Покажите, что если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — периодическая, интегрируемая на каждом отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ функция, то функция

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$$

может быть представлена в виде суммы линейной и периодической функций.

8. a) Проверьте, что при $x > 1$ и $n \in \mathbb{N}$ функция

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \bigl(x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\bigr)^n\,d\varphi$$

есть полином степени n (n-*й полином Лежандра*).

b) Покажите, что

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{d\psi}{\bigl(x - \sqrt{x^2-1}\cos\psi\bigr)^n}.$$

9. Пусть f — вещественнозначная функция, определенная на отрезке $[a,b] \subset \subset \mathbb{R}$, а $\xi_1, \dots, \xi_m$ — различные точки этого отрезка. Значения *интерполяционного полинома Лагранжа* степени $m-1$

$$L_{m-1}(x) := \sum_{j=1}^m f(\xi_j)\prod_{i\neq j}\frac{x-\xi_i}{\xi_j-\xi_i}$$

совпадают в точках $\xi_1, \dots, \xi_m$ (узлах интерполяции) со значениями функции f, причем если $f \in C^{(m)}[a,b]$, то

$$f(x) - L_{m-1}(x) = \frac{1}{m!}f^{(m)}(\zeta(x))\omega_m(x),$$

где $\omega_m(x) = \prod\limits_{i=1}^m (x-\xi_i)$, а $\zeta(x) \in\,]a,b[$ (см. задачу 11 в § 3 гл. V).

Пусть $\xi_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\theta_i$, тогда $\theta_i \in [-1,1]$, $i = 1, \dots, m$.

a) Покажите, что

$$\int\limits_a^b L_{m-1}(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^m c_i f(\xi_i),$$

где

$$c_i = \int\limits_{-1}^1 \left(\prod_{i\neq j}\frac{t-\theta_i}{\theta_j-\theta_i}\right)dt.$$

В частности,

$\alpha_1)$ $\int\limits_a^b L_0(x)\,dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, если $m=1$, $\theta_1 = 0$;

$\alpha_2)$ $\int\limits_a^b L_1(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\big[f(a)+f(b)\big]$, если $m=2$, $\theta_1=-1$, $\theta_2=1$;

$\alpha_3)$ $\int\limits_a^b L_2(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$, если $m=3$, $\theta_1=-1$, $\theta_2=0$, $\theta_3=1$.

b) Считая, что $f \in C^{(m)}[a,b]$ и полагая $M_m = \max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(m)}(x)|$, оцените величину R_m абсолютной погрешности в формуле

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b L_{m-1}(x)\,dx + R_m \tag{$*$}$$

и покажите, что $|R_m| \leqslant \frac{M_m}{m!}\int\limits_a^b |\omega_m(x)|\,dx$.

c) В случаях $\alpha_1)$, $\alpha_2)$, $\alpha_3)$ формула $(*)$ называется соответственно формулой *прямоугольников*, *трапеций* и *парабол*. В последнем случае ее называют также формулой Симпсона[1]. Покажите, что в случаях $\alpha_1)$, $\alpha_2)$, $\alpha_3)$ имеют место следующие формулы:

$$R_1 = \frac{f'(\xi_1)}{4}(b-a)^2, \qquad R_2 = -\frac{f''(\xi_2)}{12}(b-a)^3, \qquad R_3 = -\frac{f^{(4)}(\xi_3)}{2880}(b-a)^5,$$

где $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in [a,b]$, а функция f принадлежит соответствующему классу $C^{(k)}[a,b]$.

d) Пусть f есть полином P. Какова наивысшая степень полиномов P, для которых точны формулы прямоугольников, трапеций и парабол соответственно?

Пусть $h = \frac{b-a}{n}$; $x_k = a + hk$, $k = 0,1,\ldots,n$; $y_k = f(x_k)$.

e) Покажите, что в следующей *формуле прямоугольников*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}) + R_1$$

остаток имеет вид $R_1 = \frac{f'(\xi)}{2}(b-a)h$, где $\xi \in [a,b]$.

[1] Т. Симпсон (1710 – 1761) — английский математик.

f) Покажите, что в следующей *формуле трапеций*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\big[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})\big] + R_2$$

остаток имеет вид $R_2 = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)h^2$, где $\xi \in [a,b]$.

g) Покажите, что в следующей *формуле Симпсона* (*формуле парабол*)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\big[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + \\ + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})\big] + R_3,$$

которая пишется при четных значениях n, остаток R_3 имеет вид

$$R_3 = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{180}(b-a)h^4,$$

где $\xi \in [a,b]$.

h) Исходя из соотношения

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

вычислите π с точностью до 10^{-3}, пользуясь формулами прямоугольников, трапеций и парабол. Обратите внимание на эффективность формулы Симпсона, которая по этой причине является наиболее распространенной *квадратурной* формулой (так называют формулы численного интегрирования в одномерном случае, отождествляя интеграл с площадью соответствующей криволинейной трапеции).

10. Преобразуя формулу (7), получите следующие виды записи остаточного члена формулы Тейлора, где положено $h = x - a$:

a) $\displaystyle \frac{h^n}{(n-1)!}\int_0^1 f^{(n)}(a+\tau h)(1-\tau)^{n-1}\,d\tau$;

b) $\displaystyle \frac{h^n}{n!}\int_0^1 f^{(n)}\big(x - h\sqrt[n]{t}\big)\,dt$.

11. Покажите, что важная формула (9) замены переменной в интеграле остается в силе и без предположения монотонности функции замены.

§ 4. Некоторые приложения интеграла

Использование интеграла в приложениях часто происходит по одной и той же схеме, которую по этой причине полезно изложить один раз в чистом виде. Этому посвящен первый пункт настоящего параграфа.

1. Аддитивная функция ориентированного промежутка и интеграл. Обсуждая в § 2 свойство аддитивности интеграла, мы ввели понятие *аддитивной функции ориентированного промежутка.* Напомним, что это функция $(\alpha, \beta) \mapsto I(\alpha, \beta)$, которая каждой упорядоченной паре (α, β) точек $\alpha, \beta \in [a, b]$ фиксированного отрезка $[a, b]$ ставит в соответствие число $I(\alpha, \beta)$, причем так, что для любой тройки точек $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ выполнено равенство

$$I(\alpha, \gamma) = I(\alpha, \beta) + I(\beta, \gamma). \tag{1}$$

Из (1) при $\alpha = \beta = \gamma$ следует, что $I(\alpha, \alpha) = 0$, а при $\alpha = \gamma$ получаем, что $I(\alpha, \beta) + I(\beta, \alpha) = 0$, т. е. $I(\alpha, \beta) = -I(\beta, \alpha)$. В этом сказывается влияние порядка точек α, β.

Полагая

$$\mathcal{F}(x) = I(a, x),$$

в силу аддитивности функции I имеем

$$I(\alpha, \beta) = I(a, \beta) - I(a, \alpha) = \mathcal{F}(\beta) - \mathcal{F}(\alpha).$$

Таким образом, каждая аддитивная функция ориентированного промежутка имеет вид

$$I(\alpha, \beta) = \mathcal{F}(\beta) - \mathcal{F}(\alpha), \tag{2}$$

где $x \mapsto \mathcal{F}(x)$ — функция точки отрезка $[a, b]$.

Легко проверить, что верно и обратное, т. е. что любая функция $x \mapsto \mathcal{F}(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, порождает по формуле (2) аддитивную функцию ориентированного промежутка.

Приведем два типичных примера.

Пример 1. Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то функция $\mathcal{F}(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ порождает, в силу формулы (2), аддитивную функцию

$$I(\alpha, \beta) = \int\limits_\alpha^\beta f(t)\,dt.$$

Заметим, что в данном случае функция $\mathcal{F}(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$.

Пример 2. Пусть отрезок $[0,1]$ есть невесомая струна с бусинкой единичной массы, прикрепленной к струне в точке $x = 1/2$.

Пусть $\mathcal{F}(x)$ есть масса, находящаяся на отрезке $[0,x]$ струны. Тогда по условию

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1/2, \\ 1 & \text{при } 1/2 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Физический смысл аддитивной функции

$$I(\alpha,\beta) = \mathcal{F}(\beta) - \mathcal{F}(\alpha)$$

при $\beta > \alpha$ — масса, попавшая в полуинтервал $]\alpha,\beta]$.

Поскольку функция $\mathcal{F}$ разрывна, аддитивная функция $I(\alpha,\beta)$ в рассматриваемом случае не может быть представлена как интеграл Римана от некоторой функции — плотности массы. (Эта плотность, т. е. предел отношения массы промежутка к его длине, должна была бы равняться нулю в любой точке отрезка $[a,b]$, кроме точки $x = 1/2$, где она должна была бы быть бесконечной.)

Теперь докажем полезное для дальнейшего достаточное условие того, что аддитивная функция порождается интегралом.

Утверждение 1. *Пусть аддитивная функция $I(\alpha,\beta)$, определенная для точек α, β отрезка $[a,b]$, такова, что существует функция $f \in \mathcal{R}[a,b]$, связанная с I следующим образом: для любого отрезка $[\alpha,\beta]$ такого, что $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$, выполняется соотношение*

$$\inf_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)(\beta-\alpha) \leqslant I(\alpha,\beta) \leqslant \sup_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)(\beta-\alpha).$$

Тогда

$$I(a,b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

◀ Пусть P — произвольное разбиение $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ отрезка $[a,b]$; $m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$.

Для каждого отрезка $[x_{i-1},x_i]$ разбиения P имеем по условию

$$m_i\Delta x_i \leqslant I(x_{i-1},x_i) \leqslant M_i\Delta x_i.$$

Суммируя эти неравенства и пользуясь аддитивностью функции $I(\alpha,\beta)$, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqslant I(a,b) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Крайние члены в последнем соотношении суть знакомые нам нижняя и верхняя суммы Дарбу функции f, соответствующие разбиению P отрезка $[a,b]$. При $\lambda(P) \to 0$ обе они имеют своим пределом интеграл от f по отрезку $[a,b]$. Таким образом, переходя к пределу при $\lambda(P) \to 0$, получаем, что

$$I(a,b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx. \quad \blacktriangleright$$

Продемонстрируем теперь утверждение 1 в работе.

2. Длина пути. Пусть частица движется в пространстве $\mathbb{R}^3$, и пусть известен закон ее движения $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — прямоугольные декартовы координаты точки в момент времени t.

Мы хотим определить длину $l[a,b]$ пути, пройденного точкой за промежуток времени $a \leqslant t \leqslant b$.

Уточним некоторые понятия.

Определение 1. *Путем* в пространстве $\mathbb{R}^3$ называется отображение $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ числового промежутка в пространство $\mathbb{R}^3$, задаваемое непрерывными на этом промежутке функциями $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Определение 2. Если $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ есть путь, для которого областью изменения параметра t является отрезок $[a,b]$, то точки

$$A = (x(a), y(a), z(a)), \qquad B = (x(b), y(b), z(b))$$

пространства $\mathbb{R}^3$ называются соответственно *началом* и *концом* пути.

Определение 3. Путь называется *замкнутым*, если он имеет и начало, и конец и эти точки совпадают.

Определение 4. Если $\Gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ — путь, то образ $\Gamma(I)$ промежутка I в пространстве $\mathbb{R}^3$ называется *носителем* пути.

Носитель абстрактного пути может оказаться вовсе не тем, что мы хотели бы назвать линией. Существуют примеры путей, носители которых, например, содержат целый трехмерный куб (так называемые «кривые» Пеано). Однако если функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ достаточно регулярны (как, например, в случае механического движения, когда они дифференцируемы), то ничего противоречащего нашей интуиции, как можно строго проверить, заведомо не произойдет.

Определение 5. Путь $\Gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$, для которого отображение $I \to \to \Gamma(I)$ взаимно однозначно, называется *простым путем* или *параметризованной кривой*, а его носитель — *кривой* в $\mathbb{R}^3$.

Определение 6. Замкнутый путь $\Gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ называется *простым замкнутым путем* или *простой замкнутой кривой*, если путь $\Gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ является простым.

Значит, простой путь отличается от произвольного пути тем, что при движении по его носителю мы не возвращаемся в прежние точки, т. е. не пересекаем свою траекторию нигде, кроме, быть может, ее конца, если простой путь замкнут.

Определение 7. Путь $\Gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ называется путем *данного класса гладкости*, если задающие его функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ принадлежат указанному классу.

(Например, классу $C[a, b]$, $C^{(1)}[a, b]$ или $C^{(k)}[a, b]$.)

Определение 8. Путь $\Gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ называется *кусочно гладким*, если отрезок $[a, b]$ можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых соответствующее ограничение отображения Γ задается непрерывно дифференцируемыми функциями.

Именно гладкие пути, т. е. пути класса $C^{(1)}$, и кусочно гладкие пути мы и будем сейчас рассматривать.

Вернемся к исходной задаче, которую теперь можно сформулировать как задачу определения длины гладкого пути $\Gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$.

Наши исходные представления о длине $l[\alpha, \beta]$ пути, пройденного в промежуток времени $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, таковы: во-первых, если $\alpha < \beta < \gamma$, то

$$l[\alpha, \gamma] = l[\alpha, \beta] + l[\beta, \gamma],$$

и, во-вторых, если $\boldsymbol{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ есть скорость точки в момент t, то

$$\inf_{x\in[\alpha,\beta]} |\boldsymbol{v}(t)|(\beta-\alpha) \leqslant l[\alpha,\beta] \leqslant \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |\boldsymbol{v}(t)|(\beta-\alpha).$$

Таким образом, если функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$, то в силу утверждения 1 мы однозначно приходим к формуле

$$l[a,b] = \int\limits_a^b |\boldsymbol{v}(t)|\,dt = \int\limits_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\,dt, \tag{3}$$

которую и принимаем теперь как определение длины гладкого пути $\Gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$.

Если $z(t) \equiv 0$, то носитель пути лежит в плоскости и формула (3) приобретает вид

$$l[a,b] = \int\limits_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt. \tag{4}$$

Пример 3. Опробуем формулу (4) на знакомом объекте. Пусть точка движется в плоскости по закону

$$\begin{aligned} x &= R\cos 2\pi t, \\ y &= R\sin 2\pi t. \end{aligned} \tag{5}$$

За промежуток времени $[0,1]$ точка один раз пробежит окружность радиуса R, т. е. пройдет путь длины $2\pi R$, если длина окружности вычисляется по этой формуле.

Проведем расчет по формуле (4):

$$l[0,1] = \int\limits_0^1 \sqrt{(-2\pi R\sin 2\pi t)^2 + (2\pi R\cos 2\pi t)^2}\,dt = 2\pi R.$$

Несмотря на ободряющее совпадение результатов, проведенное рассуждение содержит некоторые логические пробелы, на которые стоит обратить внимание.

Функции $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, если принять их школьное определение, суть декартовы координаты образа p точки $p_0 = (1,0)$ при повороте на угол α.

Величина α с точностью до знака измеряется длиной дуги окружности $x^2 + y^2 = 1$, заключенной между p_0 и p. Таким образом, при этом подходе к тригонометрическим функциям их определение опирается на понятие длины дуги окружности и, значит, вычисляя выше длину окружности, мы совершили в известном смысле логический круг, задав параметризацию окружности в виде (5).

Однако эта трудность, как мы сейчас увидим, не принципиальная, ибо параметризацию окружности можно задать, вовсе не прибегая к тригонометрическим функциям.

Рассмотрим задачу о вычислении длины графика функции $y = f(x)$, определенной на некотором отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Имеется в виду вычисление длины пути $\Gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$, имеющего специальный вид параметризации

$$x \mapsto (x, f(x)),$$

из которого можно заключить, что отображение $\Gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ взаимно однозначно. Значит, по определению 5 график функции есть кривая в $\mathbb{R}^2$.

Формула (4) в данном случае упрощается, поскольку, полагая в ней $x = t,\ y = f(t)$, получаем

$$l[a, b] = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dt. \tag{6}$$

В частности, если рассмотреть полуокружность

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

окружности $x^2 + y^2 = 1$, то для нее получим

$$l = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 + \left[\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}\right]^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{7}$$

Но под знаком последнего интеграла стоит неограниченная функция и, значит, он не существует в традиционном, изученном нами смысле. Означает ли это, что полуокружность не имеет длины? Пока это только означает, что указанная параметризация полуокружности не удовлетворяет условиям непрерывности функций $\dot{x}$, $\dot{y}$, при которых была выписана формула (4), а значит, и формула (6). Поэтому нам следует либо подумать о расширении понятия интеграла, с тем чтобы интеграл в (7) получил определенный смысл, либо перейти к параметризации, удовлетворяющей условиям применимости формулы (6).

Заметим, что если взятую параметризацию рассматривать на любом отрезке вида $[-1+\delta, 1-\delta]$, где $-1 < -1+\delta < 1-\delta < 1$, то на нем формула (6) применима и по ней находим длину

$$l[-1+\delta, 1-\delta] = \int\limits_{-1+\delta}^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

дуги окружности, лежащей над отрезком $[-1+\delta, 1-\delta]$.

Естественно поэтому считать, что длина l полуокружности есть предел $\lim\limits_{\delta\to+0} l[-1+\delta, 1-\delta]$. В таком же смысле можно понимать и интеграл в соотношении (7). Этим естественно возникающим расширением понятия интеграла Римана мы подробнее займемся в следующем параграфе.

Что же касается рассматриваемого конкретного вопроса, то, даже не меняя параметризацию, можно найти, например, длину $l\Big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big]$ дуги единичной окружности, опирающейся на хорду, конгруэнтную радиусу окружности. Тогда (уже из геометрических соображений) должно быть $l = 3\cdot l\Big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big]$.

Заметим также, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{(1-x^2+x^2)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \sqrt{1-x^2}\,dx - \\ -\frac{1}{2}\int \frac{x\,d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = 2\int \sqrt{1-x^2}\,dx - x\sqrt{1-x^2},$$

поэтому

$$l[-1+\delta, 1-\delta] = 2\int\limits_{-1+\delta}^{1-\delta} \sqrt{1-x^2}\,dx - \Big(x\sqrt{1-x^2}\Big)\Big|_{-1+\delta}^{1-\delta}.$$

Таким образом,

$$l = \lim_{\delta\to+0} l[-1+\delta, 1-\delta] = 2\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Длина полуокружности единичного радиуса обозначается символом π, и мы приходим к следующей формуле:

$$\pi = 2\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Последний интеграл есть обычный (а не обобщенный) интеграл Римана, и его можно вычислить с любой точностью.

Если для $x \in [-1, 1]$ величину $l[x, 1]$ назвать $\arccos x$, то в силу проведенных выше выкладок

$$\arccos x = \int\limits_{x}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

или

$$\arccos x = x\sqrt{1-x^2} + 2\int\limits_{x}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Если считать длину дуги первичным понятием, то первичными надо считать функцию $x \mapsto \arccos x$, введенную только что, и функцию $x \mapsto \arcsin x$, которую можно ввести аналогично, а функции $x \mapsto \cos x$ и $x \mapsto \sin x$ тогда можно получить как им обратные на соответствующих отрезках. В сущности, именно это и делается в элементарной геометрии.

Пример с длиной полуокружности поучителен не только тем, что, разбирая его, мы сделали, быть может, небесполезное для кого-то замечание об определении тригонометрических функций, но еще и тем, что он естественно порождает вопрос о том, не зависит ли вообще определенное формулой (3) число от выбора системы координат x, y, z и параметризации кривой, когда речь идет о длине кривой.

Оставляя читателю анализ роли пространственных декартовых координат, рассмотрим здесь роль параметризации.

Уточним, что под *параметризацией* некоторой кривой в $\mathbb{R}^3$ мы подразумеваем задание простого пути $\Gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$, носителем которого является данная кривая. Точку или число $t \in I$ называют *параметром*, а промежуток I — *областью изменения параметра*.

Если $\Gamma\colon I \to \mathcal{L}$ и $\widetilde{\Gamma}\colon \tilde{I} \to \mathcal{L}$ — два взаимно однозначных отображения с одним и тем же множеством значений $\mathcal{L}$, то естественно возникают взаимно однозначные отображения $\widetilde{\Gamma}^{-1} \circ \Gamma\colon I \to \tilde{I}$, $\Gamma^{-1} \circ \widetilde{\Gamma}\colon \tilde{I} \to I$ между областями определения I и $\tilde{I}$ этих отображений.

В частности, если имеются две параметризации одной кривой, то между самими параметрами $t \in I$, $\tau \in \widetilde{I}$ устанавливается естественное соответствие $t = t(\tau)$ или $\tau = \tau(t)$, позволяющее по параметру точки в одной параметризации определять ее же параметр в другой параметризации.

Пусть $\Gamma\colon [a,b] \to \mathcal{L}$ и $\widetilde{\Gamma}\colon [\alpha,\beta] \to \mathcal{L}$ — две параметризации одной кривой с соответствием $\Gamma(a) = \widetilde{\Gamma}(\alpha)$, $\Gamma(b) = \widetilde{\Gamma}(\beta)$ начала и конца. Тогда *функции* $t = t(\tau)$, $\tau = \tau(t)$ *перехода* от одного параметра к другому будут непрерывными, строго монотонными отображениями отрезков $a \leqslant t \leqslant b$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$ друг на друга с соответствием начал $a \leftrightarrow \alpha$ и концов $b \leftrightarrow \beta$.

Если кривые Γ и $\widetilde{\Gamma}$ при этом задавались такими тройками $(x(t), y(t), z(t))$, $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t))$ гладких функций, что $|\boldsymbol{v}(t)|^2 = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t) \neq 0$ на $[a,b]$ и $|\tilde{\boldsymbol{v}}(\tau)|^2 = \dot{\tilde{x}}^2(\tau) + \dot{\tilde{y}}^2(\tau) + \dot{\tilde{z}}^2(\tau) \neq 0$ на $[\alpha,\beta]$, то можно проверить, что в этом случае функции перехода $t = t(\tau)$ и $\tau = \tau(t)$ будут гладкими функциями, имеющими положительную производную на отрезке своего определения.

Мы не станем сейчас заниматься проверкой этого утверждения, оно будет в свое время получено как одно из следствий важной теоремы о неявной функции. В данный же момент высказанное утверждение служит скорее мотивировкой следующего определения.

Определение 9. Говорят, что путь $\widetilde{\Gamma}\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^3$ получен из пути $\Gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ *допустимым изменением параметризации*, если существует такое гладкое отображение $T\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$, что $T(\alpha) = a$, $T(\beta) = b$, $T'(\tau) > 0$ на $[\alpha,\beta]$ и $\widetilde{\Gamma} = \Gamma \circ T$.

Проверим теперь следующее общее

Утверждение 2. *Если гладкий путь $\widetilde{\Gamma}\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^3$ получен из гладкого пути $\Gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ допустимым изменением параметризации, то длины этих путей совпадают.*

◀ Пусть $\widetilde{\Gamma}\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ и $\Gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ задаются соответственно тройками $\tau \mapsto (\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{z}(\tau))$ и $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ гладких функций, а $t = t(\tau)$ — допустимое изменение параметризации, при котором

$$\tilde{x}(\tau) = x(t(\tau)), \qquad \tilde{y}(\tau) = y(t(\tau)), \qquad \tilde{z}(\tau) = z(t(\tau)).$$

Используя определение (3) длины пути, правило дифференцирования композиции функций и правило замены переменной в интеграле, имеем

$$\int\limits_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, dt =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2(t(\tau)) + \dot{y}^2(t(\tau)) + \dot{z}^2(t(\tau))}\, t'(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\left[\dot{x}(t(\tau))t'(\tau)\right]^2 + \left[\dot{y}(t(\tau))t'(\tau)\right]^2 + \left[\dot{z}(t(\tau))t'(\tau)\right]^2}\, d\tau =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\dot{\tilde{x}}^2(\tau) + \dot{\tilde{y}}^2(\tau) + \dot{\tilde{z}}^2(\tau)}\, d\tau. \quad ▶$$

Итак, в частности, показано, что длина кривой не зависит от ее гладкой параметризации.

Длину кусочно гладкого пути определяют как сумму длин гладких путей, на которые он подразделяется; поэтому легко проверить, что и длина кусочно гладкого пути не меняется при допустимом изменении его параметризации.

Заканчивая обсуждение понятия длины пути и длины кривой (о которой мы после утверждения 2 теперь вправе говорить), рассмотрим еще один

Пример 4. Найдем длину эллипса, задаваемого каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a \geqslant b > 0). \tag{8}$$

Взяв параметризацию $x = a \sin\psi$, $y = b\cos\psi$, $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$, получаем

$$l = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(a\cos\psi)^2 + (-b\sin\psi)^2}\, d\psi = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2\psi}\, d\psi =$$

$$= 4a \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \psi}\, d\psi = 4a \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}\, d\psi,$$

где $k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ — квадрат эксцентриситета эллипса.

Интеграл

$$E(k, \varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}\, d\psi$$

не выражается в элементарных функциях и ввиду указанной связи с эллипсом называется эллиптическим. Точнее, $E(k, \varphi)$ — *эллиптический интеграл второго рода* в форме Лежандра. Значение, которое он принимает при $\varphi = \pi/2$, зависит только от k, обозначается через $E(k)$ и называется *полным эллиптическим интегралом второго рода.* Итак, $E(k) = E(k, \pi/2)$, поэтому длина эллипса в этих обозначениях имеет вид $l = 4aE(k)$.

3. Площадь криволинейной трапеции. Рассмотрим фигуру $aABb$ (рис. 48), называемую *криволинейной трапецией.* Фигура ограничена вертикальными отрезками aA, bB, отрезком $[a, b]$ оси абсцисс и кривой $\overset{\frown}{AB}$, являющейся графиком некоторой интегрируемой на $[a, b]$ функции $y = f(x)$.

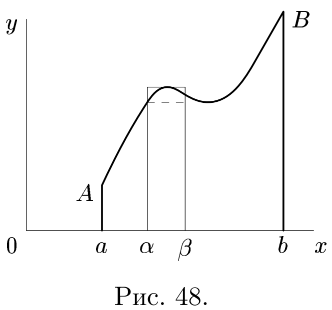


Рис. 48.

Пусть $[\alpha, \beta]$ — отрезок, содержащийся в $[a, b]$. Обозначим через $S(\alpha, \beta)$ площадь соответствующей ему криволинейной трапеции $\alpha f(\alpha) f(\beta) \beta$.

Наши представления о площади таковы: если $a \leqslant \alpha < \beta < \gamma \leqslant b$, то

$$S(\alpha, \gamma) = S(\alpha, \beta) + S(\beta, \gamma)$$

(аддитивность площади) и

$$\inf_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)(\beta - \alpha) \leqslant S(\alpha, \beta) \leqslant \sup_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)(\beta - \alpha)$$

(площадь объемлющей фигуры не меньше площади объемлемой).

Значит, в силу утверждения 1, площадь указанной фигуры надо вычислять по формуле

$$S(a,b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{9}$$

Пример 5. Используем формулу (9) для подсчета площади эллипса, заданного каноническим уравнением (8).

В силу симметрии фигуры и предполагаемой аддитивности площади, достаточно найти площадь только той части эллипса, которая расположена в первом квадранте, и затем учетверить полученный результат. Проведем вычисления:

$$S = 4\int\limits_0^a \sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\,dx = 4b\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\,a\cos t\,dt =$$
$$= 4ab\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = 2ab\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)\,dt = \pi ab.$$

По дороге мы сделали замену $x = a\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

Итак, $S = \pi ab$. В частности, при $a = b = R$ получаем формулу πR^2 площади круга радиуса R.

Замечание. Необходимо отметить, что формула (9) дает площадь криволинейной трапеции при условии, что $f(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$. Если же f — произвольная интегрируемая функция, то интеграл (9), очевидно, даст алгебраическую сумму площадей соответствующих криволинейных трапеций, лежащих над и под осью абсцисс. Причем площади трапеций, лежащих над осью абсцисс, будут суммироваться со знаком плюс, а площади трапеций, лежащих под осью, — со знаком минус.

4. Объем тела вращения. Пусть теперь изображенная на рис. 48 криволинейная трапеция вращается вокруг отрезка $[a,b]$. Определим объем получающегося при этом тела.

Обозначим через $V(\alpha,\beta)$ объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции $\alpha f(\alpha) f(\beta)\beta$ (см. рис. 48), отвечающей отрезку $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$.

По нашим представлениям об объеме, должны быть справедливы следующие соотношения: если $a \leqslant \alpha < \beta < \gamma \leqslant b$, то

$$V(\alpha, \gamma) = V(\alpha, \beta) + V(\beta, \gamma)$$

и

$$\pi\Big(\inf_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)\Big)^2(\beta-\alpha) \leqslant V(\alpha,\beta) \leqslant \pi\Big(\sup_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)\Big)^2(\beta-\alpha).$$

В последнем соотношении мы оценили объем $V(\alpha, \beta)$ через объемы вписанного и описанного цилиндров и воспользовались формулой объема цилиндра (которую нетрудно получить, если уже найдена площадь круга).

Тогда в силу утверждения 1

$$V(a,b) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx. \tag{10}$$

Пример 6. Вращением вокруг оси абсцисс полукруга, ограниченного отрезком $[-R, R]$ этой оси и дугой окружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leqslant x \leqslant R$, можно получить трехмерный шар радиуса R, объем которого легко вычислить по формуле (10):

$$V = \pi \int\limits_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Подробнее об измерении длин, площадей и объемов будет сказано в части II курса. Тогда же мы решим и вопрос об инвариантности данных определений.

5. Работа и энергия. Энергетические затраты, связанные с перемещением тела под действием постоянной силы в направлении действия силы, измеряют произведением $F \cdot S$ величины силы на величину перемещения. Эта величина называется работой силы на данном перемещении. В общем случае направление данной силы и перемещение могут быть неколлинеарны (например, везем за веревочку санки), и тогда работа определяется как скалярное произведение $\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{S} \rangle$ вектора силы и вектора перемещения.

Рассмотрим некоторые примеры вычисления работы и использования связанного с ней понятия энергии.

Пример 7. Работа, которую нужно совершить против силы тяжести, чтобы поднять вертикально вверх тело массы m с уровня h_1 над поверхностью Земли на уровень h_2, в силу данного определения равна $mg(h_2 - h_1)$. Предполагается, что вся операция происходит у поверхности Земли, когда изменением силы тяжести mg можно пренебречь. Общий случай разобран в примере 10.

Пример 8. Пусть имеется идеально упругая пружина, один конец которой закреплен в точке 0 числовой оси, а другой находится в точке x. Известно, что сила, с которой при этом приходится удерживать этот конец пружины, равна kx, где k — коэффициент жесткости пружины.

Вычислим работу, которую надо совершить, чтобы переместить подвижный конец пружины из положения $x = a$ в положение $x = b$.

Считая работу $A(\alpha, \beta)$ аддитивной функцией промежутка $[\alpha, \beta]$ и принимая, что верны оценки

$$\inf_{x \in [\alpha,\beta]} (kx)(\beta - \alpha) \leqslant A(\alpha, \beta) \leqslant \sup_{x \in [\alpha,\beta]} (kx)(\beta - \alpha),$$

получаем в силу утверждения 1, что

$$A(a, b) = \int_a^b kx\,dx = \left.\frac{kx^2}{2}\right|_a^b .$$

Это работа против силы. Работа же самой силы пружины на том же перемещении отличается только знаком.

Функция $U(x) = \frac{kx^2}{2}$, которую мы нашли, позволяет вычислять работу, которую мы совершаем, меняя состояние пружины, а значит, и ту работу, которую пружина может совершить при возвращении в исходное состояние. Такая функция $U(x)$, зависящая только от конфигурации системы, называется *потенциальной энергией системы.* Из построения видно, что производная от нее дает силу пружины с обратным знаком.

Если точка массы m движется вдоль оси под действием указанной упругой силы, то ее координата $x(t)$ как функция времени удовлетворяет уравнению

$$m\ddot{x} = -kx. \tag{11}$$

Мы уже однажды проверяли (см. гл. V, § 6, п. 6), что величина

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = K(t) + U(x(t)) = E, \tag{12}$$

представляющая из себя сумму кинетической и (как мы теперь понимаем) потенциальной энергий системы, остается во время движения постоянной.

Пример 9. Теперь рассмотрим еще один пример. В нем встретится сразу целый ряд понятий, которые мы ввели и освоили в дифференциальном и интегральном исчислении.

Заметим сначала, что по аналогии с функцией (12), записанной для конкретной механической системы, удовлетворяющей уравнению (11), для произвольного уравнения вида

$$\ddot{s}(t) = f(s(t)), \tag{13}$$

где $f(s)$ — заданная функция, можно проверить, что сумма

$$\frac{\dot{s}^2}{2} + U(s) = E \tag{14}$$

не меняется со временем, если $U'(s) = -f(s)$.

Действительно,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{s}^2}{dt} + \frac{dU(s)}{dt} = \dot{s}\ddot{s} + \frac{dU}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s}(\ddot{s} - f(s)) = 0.$$

Таким образом, из (14), считая E постоянной величиной, последовательно находим

$$\dot{s} = \pm\sqrt{2(E - U(s))}$$

(где знак корня должен соответствовать знаку производной $\frac{ds}{dt}$), затем

$$\frac{dt}{ds} = \pm\frac{1}{\sqrt{2(E - U(s))}}$$

и, наконец,

$$t = c_1 \pm \int \frac{ds}{\sqrt{2(E - U(s))}}.$$

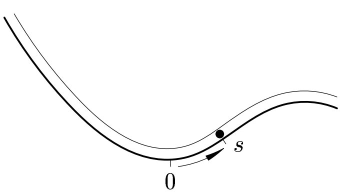


Рис. 49.

Следовательно, используя закон сохранения «энергии» (14) уравнения (13), нам удалось в принципе решить это уравнение, но найдя не функцию $s(t)$, а обратную к ней функцию $t(s)$.

Уравнение (13) возникает, например, при описании движения точки вдоль заданной кривой. Пусть частица перемещается под действием силы тяжести по узкому идеально гладкому желобу (рис. 49).

Пусть $s(t)$ — расстояние вдоль желоба (т. е. длина пути) от некоторой фиксированной точки O — начала отсчета — до точки, в которой находится частица в момент t. Ясно, что тогда $\dot{s}(t)$ есть величина скорости частицы, а $\ddot{s}(t)$ — величина тангенциальной составляющей ее ускорения, которая должна равняться величине тангенциальной составляющей силы тяжести в данной точке желоба. Ясно также, что тангенциальная составляющая силы тяжести зависит только от точки желоба, т. е. зависит только от s, ибо s можно считать параметром, параметризующим кривую[1)], с которой мы отождествляем желоб. Если эту составляющую силы тяжести обозначить через $f(s)$, то мы получим, что

$$m\ddot{s} = f(s).$$

Для данного уравнения сохраняться будет величина

$$\frac{1}{2}m\dot{s}^2 + U(s) = E,$$

где $U'(s) = -f(s)$.

Поскольку слагаемое $\frac{1}{2}m\dot{s}^2$ есть кинетическая энергия точки, а движение вдоль желоба происходит без трения, то можно, минуя вычисления, догадаться, что функция $U(s)$ с точностью до постоянного слагаемого должна иметь вид $mgh(s)$, где $mgh(s)$ — потенциальная энергия точки, находящейся на высоте $h(s)$ в поле тяжести.

Если в начальный момент $t = 0$ было $\dot{s}(0) = 0$, $s(0) = s_0$ и $h(s_0) = h_0$, то из соотношения

$$\frac{2E}{m} = \dot{s}^2 + 2gh(s) = C$$

находим, что $C = 2gh(s_0)$, поэтому $\dot{s}^2 = 2g(h_0 - h(s))$,

$$t = \int\limits_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{2g(h_0 - h(s))}}. \tag{15}$$

[1)]Параметризация кривой посредством ее же длины называется *натуральной*, а s в этом случае называют *натуральным параметром*.

В частности, если, как в случае маятника, точка движется вдоль окружности радиуса R, отсчет длины s ведется от нижней точки O окружности, а начальные условия состоят в том, что при $t = 0$ $\dot{s}(0) = 0$ и дан начальный угол $-\varphi_0$ отклонения (рис. 50), то, как легко проверить, выражая s и $h(s)$ через угол отклонения φ, получим

$$t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{2g(h_0 - h(s))}} = \int_{-\varphi_0}^{\varphi} \frac{R\,d\psi}{\sqrt{2gR(\cos\psi - \cos\varphi_0)}},$$

или

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{g}} \int_{-\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}}}. \tag{16}$$

Таким образом, для полупериода $\frac{1}{2}T$ качания маятника получаем

$$\frac{1}{2}T = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{g}} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{d\psi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}}}, \tag{17}$$

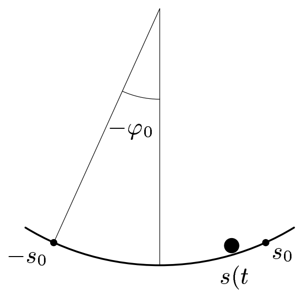


Рис. 50.

откуда после подстановки $\frac{\sin(\psi/2)}{\sin(\varphi_0/2)} = \sin\theta$ находим

$$T = 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int_{0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}, \tag{18}$$

где $k^2 = \sin^2\frac{\varphi_0}{2}$.

Напомним, что функция

$$F(k, \varphi) = \int_{0}^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}$$

называется *эллиптическим интегралом первого рода* в форме Лежандра. При $\varphi = \pi/2$ она зависит только от k^2, обозначается $K(k)$ и называется *полным эллиптическим интегралом первого рода*. Таким образом, период колебаний маятника равен

$$T = 4\sqrt{\frac{R}{g}}K(k). \tag{19}$$

Если угол φ_0 начального отклонения мал, то можно положить $k = 0$ и тогда получим приближенную формулу

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}. \tag{20}$$

Теперь, когда формула (18) получена, все же следует проанализировать весь ход рассуждений, и тогда мы заметим, что под знаками интегралов (15) – (17) стоят неограниченные на отрезке интегрирования функции. Подобная трудность нам уже встречалась при рассмотрении длины кривой, и мы примерно представляем себе, как и какой смысл можно придать интегралам (15) – (17).

Но раз этот вопрос возник вторично, то его следует разобрать в точной математической постановке, что и будет сделано в следующем параграфе.

Пример 10. Тело массы m совершает подъем над поверхностью Земли по траектории $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$, где t — время, $a \leqslant t \leqslant b$, а x, y, z — декартовы координаты точки в пространстве. Необходимо вычислить работу тела против силы тяжести на промежутке времени $[a, b]$.

Работа $A(\alpha, \beta)$ есть аддитивная функция промежутка $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

Постоянная сила $\boldsymbol{F}$ при действии на тело, движущееся с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$, за время h совершает работу $\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}h\rangle = \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}\rangle h$, поэтому представляется естественной оценка

$$\inf_{t\in[\alpha,\beta]} \langle \boldsymbol{F}(p(t)), \boldsymbol{v}(t)\rangle(\beta - \alpha) \leqslant A(\alpha, \beta) \leqslant \sup_{t\in[\alpha,\beta]} \langle \boldsymbol{F}(p(t)), \boldsymbol{v}(t)\rangle(\beta - \alpha),$$

где $\boldsymbol{v}(t)$ — скорость тела в момент t, $p(t)$ — точка пространства, в которой находится тело в момент t, а $\boldsymbol{F}(p(t))$ — сила, которая в точке $p = p(t)$ действует на тело.

Если функция $\langle \boldsymbol{F}(p(t)), \boldsymbol{v}(t)\rangle$ окажется интегрируемой, то в силу утверждения 1 мы должны считать, что

$$A(a, b) = \int_a^b \langle \boldsymbol{F}(p(t)), \boldsymbol{v}(t)\rangle \, dt.$$

В нашем случае $\boldsymbol{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$, и если $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то по закону всемирного тяготения находим

$$\boldsymbol{F}(p) = \boldsymbol{F}(x, y, z) = G\frac{mM}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r} = \frac{GmM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z),$$

где M — масса Земли, а ее центр предполагается совпадающим с началом системы координат.

Тогда

$$\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}\rangle(t) = GmM \frac{x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t) + z(t)\dot{z}(t)}{\big(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)\big)^{3/2}},$$

поэтому

$$\int_a^b \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}\rangle(t)\, dt = \frac{1}{2} GmM \int_a^b \frac{\big(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)\big)'}{\big(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)\big)^{3/2}}\, dt =$$

$$= -\left.\frac{GmM}{\big(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)\big)^{1/2}}\right|_a^b = -\left.\frac{GmM}{|\boldsymbol{r}(t)|}\right|_a^b.$$

Итак,

$$A(a, b) = \frac{GmM}{|\boldsymbol{r}(b)|} - \frac{GmM}{|\boldsymbol{r}(a)|}.$$

Мы обнаружили, что искомая работа зависит только от величин $|\boldsymbol{r}(a)|$, $|\boldsymbol{r}(b)|$ удаления тела m от центра Земли в начальный и конечный моменты времени рассматриваемого промежутка $[a, b]$.

Полагая

$$U(r) = \frac{GM}{r},$$

получаем, что работа против силы тяжести по перемещению тела массы m из любой точки сферы радиуса r_0 в любую точку сферы радиуса r_1 вычисляется по формуле

$$A_{r_0 r_1} = m(U(r_0) - U(r_1)).$$

Функция $U(r)$ называется *потенциалом Ньютона.* Если через R обозначить радиус Земли, то, поскольку $\frac{GM}{R^2} = g$, функцию $U(r)$ можно переписать в виде

$$U(r) = \frac{gR^2}{r}.$$

Учитывая это, можно получить следующее выражение для работы, необходимой для выхода из поля тяготения Земли, точнее, для увода массы m с поверхности Земли на бесконечное расстояние от центра Земли. Под этой величиной естественно понимать предел $\lim\limits_{r\to+\infty} A_{Rr}$.

Итак, *работа выхода*:

$$A = A_{R\infty} = \lim_{r \to +\infty} A_{Rr} = \lim_{r \to +\infty} m \left(\frac{gR^2}{R} - \frac{gR^2}{r} \right) = mgR.$$

Задачи и упражнения

1. На рисунке 51 изображен график зависимости $F = F(x)$ силы, действующей вдоль оси абсцисс на пробную частицу, находящуюся в точке x этой оси.

a) Нарисуйте в той же системе координат эскиз потенциала этой силы.

b) Изобразите потенциал силы $-F(x)$.

c) Исследуйте, в каком из разобранных случаев положение x_0 является устойчивым положением равновесия и с каким свойством потенциала это связано.

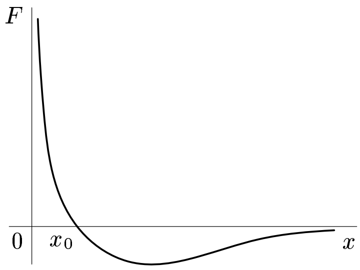


Рис. 51.

2. На основе результата примера 10 вычислите скорость, которую должно иметь тело, чтобы оно вышло из поля тяготения Земли (вторая космическая скорость для Земли).

3. На основе примера 9

a) выведите уравнение $R\ddot{\varphi} = g \sin \varphi$ колебаний математического маятника;

b) считая колебания малыми, получите его приближенное решение;

c) определите по приближенному решению период колебаний маятника и сравните результат с формулой (20).

4. По горизонтальной плоскости равномерно со скоростью v катится без проскальзывания колесо радиуса r. Пусть в момент $t = 0$ верхняя точка A колеса имеет координаты $(0, 2r)$ в системе декартовых координат, ось абсцисс которой лежит в указанной плоскости и направлена по вектору скорости.

a) Запишите закон движения $t \mapsto (x(t), y(t))$ точки A.

b) Найдите скорость точки A как функцию времени.

c) Изобразите графически траекторию точки A (эта кривая называется *циклоидой*).

d) Найдите длину одной арки циклоиды (длину одного периода этой периодической кривой).

e) Циклоида обладает рядом интересных свойств, одно из которых, открытое Гюйгенсом[1)], состоит в том, что период колебаний циклоидального маятника (шарика, катающегося в циклоидальной ямке) не зависит от высоты его подъема над нижней точкой ямки. Попробуйте доказать это, опираясь на

[1)] Х. Гюйгенс (1629 – 1695) — нидерландский механик, физик, математик и астроном.

пример 9. (См. также задачу 6 следующего параграфа, посвященного несобственным интегралам.)

5. a) Исходя из рис. 52, объясните, почему если $y = f(x)$ и $x = g(y)$ — взаимно обратные непрерывные неотрицательные функции, равные нулю при $x = 0$ и $y = 0$ соответственно, то должно быть выполнено неравенство

$$xy \leqslant \int\limits_0^x f(t)\,dt + \int\limits_0^y g(t)\,dt.$$

b) Получите из a) неравенства Юнга

$$xy \leqslant \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

при $x, y \geqslant 0, \quad p, q > 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

c) Какой геометрический смысл имеет знак равенства в неравенствах задач a) и b)?

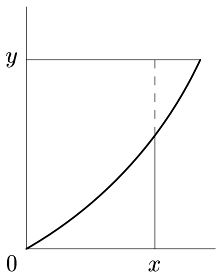


Рис. 52.

6. *Задача Бюффона*[1]. Число π можно вычислять следующим весьма неожиданным способом.

Берем большой лист бумаги, разлинованный параллельными прямыми с шагом h, и бросаем на него, никак специально не целясь, иголку длины $l < h$. Пусть мы бросили иголку N раз и пусть n раз из них иголка после падения пересекала какую-нибудь из прямых линий на листе. Если число N достаточно велико, то $\pi \approx \frac{2l}{ph}$, где $p = \frac{n}{N}$ можно трактовать как приближенное значение вероятности того, что при бросании иголка пересечет одну из линий.

Исходя из геометрических соображений, связанных с вычислением площадей, попробуйте дать удовлетворительное объяснение этому методу вычисления π.

§ 5. Несобственный интеграл

В предыдущем параграфе мы уже столкнулись с необходимостью несколько расширить понятие интеграла Римана. Там же на разборе конкретной задачи мы составили себе представление о том, в каком направлении и как это следует сделать. Настоящий параграф посвящен реализации этих представлений.

[1] Ж. Л. Л. Бюффон (1707 – 1788) — французский естествоиспытатель.

1. Определения, примеры и основные свойства несобственных интегралов

Определение 1. Пусть функция $x \mapsto f(x)$ определена на промежутке $[a, +\infty[$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, содержащемся в этом промежутке.

Величина

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

если указанный предел существует, называется несобственным интегралом Римана или просто *несобственным интегралом от функции f по промежутку* $[a, +\infty[$.

Сам символ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ также называют несобственным интегралом и тогда говорят, что несобственный интеграл *сходится*, если указанный предел существует, и *расходится* в противном случае. Таким образом, вопрос о сходимости несобственного интеграла равносилен вопросу о том, определен ли вообще этот несобственный интеграл или нет.

Пример 1. Исследуем, при каких значениях параметра α сходится или, что то же самое, определен несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}. \tag{1}$$

Поскольку

$$\int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \left.\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right|_1^b & \text{при} \quad \alpha \neq 1, \\ \ln x\big|_1^b & \text{при} \quad \alpha = 1, \end{cases}$$

то предел

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

существует только при $\alpha > 1$.

Итак,

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}, \quad \text{если} \quad \alpha > 1,$$

а при других значениях параметра α интеграл (1) расходится, т. е. не определен.

Определение 2. Пусть функция $x \mapsto f(x)$ определена на промежутке $[a, B[$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b] \subset [a, B[$. Величина

$$\int_a^B f(x)\,dx := \lim_{b \to B-0} \int_a^b f(x)\,dx,$$

если указанный предел существует, называется *несобственным интегралом от функции* f *по промежутку* $[a, B[$.

Суть этого определения состоит в том, что в любой окрестности конечной точки B функция f может оказаться неограниченной.

Аналогично, если функция $x \mapsto f(x)$ определена на промежутке $]A, b]$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b] \subset \,]A, b]$, то по определению полагают

$$\int_A^b f(x)\,dx := \lim_{a \to A+0} \int_a^b f(x)\,dx$$

и также по определению полагают

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Пример 2. Исследуем, при каких значениях параметра α сходится интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}. \tag{2}$$

Поскольку при $a \in \,]0, 1]$

$$\int_a^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \left. \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right|_a^1, & \text{если} \quad \alpha \neq 1, \\ \left. \ln x \right|_a^1, & \text{если} \quad \alpha = 1, \end{cases}$$

то предел

$$\lim_{a \to +0} \int_a^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

существует только при $\alpha < 1$.

Итак, интеграл (2) определен только при $\alpha < 1$.

Пример 3.

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} e^x dx = \lim_{a \to -\infty} \left(e^x \big|_a^0 \right) = \lim_{a \to -\infty} (1 - e^a) = 1.$$

Поскольку вопрос о сходимости несобственного интеграла решается одинаково как для несобственного интеграла по неограниченному промежутку, так и для несобственного интеграла от функции, неограниченной около одного из концов промежутка интегрирования, то в дальнейшем мы будем рассматривать оба эти случая вместе, введя следующее основное

Определение 3. Пусть $[a, \omega[$ — конечный или бесконечный промежуток, а $x \mapsto f(x)$ — функция, определенная на нем и интегрируемая на каждом отрезке $[a, b] \subset [a, \omega[$. Тогда по определению

$$\int_{a}^{\omega} f(x)\, dx := \lim_{b \to \omega} \int_{a}^{b} f(x)\, dx, \tag{3}$$

если указанный предел при $b \to \omega,\ b \in [a, \omega[$, существует.

В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматривая несобственный интеграл (3), мы будем предполагать, что подынтегральная функция удовлетворяет условиям определения 3.

Кроме того, для определенности мы будем пока считать, что несобственность интеграла связана только с верхним пределом интегрирования. Рассмотрение случая, когда особенность интеграла связана с нижним пределом, проводится дословно так же.

Из определения 3, свойств интеграла и свойств предела можно сделать следующее заключение о свойствах несобственного интеграла.

Утверждение 1. *Пусть $x \mapsto f(x)$ и $x \mapsto g(x)$ — функции, определенные на промежутке $[a, \omega[$ и интегрируемые на любом отрезке $[a, b] \subset [a, \omega[$. Пусть для них определены несобственные интегралы*

$$\int_{a}^{\omega} f(x)\, dx, \tag{4}$$

$$\int_{a}^{\omega} g(x)\, dx. \tag{5}$$

Тогда

a) *если* $\omega \in \mathbb{R}$ *и* $f \in \mathcal{R}[a, \omega]$, *то значения интеграла* (4), *понимаемого как в несобственном, так и в собственном смысле, совпадают*;

b) *при любых* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *функция* $(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x)$ *интегрируема в несобственном смысле на* $[a, \omega[$ *и справедливо равенство*

$$\int_a^\omega (\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x)\,dx = \lambda_1 \int_a^\omega f(x)\,dx + \lambda_2 \int_a^\omega g(x)\,d;$$

c) *если* $c \in [a, \omega[$, *то*

$$\int_a^\omega f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\omega f(x)\,dx;$$

d) *если* $\varphi\colon [\alpha, \gamma[\to [a, \omega[$ — *гладкое, строго монотонное отображение, причем* $\varphi(\alpha) = a$ *и* $\varphi(\beta) \to \omega$ *при* $\beta \to \gamma$, $\beta \in [\alpha, \gamma[$, *то несобственный интеграл от функции* $t \mapsto (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)$ *на* $[\alpha, \gamma[$ *существует и справедливо равенство*

$$\int_a^\omega f(x)\,dx = \int_a^\gamma (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\,dt.$$

◀ a) Следует из непрерывности функции

$$\mathcal{F}(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

на отрезке $[a, \omega]$, на котором $f \in \mathcal{R}[a, \omega]$.

b) Следует из того, что при $b \in [a, \omega[$

$$\int_a^b (\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x)\,dx = \lambda_1 \int_a^b f(x)\,dx + \lambda_2 \int_a^b g(x)\,dx.$$

c) Следует из равенства

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

справедливого при любых $b, c \in [a, \omega[$.

d) Следует из формулы

$$\int\limits_{a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{\beta} (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\,dt$$

замены переменной в определенном интеграле. ►

Замечание 1. К свойствам несобственного интеграла, выраженным в утверждении 1, следует еще добавить весьма полезное правило интегрирования по частям в несобственном интеграле, которое мы приведем в следующей формулировке:

Если $f, g \in C^{(1)}[a,\omega[$ и существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to\omega\\ x\in[a,\omega[}} (f\cdot g)(x)$, то функции $f\cdot g'$ и $f'\cdot g$ одновременно интегрируемы или не интегрируемы в несобственном смысле на $[a,\omega[$ и в случае интегрируемости справедливо равенство

$$\int\limits_{a}^{\omega} (f\cdot g')(x)\,dx = (f\cdot g)(x)\Big|_a^\omega - \int\limits_{a}^{\omega} (f'\cdot g)(x)\,dx,$$

где

$$(f\cdot g)(x)\Big|_a^\omega = \lim\limits_{\substack{x\to\omega\\ x\in[a,\omega[}} (f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(a).$$

◄ Это следует из формулы

$$\int\limits_{a}^{b} (f\cdot g')(x)\,dx = (f\cdot g)(x)\Big|_a^b - \int\limits_{a}^{b} (f'\cdot g)(x)\,dx$$

интегрирования по частям в собственном интеграле. ►

Замечание 2. Из пункта c) утверждения 1 видно, что несобственные интегралы

$$\int\limits_{a}^{\omega} f(x)\,dx, \qquad \int\limits_{c}^{\omega} f(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно. Таким образом, в несобственных интегралах, как и в рядах, сходимость не зависит от начального куска ряда или интеграла.

По этой причине иногда, ставя вопрос о сходимости несобственного интеграла, вообще опускают тот предел интегрирования, около которого интеграл не имеет особенности.

При таком соглашении полученные в примерах 1, 2 результаты можно записать так:

интеграл $\int^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится только при $\alpha > 1$;

интеграл $\int_{+0} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится только при $\alpha < 1$.

Знак $+0$ в последнем интеграле показывает, что рассматривается область $x > 0$.

Заменой переменной из последнего интеграла сразу получаем, что

интеграл $\int_{x_0+0} \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha}$ сходится только при $\alpha < 1$.

2. Исследование сходимости несобственного интеграла

a. Критерий Коши. В силу определения 3, сходимость несобственного интеграла (3) равносильна существованию предела функции

$$\mathcal{F}(b) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{6}$$

при $b \to \omega,\ b \in [a, \omega[$.

Поэтому справедливо следующее

Утверждение 2 (критерий Коши сходимости несобственного интеграла)**.** *Если функция $x \mapsto f(x)$ определена на промежутке $[a, \omega[$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b] \subset [a, \omega[$, то интеграл $\int_a^\omega f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $B \in [a, \omega[$ так, что при любых $b_1, b_2 \in [a, \omega[$ таких, что $B < b_1$, $B < b_2$, имеет место соотношение*

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

◀ Действительно, ведь

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx = \int_{a}^{b_2} f(x)\,dx - \int_{a}^{b_1} f(x)\,dx = \mathcal{F}(b_2) - \mathcal{F}(b_1),$$

поэтому выписанное условие есть просто критерий Коши существования предела функции $\mathcal{F}(b)$ при $b \to \omega,\ b \in [a, \omega[$. ▶

b. Абсолютная сходимость несобственного интеграла

Определение 4. Про несобственный интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ говорят, что он *сходится абсолютно*, если сходится интеграл $\int\limits_a^\omega |f|(x)\,dx$.

В силу неравенства

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_{b_1}^{b_2} |f|(x)\,dx\right|$$

и утверждения 2 можем заключить, что если интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

Исследование абсолютной сходимости сводится к исследованию сходимости интеграла от неотрицательной функции. Но в этом случае имеем

Утверждение 3. *Если функция f удовлетворяет условиям определения* 3 *и* $f(x) \geqslant 0$ *на* $[a, \omega[$, *то несобственный интеграл* (3) *существует в том и только в том случае, когда функция* (6) *ограничена на* $[a, \omega[$.

◀ Действительно, если $f(x) \geqslant 0$ на $[a, \omega[$, то функция (6) неубывающая на $[a, \omega[$ и потому она имеет предел при $b \to \omega,\ b \in [a, \omega[$, если и только если она ограничена. ▶

В качестве примера использования этого утверждения рассмотрим такое его

Следствие (интегральный признак сходимости ряда)**.** *Если* $x \mapsto f(x)$ — *определенная на промежутке* $[1, +\infty[$ *неотрицательная, невозрастающая, интегрируемая на каждом отрезке* $[1, b] \subset [1, +\infty[$

функция, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \ldots$$

и интеграл

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

◀ Из приведенных условий вытекает, что при любом $n \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства

$$f(n+1) \leqslant \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(n).$$

После суммирования этих неравенств получаем

$$\sum_{n=1}^{k} f(n+1) \leqslant \int_{1}^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=1}^{k} f(n)$$

или

$$s_{k+1} - f(1) \leqslant \mathcal{F}(k+1) \leqslant s_k,$$

где $s_k = \sum\limits_{n=1}^{k} f(n)$, а $\mathcal{F}(b) = \int\limits_{1}^{b} f(x)\,dx$. Поскольку s_k и $\mathcal{F}(b)$ — неубывающие функции своих аргументов, то полученные неравенства и доказывают высказанное утверждение. ▶

В частности, теперь можно сказать, что результат примера 1 эквивалентен тому, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

сходится только при $\alpha > 1$.

Наиболее часто используемым следствием утверждения 3 является следующая

Теорема (теорема сравнения)**.** *Пусть функции $x \mapsto f(x)$, $x \mapsto g(x)$ определены на промежутке $[a, \omega[$ и интегрируемы на любом отрезке $[a, b] \subset [a, \omega[$.*

Если на $[a, \omega[$

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x),$$

то из сходимости интеграла (5) *следует сходимость интеграла* (4) *и справедливо неравенство*

$$\int\limits_a^\omega f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^\omega g(x)\,dx,$$

а из расходимости интеграла (4) *следует расходимость интеграла* (5).

◀ Из условий теоремы и неравенств для собственного интеграла Римана при любом $b \in [a, \omega[$ имеем

$$\mathcal{F}(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx = \mathcal{G}(b).$$

Поскольку обе функции $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ неубывающие на $[a, \omega[$, то теорема следует из написанного неравенства и утверждения 3. ▶

Замечание 3. Если про функции f, g, участвующие в теореме, вместо неравенств $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ известно, что они неотрицательны на $[a, \omega[$ и одного порядка при $x \to \omega$, $x \in [a, \omega[$, т. е. что найдутся такие положительные константы c_1, c_2, что

$$c_1 f(x) \leqslant g(x) \leqslant c_2 f(x),$$

то с учетом линейности несобственного интеграла из доказанной теоремы в этом случае можно заключить, что интегралы (4), (5) сходятся или расходятся одновременно.

Пример 4. Интеграл

$$\int\limits^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

сходится, так как

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^4}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$$

при $x \to +\infty$.

Пример 5. Интеграл
$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$
сходится абсолютно, ибо
$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$$
при $x \geqslant 1$. Следовательно,
$$\left|\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right| \leqslant \int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx \leqslant \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1.$$

Пример 6. Интеграл
$$\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$
сходится, так как $e^{-x^2} < e^{-x}$ при $x > 1$ и
$$\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < \int\limits_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \frac{1}{e}.$$

Пример 7. Интеграл
$$\int^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$$
расходится, ибо
$$\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$$
при достаточно больших значениях x.

Пример 8. Интеграл Эйлера
$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$$
сходится, так как
$$|\ln\sin x| \sim |\ln x| < \frac{1}{\sqrt{x}}$$
при $x \to +0$.

Пример 9. Эллиптический интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

при $0 \leqslant k^2 < 1$ сходится, поскольку

$$\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \sim \sqrt{2(1-k^2)}\,(1-x)^{1/2}$$

при $x \to 1-0$.

Пример 10. Интеграл

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\varphi}}$$

сходится, так как

$$\sqrt{\cos\theta - \cos\varphi} = \sqrt{2\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\sin\frac{\varphi-\theta}{2}} \sim \sqrt{\sin\varphi}\,(\varphi-\theta)^{1/2}$$

при $\theta \to \varphi - 0$.

Пример 11. Интеграл

$$T = 2\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\varphi_0} \frac{d\psi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}}} \tag{7}$$

при $0 < \varphi_0 < \pi$ сходится, поскольку при $\psi \to \varphi_0 - 0$

$$\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}} \sim \sqrt{\sin\varphi_0}\,(\varphi_0-\psi)^{1/2}. \tag{8}$$

Соотношение (7) выражает зависимость периода колебаний математического маятника от его длины L и начального угла его отклонения, отсчитываемого от радиуса, идущего в нижнюю точку траектории качания. Формула (7) является элементарной вариацией формулы (17) предыдущего параграфа.

Маятник можно себе представлять, например, как невесомый стержень, один конец которого шарнирно закреплен, а другой, с присоединенной к нему точечной массой, свободен.

В таком случае можно говорить о любых начальных углах $\varphi_0 \in [0, \pi]$. При $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \pi$ маятник качаться вообще не будет, находясь в первом случае в состоянии устойчивого, а во втором случае в состоянии неустойчивого равновесия.

Интересно отметить, что из (7) и (8) нетрудно получить, что $T \to \infty$ при $\varphi_0 \to \pi - 0$, т. е. период колебаний маятника неограниченно растет по мере приближения его начального положения φ_0 к верхнему положению (неустойчивого) равновесия.

c. Условная сходимость несобственного интеграла

Определение 5. Если несобственный интеграл сходится, но не абсолютно, то говорят, что он *сходится условно.*

Пример 12. Используя замечание 1, по формуле интегрирования по частям в несобственном интеграле находим, что

$$\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = -\left.\frac{\cos x}{x}\right|_{\pi/2}^{+\infty} - \int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx = -\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx,$$

коль скоро последний интеграл сходится. Но, как мы видели в примере 5, этот интеграл сходится, поэтому сходится также интеграл

$$\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{9}$$

Вместе с тем интеграл (9) не является абсолютно сходящимся. Действительно, при $b \in [\pi/2, +\infty[$ имеем

$$\int\limits_{\pi/2}^{b} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geqslant \int\limits_{\pi/2}^{b} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\pi/2}^{b} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\limits_{\pi/2}^{b} \frac{\cos 2x}{x}\,dx. \tag{10}$$

Интеграл

$$\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx,$$

как можно проверить интегрированием по частям, является сходящимся, поэтому при $b \to +\infty$ разность в правой части соотношения (10) стремится к $+\infty$ и в силу оценки (10) интеграл (9) не является абсолютно сходящимся.

Приведем теперь один специальный признак сходимости несобственных интегралов, опирающийся на вторую теорему о среднем и, значит, в сущности на ту же формулу интегрирования по частям.

Утверждение 4 (признак Абеля–Дирихле сходимости интеграла)**.** *Пусть $x \mapsto f(x)$, $x \mapsto g(x)$ — функции, определенные на промежутке $[a, \omega[$ и интегрируемые на любом отрезке $[a, b] \subset [a, \omega[$. Пусть g — монотонная функция.*

Тогда для сходимости несобственного интеграла

$$\int\limits_a^\omega (f \cdot g)(x)\,dx \tag{11}$$

достаточно, чтобы выполнялась либо пара условий

α_1) *интеграл* $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ *сходится,*

β_1) *функция* g *ограничена на* $[a, \omega[$,

либо пара условий

α_2) *функция* $\mathcal{F}(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ *ограничена на* $[a, \omega[$,

β_2) *функция* $g(x)$ *стремится к нулю при* $x \to \omega$, $x \in [a, \omega[$.

◄ Для любых $b_1, b_2 \in [a, \omega[$ по второй теореме о среднем имеем

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} (f \cdot g)(x)\,dx = g(b_1) \int\limits_{b_1}^{\xi} f(x)\,dx + g(b_2) \int\limits_{\xi}^{b_2} f(x)\,dx,$$

где ξ — точка, лежащая между b_1 и b_2. Отсюда в силу критерия Коши (утверждение 2) заключаем, что интеграл (11) действительно сходится, если выполнена любая из двух указанных выше пар условий. ►

3. Несобственные интегралы с несколькими особенностями. До сих пор мы говорили о несобственных интегралах с одной особенностью, связанной с неограниченностью функции у одного из пределов интегрирования или с неограниченностью самого этого предела. Здесь мы укажем, в каком смысле понимаются другие возможные варианты несобственного интеграла.

Если оба предела интегрирования являются особенностями того или другого из указанных выше типов, то полагают по определению

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,dx := \int_{\omega_1}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\omega_2} f(x)\,dx, \tag{12}$$

где c — произвольная точка промежутка $]\omega_1, \omega_2[$.

При этом предполагается, что каждый из несобственных интегралов в правой части соотношения (12) сходится. В противном случае говорят, что интеграл, стоящий в левой части (12), расходится.

В силу замечания 2 и свойства аддитивности несобственного интеграла, определение (12) корректно в том смысле, что оно на самом деле не зависит от выбора точки $c \in \,]\omega_1, \omega_2[$.

Пример 13.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \arcsin x\Big|_{-1}^{0} + \arcsin x\Big|_{0}^{1} = \arcsin x\Big|_{-1}^{1} = \pi.$$

Пример 14. Интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

называется *интегралом Эйлера – Пуассона*, а иногда еще и *интегралом Гаусса*. Он, очевидно, сходится в указанном выше смысле. Позже будет показано, что он равен $\sqrt{\pi}$.

Пример 15. Интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

расходится, поскольку при любом α разойдется по крайней мере один из двух интегралов

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Пример 16. Интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$$

сходится, если сходится каждый из интегралов

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx.$$

Первый из этих интегралов сходится, если $\alpha < 2$, ибо

$$\frac{\sin x}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

при $x \to +0$. Второй интеграл сходится при $\alpha > 0$, что можно проверить непосредственно интегрированием по частям, аналогичным проделанному в примере 12, или сославшись на признак Абеля – Дирихле. Таким образом, исходный интеграл имеет смысл при $0 < \alpha < 2$.

В том случае, когда подынтегральная функция не ограничена в окрестности одной из внутренних точек ω отрезка интегрирования $[a, b]$, полагают

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^\omega f(x)\,dx + \int_\omega^b f(x)\,dx, \tag{13}$$

требуя, чтобы оба стоящих справа интеграла существовали.

Пример 17. В смысле соглашения (13)

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 4.$$

Пример 18. Интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ не определен.

Существует и отличное от (13) соглашение о вычислении интеграла от функции, неограниченной в окрестности внутренней точки ω отрезка интегрирования. А именно, полагают

$$\mathrm{V.\,P.}\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim_{\delta\to+0}\left(\int\limits_a^{\omega-\delta} f(x)\,dx + \int\limits_{\omega+\delta}^{b} f(x)\,dx\right), \tag{14}$$

если стоящий справа предел существует. Этот предел называют, следуя Коши, интегралом в смысле *главного значения* и, чтобы отличить определения (13) и (14), во втором случае перед знаком интеграла ставят начальные буквы V. P. французских слов valeur principal (главное значение). В англоязычном варианте используется обозначение P. V. (от principal value).

В соответствии с этим соглашением имеем

Пример 19.

$$\mathrm{V.\,P.}\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0.$$

Принимается также следующее определение:

$$\mathrm{V.\,P.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx. \tag{15}$$

Пример 20.

$$\mathrm{V.\,P.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = 0.$$

Наконец, если на промежутке интегрирования имеется несколько (конечное число) тех или иных особенностей, лежащих внутри промежутка или совпадающих с его концами, то неособыми точками промежуток разбивают на конечное число таких промежутков, в каждом из которых имеется только одна особенность, а интеграл вычисляют как сумму интегралов по отрезкам разбиения.

Можно проверить, что результат такого расчета не зависит от произвола в выборе разбиения.

Пример 21. Точное определение *интегрального логарифма* теперь можно записать в виде

$$\operatorname{li} x = \begin{cases} \int\limits_0^x \frac{dt}{\ln t}, & \text{если} \quad 0 < x < 1, \\ \text{V. P.} \int\limits_0^x \frac{dt}{\ln t}, & \text{если} \quad 1 < x. \end{cases}$$

В последнем случае символ V. P. относится к единственной внутренней для промежутка $]0, x]$ особенности, расположенной в точке 1. Заметим, что в смысле определения (13) этот интеграл не является сходящимся.

Задачи и упражнения

1. Покажите, что функция

a) $\operatorname{Si} x = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ (*интегральный синус*) определена на $\mathbb{R}$, нечетна и имеет предел при $x \to +\infty$;

b) $\operatorname{si} x = -\int\limits_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ определена на $\mathbb{R}$ и отличается от функции $\operatorname{Si} x$ только на постоянную;

c) $\operatorname{Ci} x = -\int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt$ (*интегральный косинус*) при достаточно больших значениях x может вычисляться по приближенной формуле $\operatorname{Ci} x \approx \frac{\sin x}{x}$; оцените область тех значений, где абсолютная погрешность этого приближения меньше 10^{-4}.

2. Покажите, что

a) интегралы $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$ сходятся только при $\alpha > 0$, причем сходятся абсолютно только при $\alpha > 1$;

b) *интегралы Френеля*

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt, \qquad S(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt$$

являются бесконечно дифференцируемыми функциями в промежутке $]0, +\infty[$, причем обе они имеют предел при $x \to +\infty$.

3. Покажите, что

a) эллиптический интеграл первого рода

$$F(k,\varphi)=\int\limits_0^{\sin\varphi}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

определен при $0\leqslant k<1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ и приводится к виду

$$F(k,\varphi)=\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}};$$

b) полный эллиптический интеграл первого рода

$$K(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$

неограниченно возрастает при $k\to 1-0$.

4. Покажите, что

a) интегральная показательная функция (*интегральная экспонента*) $\mathrm{Ei}(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}\,dt$ определена и бесконечно дифференцируема при $x<0$;

b) $-\mathrm{Ei}(-x)=\frac{e^{-x}}{x}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2!}{x^2}-\ldots+(-1)^n\frac{n!}{x^n}+o\left(\frac{1}{x^n}\right)\right)$ при $x\to+\infty$;

c) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{x^n}$ не сходится ни при каком значении $x\in\mathbb{R}$;

d) $\mathrm{li}\,x\sim\frac{x}{\ln x}$ при $x\to+0$. (Определение интегрального логарифма $\mathrm{li}\,x$ см. в примере 21.)

5. Покажите, что

a) функция $\mathrm{Fi}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-x}^{x}e^{-t^2}\,dt$, называемая *интегралом вероятности ошибок* и часто обозначаемая символом $\mathrm{erf}(x)$ (от англ. error function — функция ошибок), определена, нечетна, бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$ и имеет предел при $x\to+\infty$;

b) если упомянутый в a) предел равен единице (а это так), то

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{2^2x^3}+\frac{1\cdot 3}{2^3x^5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4x^7}+o\left(\frac{1}{x^7}\right)\right)$$

при $x\to+\infty$.

6. Покажите, что:

a) Если тяжелая частица под действием силы тяжести скользит вдоль кривой, заданной в параметрическом виде $x=x(\theta)$, $y=y(\theta)$, причем в момент

$t = 0$ частица имела нулевую скорость и находилась в точке $x_0 = x(\theta_0)$, $y_0 = y(\theta_0)$, то между параметром θ, определяющим точку на кривой, и моментом t прохождения частицей этой точки имеется связь (см. формулу (15) из §4)

$$t = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\frac{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}{2g(y_0 - y(\theta))}}\, d\theta,$$

в которой несобственный интеграл заведомо сходится, если $y'(\theta_0) \neq 0$ (знак выбирается в зависимости от того, имеют ли t и θ одинаковый или противоположный характер монотонности, причем если росту t отвечает рост θ, то, разумеется, следует брать знак плюс).

b) Период колебания частицы в ямке, имеющей профиль циклоиды

$$\begin{aligned} x &= R(\theta + \pi + \sin\theta), \\ y &= -R(1 + \cos\theta), \end{aligned} \qquad |\theta| \leqslant \pi,$$

не зависит от уровня $y_0 = -R(1+\cos\theta_0)$, с которого она начинает скольжение, и равен $4\pi\sqrt{R/g}$ (см. задачу 4 из §4).

ГЛАВА VII

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ, ИХ ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

До сих пор мы рассматривали почти исключительно числовые функции $x \mapsto f(x)$, в которых число $f(x)$ определялось заданием одного числа x из области определения функции.

Однако многие величины, представляющие интерес, зависят не от одного, а от очень многих факторов, и если сама величина и каждый из определяющих ее факторов могут быть охарактеризованы некоторым числом, то указанная зависимость сводится к тому, что упорядоченному набору $(x^1, \ldots, x^n)$ чисел, каждое из которых описывает состояние соответствующего фактора, ставится в соответствие значение $y = f(x^1, \ldots, x^n)$ исследуемой величины, которое она приобретает при этом состоянии определяющих величину факторов.

Например, площадь прямоугольника есть произведение длин его сторон; объем данного количества газа вычисляется по формуле

$$V = R\frac{mT}{p},$$

где R — постоянная, m — масса, T — абсолютная температура и p — давление газа. Таким образом, значение V зависит от переменной упорядоченной тройки чисел (m, T, p) или, как говорят, V есть функция трех переменных m, T и p.

Мы ставим себе целью научиться исследовать функции многих переменных так же, как мы научились исследовать функции одного переменного.

Как и в случае функций одного переменного, изучение функций многих числовых переменных начинается с описания их области определения.

§ 1. Пространство $\mathbb{R}^m$ и важнейшие классы его подмножеств

1. Множество $\mathbb{R}^m$ и расстояние в нем. Условимся через $\mathbb{R}^m$ обозначать множество всех упорядоченных наборов $(x^1, \dots, x^m)$, состоящих из m действительных чисел $x^i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, \dots, m)$.

Каждый такой набор будем обозначать одной буквой $x = (x^1, \dots, x^m)$ и в соответствии с удобной геометрической терминологией называть *точкой* множества $\mathbb{R}^m$. Число x^i в наборе $(x^1, \dots, x^m)$ называют i-й *координатой* точки $x = (x^1, \dots, x^m)$.

Геометрические аналогии можно продолжить и ввести на множестве $\mathbb{R}^m$ расстояние между точками $x_1 = (x_1^1, \dots, x_1^m)$, $x_2 = (x_2^1, \dots, x_2^m)$ по формуле

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(x_1^i - x_2^i\right)^2}. \tag{1}$$

Функция

$$d\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},$$

определяемая формулой (1), очевидно, обладает следующими свойствами:

a) $d(x_1, x_2) \geqslant 0$;

b) $(d(x_1, x_2) = 0) \Leftrightarrow (x_1 = x_2)$;

c) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$;

d) $d(x_1, x_3) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$.

Последнее неравенство (называемое опять-таки по геометрической аналогии *неравенством треугольника*) есть частный случай неравенства Минковского (см. гл. V, § 4, п. 2).

Функцию, определенную на парах (x_1, x_2) точек некоторого множества X и обладающую свойствами a), b), c), d), называют *метрикой* или *расстоянием* в X.

Множество X вместе с фиксированной в нем метрикой называют *метрическим пространством.*

Таким образом, мы превратили $\mathbb{R}^m$ в метрическое пространство, наделив множество $\mathbb{R}^m$ метрикой, заданной соотношением (1).

Сведения о произвольных метрических пространствах читатель сможет получить в главе IX (часть II). Здесь же мы не хотим отвлекаться от необходимого нам сейчас конкретного метрического пространства $\mathbb{R}^m$.

Поскольку в этой главе множество $\mathbb{R}^m$ с метрикой (1) будет для нас единственным метрическим пространством, составляющим объект изучения, то общее определение метрического пространства нам по существу пока не нужно. Оно приведено только для пояснения употребляемого по отношению к множеству $\mathbb{R}^m$ термина «пространство» и по отношению к функции (1) термина «метрика».

Из соотношения (1) следует, что при $i \in \{1, \dots, m\}$

$$\left|x_1^i - x_2^i\right| \leqslant d(x_1, x_2) \leqslant \sqrt{m} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left|x_1^i - x_2^i\right|, \tag{2}$$

т. е. расстояние между точками $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$ мало в том и только в том случае, когда мало отличаются соответствующие координаты этих точек.

Из (2), как и из (1), видно, что при $m = 1$ множество $\mathbb{R}^1$ совпадает с множеством действительных чисел, расстояние между точками которого измеряется стандартным образом посредством модуля разности чисел.

2. Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^m$

Определение 1. При $\delta > 0$ множество

$$B(a; \delta) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(a, x) < \delta\}$$

называется *шаром с центром* $a \in \mathbb{R}^m$ *радиуса* δ или также δ-*окрестностью* точки $a \in \mathbb{R}^m$.

Определение 2. Множество $G \subset \mathbb{R}^m$ называется *открытым в* $\mathbb{R}^m$, если для любой точки $x \in G$ найдется шар $B(x; \delta)$ такой, что $B(x; \delta) \subset G$.

Пример 1. $\mathbb{R}^m$ — открытое множество в $\mathbb{R}^m$.

Пример 2. Пустое множество $\varnothing$ вообще не содержит точек и потому может считаться удовлетворяющим определению 2, т. е. $\varnothing$ — открытое множество в $\mathbb{R}^m$.

Пример 3. Шар $B(a;r)$ — открытое множество в $\mathbb{R}^m$.

Действительно, если $x \in B(a;r)$, т.е. $d(a,x) < r$, то при $0 < \delta < r - d(a,x)$ будет $B(x;\delta) \subset B(a;r)$, поскольку

$$(\xi \in B(x;\delta)) \Rightarrow (d(x,\xi) < \delta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (d(a,\xi) < d(a,x) + d(x,\xi) < d(a,x) + r - d(a,x) = r).$$

Пример 4. Множество $G = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(a,x) > r\}$, т.е. совокупность точек, удаленных от фиксированной точки $a \in \mathbb{R}^m$ на расстояние, большее чем r, является открытым, что, как и в примере 3, легко проверить, используя неравенство треугольника для метрики.

Определение 3. Множество $F \subset \mathbb{R}^m$ называется *замкнутым в* $\mathbb{R}^m$, если его дополнение $G = \mathbb{R}^m \setminus F$ в $\mathbb{R}^m$ является множеством, открытым в $\mathbb{R}^m$.

Пример 5. Множество $\overline{B}(a;r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(a,x) \leqslant r\}$, $r \geqslant 0$, т.е. совокупность точек, удаленных от фиксированной точки $a \in \mathbb{R}^m$ не больше чем на r, является замкнутым, что следует из определения 3 и примера 4. Множество $\overline{B}(a;r)$ называют *замкнутым шаром с центром a радиуса r*.

Утверждение 1. a) *Объединение $\bigcup\limits_{\alpha\in \mathrm{A}} G_\alpha$ множеств любой системы $\{G_\alpha,\ \alpha \in \mathrm{A}\}$ множеств, открытых в $\mathbb{R}^m$, является множеством, открытым в $\mathbb{R}^m$.*

b) *Пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ конечного числа множеств, открытых в $\mathbb{R}^m$, является множеством, открытым в $\mathbb{R}^m$.*

a$'$) *Пересечение $\bigcap\limits_{\alpha\in \mathrm{A}} F_\alpha$ множеств любой системы $\{F_\alpha,\ \alpha \in \mathrm{A}\}$ множеств F_α, замкнутых в $\mathbb{R}^m$, является множеством, замкнутым в $\mathbb{R}^m$.*

b$'$) *Объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ конечного числа множеств F_i, замкнутых в $\mathbb{R}^m$, является множеством, замкнутым в $\mathbb{R}^m$.*

◄ a) Если $x \in \bigcup\limits_{\alpha\in \mathrm{A}} G_\alpha$, то найдется такое $\alpha_0 \in \mathrm{A}$, что $x \in G_{\alpha_0}$, и, следовательно, найдется такая δ-окрестность $B(x;\delta)$ точки x, что $B(x;\delta) \subset G_{\alpha_0}$. Значит, $B(x;\delta) \subset \bigcup\limits_{\alpha\in \mathrm{A}} G_\alpha$.

b) Пусть $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$. Тогда $x \in G_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Пусть $\delta_1, \ldots, \delta_n$ —

такие положительные числа, что $B(x;\delta_i) \subset G_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Полагая $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$, очевидно, получим, что $\delta > 0$ и $B(x;\delta) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$.

a′) Покажем, что множество $C\left(\bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha\right)$, дополнительное к $\bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha$ в $\mathbb{R}^m$, является открытым подмножеством $\mathbb{R}^m$.

Действительно,

$$C\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} (CF_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha,$$

где $G_\alpha = CF_\alpha$ открыты в $\mathbb{R}^m$. Теперь a′) следует из a).

b′) Аналогично, из b) получаем

$$C\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (CF_i) = \bigcap_{i=1}^{n} G_i. \quad \blacktriangleright$$

Пример 6. Множество $S(a;r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(a,x) = r\}$, $r \geqslant 0$, называется *сферой с центром* $a \in \mathbb{R}^m$ *радиуса* r. Дополнение к $S(a;r)$ в $\mathbb{R}^m$ в силу примеров 3 и 4 является объединением открытых множеств. Значит, в силу доказанного утверждения оно открыто, а сфера $S(a;r)$ есть замкнутое подмножество $\mathbb{R}^m$.

Определение 4. Открытое в $\mathbb{R}^m$ множество, содержащее данную точку, называется *окрестностью* этой точки в $\mathbb{R}^m$.

В частности, как следует из примера 3, δ-окрестность точки является ее окрестностью.

Определение 5. Точка $x \in \mathbb{R}^m$ по отношению к множеству $E \subset \subset \mathbb{R}^m$ называется

внутренней точкой E, если она содержится в E вместе с некоторой своей окрестностью;

внешней точкой E, если она является внутренней точкой дополнения к E в $\mathbb{R}^m$;

граничной точкой E, если она не является ни внешней, ни внутренней точкой множества E.

Из этого определения следует, что характеристическое свойство граничной точки множества состоит в том, что в любой ее окрестности имеются как точки этого множества, так и точки, ему не принадлежащие.

Пример 7. Сфера $S(a;r)$, $r > 0$, является множеством граничных точек как открытого шара $B(a;r)$, так и замкнутого шара $\overline{B}(a;r)$.

Пример 8. Точка $a \in \mathbb{R}^m$ является граничной точкой множества $\mathbb{R}^m \setminus a$, которое не имеет внешних точек.

Пример 9. Все точки сферы $S(a;r)$ являются ее граничными точками; внутренних точек множество $S(a;r)$ как подмножество $\mathbb{R}^m$ не имеет.

Определение 6. Точка $a \in \mathbb{R}^m$ называется *предельной* точкой множества $E \subset \mathbb{R}^m$, если для любой окрестности $O(a)$ точки a пересечение $E \cap O(a)$ есть бесконечное множество.

Определение 7. Объединение множества E и всех его предельных точек из $\mathbb{R}^m$ называется *замыканием* множества E в $\mathbb{R}^m$.

Замыкание множества E обычно обозначают символом $\overline{E}$.

Пример 10. Множество $\overline{B}(a;r) = B(a;r) \cup S(a;r)$ есть множество предельных точек для открытого шара $B(a;r)$, поэтому $\overline{B}(a;r)$, в отличие от $B(a;r)$, и назвали замкнутым шаром.

Пример 11. $\overline{S}(a;r) = S(a;r)$.

Вместо того чтобы обосновывать последнее равенство, докажем следующее полезное

Утверждение 2. (F *замкнуто в* $\mathbb{R}^m$) $\Leftrightarrow$ ($F = \overline{F}$ *в* $\mathbb{R}^m$).

Иными словами, F — замкнутое в $\mathbb{R}^m$ множество тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

◀ Пусть F замкнуто в $\mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^m$ и $x \notin F$. Тогда открытое множество $G = \mathbb{R}^m \setminus F$ является окрестностью точки x, вообще не содержащей точек множества F. Таким образом, показано, что если $x \notin F$, то x — не предельная точка F.

Пусть $F = \overline{F}$. Проверим, что множество $G = \mathbb{R}^m \setminus \overline{F}$ открыто в $\mathbb{R}^m$. Если $x \in G$, то $x \notin \overline{F}$ и потому x не является предельной точкой множества F. Значит, найдется окрестность точки x, в которой имеется только конечное число точек $x_1, \dots, x_n$ множества F. Поскольку $x \notin F$, то можно построить, например, шаровые окрестности $O_1(x), \dots, O_n(x)$ точки x так, что $x_i \notin O_i(x)$. Тогда $O(x) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i(x)$ будет открытой окрестностью точки x, которая вообще не содержит точек F, т. е. $O(x) \subset \mathbb{R}^m \setminus F$ и, следовательно, множество $\mathbb{R}^m \setminus F = \mathbb{R}^m \setminus \overline{F}$ открыто, т. е. F замкнуто в $\mathbb{R}^m$. ►

3. Компакты в $\mathbb{R}^m$

Определение 8. Множество $K \subset \mathbb{R}^m$ называется *компактом*, если из любого покрытия K множествами, открытыми в $\mathbb{R}^m$, можно выделить конечное покрытие.

Пример 12. Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ является компактом в $\mathbb{R}^1$ в силу леммы о конечном покрытии.

Пример 13. Обобщением отрезка в $\mathbb{R}^m$ является множество

$$I = \{x \in \mathbb{R}^m \mid a^i \leqslant x^i \leqslant b^i,\ i = 1, \dots, m\},$$

которое называется *m-мерным промежутком*, m-мерным брусом или m-мерным параллелепипедом.

Покажем, что I — компакт в $\mathbb{R}^m$.

◄ Предположим, что из некоторого открытого покрытия I нельзя выделить конечное покрытие. Разделив каждый из координатных отрезков $I^i = \{x^i \in \mathbb{R} \mid a^i \leqslant x^i \leqslant b^i\}$ $(i = 1, \dots, m)$ пополам, мы разобьем промежуток I на 2^m промежутков, из которых по крайней мере один не допускает конечного покрытия множествами нашей системы. С ним поступим так же, как и с исходным промежутком. Продолжая этот процесс деления, получим последовательность вложенных промежутков $I = I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$, ни один из которых не допускает конечного покрытия. Если $I_n = \{x \in \mathbb{R}^m \mid a_n^i \leqslant x^i \leqslant b_n^i,\ i = 1, \dots, m\}$, то при каждом $i \in \{1, \dots, m\}$ координатные отрезки $a_n^i \leqslant x^i \leqslant b_n^i$ $(n = 1, 2, \dots)$ образуют, по построению, систему вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю. Найдя при каждом $i \in \{1, \dots, m\}$ точку $\xi^i \in \left[a_n^i, b_n^i\right]$, общую для всех этих отрезков, получим точку $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m)$, принадлежащую всем промежуткам $I = I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ Поскольку $\xi \in I$, то найдется такое открытое множество G нашей системы покрывающих множеств, что $\xi \in G$. Тогда при некотором $\delta > 0$ также $B(\xi; \delta) \subset G$. Но по построению в силу соотношения (2) найдется номер N такой, что $I_n \subset B(\xi; \delta) \subset G$ при $n > N$, и мы вступаем в противоречие с тем, что промежутки I_n не допускают конечного покрытия множествами данной системы. ►

Утверждение 3. *Если K — компакт в $\mathbb{R}^m$, то*

a) *K — замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$;*

b) *любое замкнутое в $\mathbb{R}^m$ множество, содержащееся в K, само является компактом.*

◀ a) Покажем, что любая точка $a \in \mathbb{R}^m$, предельная для K, принадлежит K. Пусть $a \notin K$. Для каждой точки $x \in K$ построим такую окрестность $G(x)$, что точка a обладает окрестностью, не имеющей с $G(x)$ общих точек. Совокупность $\{G(x)\}$, $x \in K$, всех таких окрестностей образует открытое покрытие компакта K, из которого выделяется конечное покрытие $G(x_1), \dots, G(x_n)$. Если теперь $O_i(a)$ — такая окрестность точки a, что $G(x_i) \cap O_i(a) = \varnothing$, то множество $O(a) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i(a)$ также является окрестностью точки a, причем, очевидно, $K \cap O(a) = \varnothing$. Таким образом, a не может быть предельной точкой для K.

b) Пусть F — замкнутое в $\mathbb{R}^m$ множество и $F \subset K$. Пусть $\{G_\alpha\}$, $\alpha \in \mathrm{A}$, — покрытие F множествами, открытыми в $\mathbb{R}^m$. Присоединив к нему еще одно открытое множество $G = \mathbb{R}^m \setminus F$, получим открытое покрытие $\mathbb{R}^m$ и, в частности, K, из которого извлекаем конечное покрытие K. Это конечное покрытие K будет покрывать также множество F. Замечая, что $G \cap F = \varnothing$, можно сказать, что если G входит в это конечное покрытие, то, даже удалив G, мы получим конечное покрытие F множествами исходной системы $\{G_\alpha\}$, $\alpha \in \mathrm{A}$. ▶

Определение 9. *Диаметром* множества $E \subset \mathbb{R}^m$ называется величина

$$d(E) := \sup_{x_1, x_2 \in E} d(x_1, x_2).$$

Определение 10. Множество $E \subset \mathbb{R}^m$ называется *ограниченным*, если его диаметр конечен.

Утверждение 4. *Если K — компакт в $\mathbb{R}^m$, то K — ограниченное подмножество $\mathbb{R}^m$.*

◀ Возьмем произвольную точку $a \in \mathbb{R}^m$ и рассмотрим последовательность шаров $\{B(a; n)\}$ $(n = 1, 2, \dots)$. Они образуют открытое покрытие $\mathbb{R}^m$, а следовательно, и K. Если бы K не было ограниченным множеством, то из этого покрытия нельзя было бы извлечь конечное покрытие K. ▶

Утверждение 5. *Множество $K \subset \mathbb{R}^m$ является компактом в том и только в том случае, если K замкнуто и ограничено в $\mathbb{R}^m$.*

◀ Необходимость этих условий нами уже показана в утверждениях 3 и 4.

Проверим достаточность этих условий. Поскольку K — ограниченное множество, то найдется m-мерный промежуток I, содержащий K. Как было показано в примере 13, I является компактом в $\mathbb{R}^m$. Но если K — замкнутое множество, содержащееся в компакте I, то по утверждению 3b) оно само является компактом. ▶

Задачи и упражнения

1. *Расстоянием* $d(E_1, E_2)$ *между множествами* $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^m$ называется величина

$$d(E_1, E_2) := \inf_{x_1 \in E_1, x_2 \in E_2} d(x_1, x_2).$$

Приведите пример замкнутых в $\mathbb{R}^m$ множеств E_1, E_2 без общих точек, для которых $d(E_1, E_2) = 0$.

2. Покажите, что

a) замыкание $\overline{E}$ в $\mathbb{R}^m$ любого множества $E \subset \mathbb{R}^m$ является множеством, замкнутым в $\mathbb{R}^m$;

b) множество ∂E граничных точек любого множества $E \subset \mathbb{R}^m$ является замкнутым множеством;

c) если G — открытое множество в $\mathbb{R}^m$, а F замкнуто в $\mathbb{R}^m$, то $G \setminus F$ — открытое подмножество $\mathbb{R}^m$.

3. Покажите, что если $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots$ — последовательность вложенных компактов, то $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} K_i \neq \varnothing$.

4. a) В пространстве $\mathbb{R}^k$ двумерная сфера S^2 и окружность S^1 расположились так, что расстояние от любой точки сферы до любой точки окружности одно и то же. Может ли такое быть?

b) Рассмотрите задачу a) для произвольных по размерности сфер S^m, S^n в $\mathbb{R}^k$. При каком соотношении между m, n и k описанная ситуация возможна?

§ 2. Предел и непрерывность функции многих переменных

1. Предел функции. В главе III мы подробно изучили операцию предельного перехода для вещественнозначных функций $f\colon X \to \mathbb{R}$, определенных на множестве X, в котором фиксирована база $\mathcal{B}$.

В ближайших параграфах нам предстоит рассматривать функции $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, определенные на подмножествах пространства $\mathbb{R}^m$, со значениями в $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ или вообще в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Мы сделаем сейчас ряд добавлений к теории предела, связанных со спецификой этого класса функций.

Начнем, однако, с общего основного определения.

Определение 1. Точка $A \in \mathbb{R}^n$ называется *пределом отображения* $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ *по базе* $\mathcal{B}$ в X, если для любой окрестности $V(A)$ этой точки найдется элемент $B \in \mathcal{B}$ базы $\mathcal{B}$, образ которого $f(B)$ содержится в $V(A)$.

Короче,

$$\left(\lim_{\mathcal{B}} f(x) = A\right) := \big(\forall V(A)\ \exists B \in \mathcal{B}\ \ (f(B) \subset V(A))\big).$$

Мы видим, что определение предела функции $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ полностью совпадает с определением предела функции $f\colon X \to \mathbb{R}$, если мы представляем себе, что такое окрестность $V(A)$ точки $A \in \mathbb{R}^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Определение 2. Отображение $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если множество $f(X) \subset \mathbb{R}^n$ ограничено в $\mathbb{R}^n$.

Определение 3. Пусть $\mathcal{B}$ — база в множестве X. Отображение $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ называется *финально ограниченным* при базе $\mathcal{B}$, если найдется элемент B базы $\mathcal{B}$, на котором f ограничено.

Учитывая эти определения, нетрудно проверить теми же рассуждениями, которые мы провели в главе III, что

функция $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ может иметь не более одного предела по данной базе $\mathcal{B}$ в X;

функция $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, имеющая предел по базе $\mathcal{B}$, финально ограничена при этой базе $\mathcal{B}$.

Определение 1 можно переписать также в иной форме, явно использующей наличие в $\mathbb{R}^n$ метрики. А именно,

Определение 1′.

$$\left(\lim_{\mathcal{B}} f(x) = A \in \mathbb{R}^n\right) := \big(\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathcal{B}\ \forall x \in B\ \ (d(f(x), A) < \varepsilon)\big)$$

или

Определение 1$''$.

$$\Bigl(\lim_{\mathcal{B}} f(x) = A \in \mathbb{R}^n\Bigr) := \Bigl(\lim_{\mathcal{B}} d(f(x), A) = 0\Bigr).$$

Специфическая особенность отображения $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ состоит в том, что поскольку точка $y \in \mathbb{R}^n$ есть упорядоченный набор $(y^1, \ldots, y^n)$ из n вещественных чисел, то задание функции $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ равносильно заданию n вещественнозначных функций $f^i\colon X \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$, где $f^i(x) = y^i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Если $A = (A^1, \ldots, A^n)$ и $y = (y^1, \ldots, y^n)$, то справедливы неравенства

$$|y^i - A^i| \leqslant d(y, A) \leqslant \sqrt{n} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |y^i - A^i|, \tag{1}$$

из которых видно, что

$$\lim_{\mathcal{B}} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{\mathcal{B}} f^i(x) = A^i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

т. е. сходимость в $\mathbb{R}^n$ покоординатная.

Пусть теперь $X = \mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, а $\mathcal{B}$ — база $k \to \infty$, $k \in \mathbb{N}$ в нем. Функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ в данном случае есть последовательность $\{y_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, точек пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 4. Последовательность $\{y_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, точек $y_k \in \mathbb{R}^n$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N \in \mathbb{N}$, что при любых $k_1, k_2 > N$ выполнено $d(y_{k_1}, y_{k_2}) < \varepsilon$.

Из неравенств (1) можно заключить, что последовательность точек $y_k = (y_k^1, \ldots, y_k^n) \in \mathbb{R}^n$ фундаментальна тогда и только тогда, когда фундаментальна каждая из последовательностей $\{y_k^i\}$, $k \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, n$, их одноименных координат.

Учитывая соотношение (2) и критерий Коши для числовых последовательностей, можно теперь утверждать, что последовательность точек в $\mathbb{R}^n$ сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Иными словами, критерий Коши справедлив и в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Впоследствии метрические пространства, в которых каждая фундаментальная последовательность имеет предел, мы назовем *полными* метрическими пространствами. Таким образом, мы сейчас установили, что $\mathbb{R}^n$ при любом $n \in \mathbb{N}$ является полным метрическим пространством.

Определение 5. *Колебанием* функции $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ на множестве $E \subset X$ называется величина

$$\omega(f; E) := d(f(E)),$$

где $d(f(E))$ — диаметр множества $f(E)$.

Как видно, это есть прямое обобщение определения колебания вещественнозначной функции, в которое определение 5 и переходит при $n = 1$.

С полнотой $\mathbb{R}^n$ связано то, что для функций $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ справедлив следующий критерий Коши существования предела.

Теорема 1. *Пусть X — множество, $\mathcal{B}$ — база в X. Функция $f: X \to \mathbb{R}^n$ имеет предел по базе $\mathcal{B}$ в том и только в том случае, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется элемент $B \in \mathcal{B}$ базы, на котором колебание функции меньше ε.*

Итак,

$$\exists \lim_{\mathcal{B}} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in \mathcal{B} \ \ (\omega(f; B) < \varepsilon).$$

Доказательство теоремы 1 дословно повторяет доказательство критерия Коши для числовых функций (гл. III, § 2, теорема 4) с единственным изменением, сводящимся к тому, что теперь вместо $|f(x_1) - f(x_2)|$ следует всюду писать $d(f(x_1), f(x_2))$.

В справедливости теоремы 1 можно убедиться и иначе, если считать известным критерий Коши для вещественнозначных функций и воспользоваться соотношениями (2) и (1).

Для функций со значениями в $\mathbb{R}^n$ остается в силе также важная теорема о пределе композиции.

Теорема 2. *Пусть Y — множество, $\mathcal{B}_Y$ — база в Y, $g\colon Y \to \mathbb{R}^n$ — отображение, имеющее предел по базе $\mathcal{B}_Y$.*

Пусть X — множество, $\mathcal{B}_X$ — база в X, $f\colon X \to Y$ — такое отображение X в Y, что для любого элемента $B_Y \in \mathcal{B}_Y$ базы $\mathcal{B}_Y$ найдется элемент $B_X \in \mathcal{B}_X$ базы $\mathcal{B}_X$, образ которого $f(B_X)$ содержится в B_Y.

При этих условиях композиция $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}^n$ отображений f и g определена, имеет предел по базе $\mathcal{B}_X$ и

$$\lim_{\mathcal{B}_X} (g \circ f)(x) = \lim_{\mathcal{B}_Y} g(y).$$

Доказательство теоремы 2 можно провести, либо повторив доказательство теоремы 5 из § 2 гл. III, с заменой там $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^n$, либо сослаться на указанную теорему и воспользоваться соотношением (2).

До сих пор мы рассматривали функции $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, никак не конкретизируя область их определения X. В дальнейшем нас прежде всего будет интересовать случай, когда X есть подмножество пространства $\mathbb{R}^m$.

Условимся, что, как и прежде,

$U(a)$ — окрестность точки $a \in \mathbb{R}^m$;

$\overset{\circ}{U}(a)$ — проколотая окрестность точки $a \in \mathbb{R}^m$, т. е. $\overset{\circ}{U}(a) := U(a) \setminus a$;

$U_E(a)$ — окрестность точки a в множестве $E \subset \mathbb{R}^m$, т. е. $U_E(a) := E \cap U(a)$;

$\overset{\circ}{U}_E(a)$ — проколотая окрестность точки a в множестве E, т. е. $\overset{\circ}{U}_E(a) := E \cap \overset{\circ}{U}(a)$;

$x \to a$ — база проколотых окрестностей точки a в $\mathbb{R}^m$;

$x \to \infty$ — база окрестностей бесконечности, т. е. база, состоящая из множеств $\mathbb{R}^m \setminus B(a;r)$;

$x \to a,\ x \in E$, или $(E \ni x \to a)$ — база проколотых окрестностей точки a в множестве E, если a — предельная точка для E;

$x \to \infty,\ x \in E$, или $(E \ni x \to \infty)$ — база окрестностей бесконечности в множестве E, состоящая из множеств $E \setminus B(a;r)$, если E — неограниченное множество.

В соответствии с этими обозначениями можно, например, дать следующие конкретизации определения 1 предела функции, если речь идет о функции $f\colon E \to \mathbb{R}^n$, отображающей множество $E \subset \mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$:

$$\Bigl(\lim_{E \ni x \to a} f(x) = A\Bigr) := \bigl(\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \overset{\circ}{U}_E(a)\ \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_E(a)\ \ (d(f(x), A) < \varepsilon)\bigr).$$

Это же можно записать и иначе:

$$\Bigl(\lim_{E \ni x \to a} f(x) = A\Bigr) :=$$
$$= \bigl(\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in E\ \ (0 < d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), A) < \varepsilon)\bigr).$$

Здесь подразумевается, что расстояния $d(x,a)$ и $d(f(x), A)$ измеряются в тех пространствах ($\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$), в которых лежат указанные точки.

Наконец,

$$\Bigl(\lim_{x\to\infty} f(x) = A\Bigr) := \bigl(\forall\varepsilon > 0 \ \exists B(a;r) \ \forall x \in \mathbb{R}^m \setminus B(a;r) \ \ (d(f(x), A) < \varepsilon)\bigr).$$

Условимся также, что запись «$f(x) \to \infty$ при базе $\mathcal{B}$» в случае отображения $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ всегда будет означать, что для любого шара $B(A;r) \subset \mathbb{R}^n$ найдется элемент $B \in \mathcal{B}$ базы $\mathcal{B}$ такой, что $f(B) \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus B(A;r)$.

Пример 1. Пусть $x \mapsto \pi^i(x)$ — отображение $\pi^i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, состоящее в том, что каждой точке $x = (x^1, \ldots, x^m)$ пространства $\mathbb{R}^m$ ставится в соответствие ее i-я координата x^i. Итак,

$$\pi^i(x) = x^i.$$

Если $a = (a^1, \ldots, a^m)$, то, очевидно,

$$\pi^i(x) \to a^i \quad \text{при} \quad x \to a.$$

Функция $x \mapsto \pi^i(x)$ не стремится ни к конечной величине, ни к бесконечности при $x \to \infty$, если $m > 1$.

Вместе с тем

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \bigl(\pi^i(x)\bigr)^2 \to \infty \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Не следует думать, что предел функции нескольких переменных можно найти, вычисляя последовательно пределы по каждой из координат. В этом можно убедиться на следующих примерах.

Пример 2. Пусть функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ в точке $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ определена так:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Тогда $f(0,y) = f(x,0) = 0$, а $f(x,x) = \frac{1}{2}$ при $x \neq 0$.

Таким образом, эта функция не имеет предела при $(x,y) \to (0,0)$.

Вместе с тем

$$\lim_{y\to 0}\Bigl(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Bigr) = \lim_{y\to 0}(0) = 0,$$

$$\lim_{x\to 0}\Bigl(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Bigr) = \lim_{x\to 0}(0) = 0.$$

Пример 3. Для функции

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

имеем

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = 1,$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(-\frac{y^2}{y^2}\right) = -1.$$

Пример 4. Для функции

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y\sin\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

имеем

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0,$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0,$$

и в то же время повторный предел

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$

вообще не существует.

Пример 5. Функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & \text{если } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

имеет нулевой предел при стремлении к началу координат по любому лучу $x = \alpha t$, $y = \beta t$.

Вместе с тем функция равна $\frac{1}{2}$ в любой точке вида (a, a^2), где $a \neq 0$, поэтому функция не имеет предела при $(x,y) \to (0,0)$.

2. Непрерывность функции многих переменных и свойства непрерывных функций. Пусть E — множество в пространстве $\mathbb{R}^m$ и $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ — определенная на нем функция со значениями в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 6. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ называется *непрерывной* в точке $a \in E$, если для любой окрестности $V(f(a))$ значения $f(a)$ этой функции, принимаемого ею в точке a, найдется такая окрестность $U_E(a)$ точки a в множестве E, образ которой $f(U_E(a))$ содержится в $V(f(a))$.

Итак,

$$\big(f\colon E \to \mathbb{R}^n \text{ непрерывна в } a \in E\big) := \\ = \big(\forall V(f(a))\ \ \exists U_E(a)\ \ (f(U_E(a)) \subset V(f(a)))\big).$$

Мы видим, что по форме определение 6 совпадает со знакомым нам определением 1 непрерывности вещественнозначной функции, приведенным в § 1 гл. IV. Как и там, мы можем дать следующие вариации записи этого определения:

$$\big(f\colon E \to \mathbb{R}^n \text{ непрерывна в } a \in E\big) := \\ = \big(\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in E\ \ (d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon)\big),$$

или, если a — предельная точка множества E,

$$\big(f\colon E \to \mathbb{R}^n \text{ непрерывна в } a \in E\big) := \left(\lim_{E \ni x \to a} f(x) = f(a)\right).$$

Как уже отмечалось в главе IV, понятие непрерывности представляет интерес именно в том случае, когда речь идет о точке $a \in E$, предельной для множества E, на котором определена функция f.

Из определения 6 и соотношения (2) следует, что отображение $f\colon E \to \mathbb{R}^n$, задаваемое соотношением

$$(x^1, \ldots, x^m) = x \xmapsto{f} y = (y^1, \ldots, y^n) = \\ = (f^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, f^n(x^1, \ldots, x^m)),$$

непрерывно в некоторой точке в том и только в том случае, когда каждая из функций $y^i = f^i(x^1, \ldots, x^m)$ непрерывна в этой точке.

В частности, вспомним, что путем в $\mathbb{R}^n$ мы назвали отображение $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ промежутка $I \subset \mathbb{R}$, задаваемое непрерывными функциями $f^1(x), \dots, f^n(x)$ в виде

$$x \mapsto y = (y^1, \dots, y^n) = (f^1(x), \dots, f^n(x)).$$

Таким образом, мы теперь можем сказать, что *путь в* $\mathbb{R}^n$ *есть непрерывное отображение* промежутка $I \subset \mathbb{R}$ вещественной оси в пространство $\mathbb{R}^n$.

По аналогии с определением колебания вещественнозначной функции в точке, вводится понятие колебания в точке функции со значениями в $\mathbb{R}^n$.

Пусть E — множество в $\mathbb{R}^m$, $a \in E$ и $B_E(a; r) = E \cap B(a; r)$.

Определение 7. *Колебанием функции* $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ в точке $a \in E$ называется величина

$$\omega(f; a) := \lim_{r \to +0} \omega(f; B_E(a; r)).$$

Из определения 6 непрерывности функции, с учетом свойств предела и критерия Коши, получаем совокупность часто используемых локальных свойств непрерывных функций. Перечислим эти

Локальные свойства непрерывных функций

a) *Отображение* $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ *множества* $E \subset \mathbb{R}^m$ *непрерывно в точке* $a \in E$ *тогда и только тогда, когда* $\omega(f; a) = 0$.

b) *Отображение* $f\colon E \to \mathbb{R}^n$, *непрерывное в точке* $a \in E$, *ограничено в некоторой окрестности* $U_E(a)$ *этой точки.*

c) *Если отображение* $g\colon Y \to \mathbb{R}^k$ *множества* $Y \subset \mathbb{R}^n$ *непрерывно в точке* $y_0 \in Y$, *а отображение* $f\colon X \to Y$ *множества* $X \subset \mathbb{R}^m$ *непрерывно в точке* $x_0 \in X$, *причем* $f(x_0) = y_0$, *то определено отображение* $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}^k$ *и оно непрерывно в точке* $x_0 \in X$.

Вещественнозначные функции, кроме того, обладают еще следующими свойствами.

d) *Если функция* $f\colon E \to \mathbb{R}$ *непрерывна в точке* $a \in E$ *и* $f(a) > 0$ (*или* $f(a) < 0$), *то найдется такая окрестность* $U_E(a)$ *точки* a *в* E, *что для* $x \in U_E(a)$ *справедливо* $f(x) > 0$ (*соответственно,* $f(x) < 0$).

e) *Если функции* $f\colon E \to \mathbb{R}$ *и* $g\colon E \to \mathbb{R}$ *непрерывны в точке* $a \in E$, *то их линейная комбинация* $(\alpha f + \beta g)\colon E \to \mathbb{R}$, *где* α, $\beta \in \mathbb{R}$, *произведение* $(f \cdot g)\colon E \to \mathbb{R}$, *а если* $g(x) \neq 0$ *на* E, *то и частное* $\left(\frac{f}{g}\right)\colon E \to \mathbb{R}$, *определены на* E *и непрерывны в точке* $a \in E$.

Условимся говорить, что функция $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ *непрерывна на множестве* E, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Множество функций $f\colon E \to \mathbb{R}^n$, непрерывных на E, будем обозначать символом $C(E;\mathbb{R}^n)$ или символом $C(E)$, если область значений функций однозначно определяется по контексту; как правило, это сокращение будет использоваться в случае, когда $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$.

Пример 6. Функции $(x^1, \ldots, x^m) \xmapsto{\pi^i} x^i$ $(i = 1, \ldots, m)$, отображающие $\mathbb{R}^m$ на $\mathbb{R}$ (проекции), очевидно, непрерывны в любой точке $a = (a^1, \ldots, a^m) \in \mathbb{R}^m$, ибо $\lim\limits_{x \to a} \pi^i(x) = a^i = \pi^i(a)$.

Пример 7. Любую функцию $x \mapsto f(x)$, определенную на $\mathbb{R}$, например $x \mapsto \sin x$, можно рассматривать и как функцию $(x, y) \xmapsto{F} f(x)$, определенную, положим, на $\mathbb{R}^2$. В таком случае, если f была непрерывна как функция на $\mathbb{R}$, новая функция $(x, y) \xmapsto{F} f(x)$ будет непрерывна как функция на $\mathbb{R}^2$. Это можно проверить либо непосредственно по определению непрерывности, либо заметить, что функция F есть композиция $(f \circ \pi^1)(x, y)$ непрерывных функций.

В частности, отсюда с учетом c) и e) следует, что, например, функции

$$f(x, y) = \sin x + e^{xy}, \qquad f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\ln\left(|x| + |y| + 1\right)\right)$$

непрерывны на $\mathbb{R}^2$.

Заметим, что проведенные рассуждения по существу своему локальны, а то, что в примере 7 функции f и F рассматривались соответственно на всей оси $\mathbb{R}$ или плоскости $\mathbb{R}^2$, является обстоятельством случайным.

Пример 8. Функция $f(x, y)$ из примера 2 непрерывна в любой точке пространства $\mathbb{R}^2$, кроме точки $(0, 0)$. Заметим, что, несмотря на разрывность функции $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$, эта функция непрерывна по любой из двух своих переменных при каждом фиксированном значении другой переменной.

Пример 9. Если функция $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ непрерывна на множестве E, а $\widetilde{E}$ — подмножество E, то ограничение $f|_{\widetilde{E}}$ функции f на это подмножество есть функция, непрерывная на $\widetilde{E}$, что непосредственно следует из определения непрерывности функции в точке.

Перейдем теперь к глобальным свойствам непрерывных функций. Чтобы сформулировать их для функций $f\colon E \to \mathbb{R}^n$, дадим сначала два определения.

Определение 8. Отображение $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ множества $E \subset \mathbb{R}^m$ в пространство $\mathbb{R}^n$ называется *равномерно непрерывным* на E, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для любых точек $x_1, x_2 \in E$ таких, что $d(x_1, x_2) < \delta$, выполнено $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Как и прежде, подразумевается, что расстояния $d(x_1, x_2)$, $d(f(x_1), f(x_2))$ измеряются соответственно в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$.

При $m = n = 1$ мы возвращаемся к уже знакомому нам определению равномерной непрерывности числовых функций.

Определение 9. Множество $E \subset \mathbb{R}^m$ называется *линейно связным*, если для любой пары x_0, x_1 его точек существует путь $\Gamma\colon I \to E$ с носителем в E и с концами в этих точках.

Иными словами, из любой точки $x_0 \in E$ можно пройти к любой точке $x_1 \in E$, не выходя за пределы множества E.

Поскольку мы пока не будем рассматривать иного понятия связности множества, кроме понятия линейной связности, то для краткости условимся пока линейно связные множества назвать просто *связными*.

Определение 10. *Областью* в пространстве $\mathbb{R}^m$ называется открытое связное множество.

Пример 10. Шар $B(a; r)$, $r > 0$, в $\mathbb{R}^m$ является областью. Открытость $B(a; r)$ в $\mathbb{R}^m$ нам уже известна. Проверим, что шар связен. Пусть $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^m)$ и $x_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^m)$ — две точки шара. Путь, задаваемый функциями $x^i(t) = tx_1^i + (1-t)x_0^i$ $(i = 1, \ldots, m)$, определенными на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$, имеет своими концами точки x_0 и x_1. Кроме того, его носитель лежит в шаре $B(a; r)$, поскольку, в силу неравенства

Минковского, при любом $t \in [0, 1]$

$$d(x(t), a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \bigl(x^i(t) - a^i\bigr)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \bigl(t(x_1^i - a^i) + (1-t)(x_0^i - a^i)\bigr)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \bigl(t(x_1^i - a^i)\bigr)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \bigl((1-t)(x_0^i - a^i)\bigr)^2} =$$

$$= t \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \bigl(x_1^i - a^i\bigr)^2} + (1-t) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \bigl(x_0^i - a^i\bigr)^2} < tr + (1-t)r = r.$$

Пример 11. Окружность (одномерная сфера) радиуса $r > 0$ есть подмножество в $\mathbb{R}^2$, задаваемое уравнением $(x^1)^2 + (x^2)^2 = r^2$. Полагая $x^1 = r\cos t$, $x^2 = r\sin t$, видим, что любые точки окружности можно соединить путем, идущим по этой окружности. Значит, окружность — связное множество. Однако это множество не является областью в $\mathbb{R}^2$, поскольку оно не открыто в $\mathbb{R}^2$.

Сформулируем теперь основные

Глобальные свойства непрерывных функций

a) *Если отображение $f\colon K \to \mathbb{R}^n$ непрерывно на компакте $K \subset \mathbb{R}^m$, то оно равномерно непрерывно на K.*

b) *Если отображение $f\colon K \to \mathbb{R}^n$ непрерывно на компакте $K \subset \mathbb{R}^m$, то оно ограничено на K.*

c) *Если функция $f\colon K \to \mathbb{R}$ непрерывна на компакте $K \subset \mathbb{R}^m$, то она принимает в некоторых точках K минимальное и максимальное из своих значений на K.*

d) *Если функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ непрерывна на связном множестве E, принимает в точках $a, b \in E$ значения $f(a) = A$, $f(b) = B$, то для любого числа C, лежащего между A и B, найдется точка $c \in E$, в которой $f(c) = C$.*

Изучая в свое время (гл. IV, § 2) локальные и глобальные свойства числовых функций одной переменной, мы дали такие их доказательства, которые переносятся и на рассматриваемый здесь более общий случай. Единственное изменение, которое при этом следует сделать в прежних доказательствах, состоит в том, что выражения типа $|x_1 - x_2|$ или $|f(x_1) - f(x_2)|$ надо заменить на $d(x_1, x_2)$ и $d(f(x_1), f(x_2))$, где d — метрика в том пространстве, где лежат рассматриваемые точки. Это замечание относится в полной мере ко всему, кроме последнего утверждения d), доказательство которого мы сейчас проведем.

◀ d) Пусть $\Gamma\colon I \to E$ — путь, являющийся таким непрерывным отображением отрезка $[\alpha, \beta] = I \subset \mathbb{R}$, что $\Gamma(\alpha) = a$, $\Gamma(\beta) = b$. В силу связности E такой путь существует. Функция $f \circ \Gamma\colon I \to \mathbb{R}$, как композиция непрерывных функций, непрерывна, поэтому на отрезке $[\alpha, \beta]$ найдется точка $\gamma \in [\alpha, \beta]$, в которой $f \circ \Gamma(\gamma) = C$. Положим $c = \Gamma(\gamma)$. Тогда $c \in E$ и $f(c) = C$. ▶

Пример 12. Сфера $S(0; r)$, задаваемая в $\mathbb{R}^m$ уравнением

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^m)^2 = r^2,$$

является компактом.

Действительно, из непрерывности функции

$$(x^1, \ldots, x^m) \mapsto (x^1)^2 + \ldots + (x^m)^2$$

следует замкнутость сферы, а из того, что на сфере $|x^i| \leqslant r$ $(i = 1, \ldots, m)$, следует ее ограниченность.

Функция

$$(x^1, \ldots, x^m) \mapsto (x^1)^2 + \ldots + (x^k)^2 - (x^{k+1})^2 - \ldots - (x^m)^2$$

непрерывна на всем пространстве $\mathbb{R}^m$, поэтому ее ограничение на сферу есть также непрерывная функция, которая в силу глобального свойства c) непрерывных функций имеет на сфере минимальное и максимальное значения. В точках сферы $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, \ldots, 0, 1)$ рассматриваемая функция принимает значения 1 и -1 соответственно. Ввиду связности сферы (см. задачу 3 в конце параграфа) на основании глобального свойства d) непрерывных функций можно утверждать, что на сфере есть точка, в которой рассматриваемая функция обращается в нуль.

Пример 13. Открытое множество $\mathbb{R}^m \setminus S(0; r)$ при $r > 0$ не является областью, так как оно несвязно.

Действительно, если $\Gamma\colon I \to \mathbb{R}^m$ есть путь, один конец которого совпадает с точкой $x_0 = (0, \ldots, 0)$, а другой — с некоторой точкой $x_1 =$

$= (x_1^1, \ldots, x_1^m)$ такой, что $(x_1^1)^2 + \ldots + (x_1^m)^2 > r^2$, то композиция непрерывных отображений $\Gamma\colon I \to \mathbb{R}^m$ и $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, где

$$(x^1, \ldots, x^m) \overset{f}{\longmapsto} (x^1)^2 + \ldots + (x^m)^2,$$

есть непрерывная на отрезке I функция, принимающая на его концах значения, меньшее и большее чем r^2. Значит, на этом отрезке найдется точка γ, в которой $(f \circ \Gamma)(\gamma) = r^2$. Тогда точка $x_\gamma = \Gamma(\gamma)$ носителя нашего пути оказывается лежащей на сфере $S(0; r)$. Мы показали, что нельзя выйти из шара $B(0; r) \subset \mathbb{R}^m$, не пересекая его граничной сферы $S(0; r)$.

Задачи и упражнения

1. Пусть $f \in C(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$. Покажите, что

a) множество $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) < c\}$ открыто в $\mathbb{R}^m$;

b) множество $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) \leqslant c\}$ замкнуто в $\mathbb{R}^m$;

c) множество $E_3 = \{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) = c\}$ замкнуто в $\mathbb{R}^m$;

d) если $f(x) \to +\infty$ при $x \to \infty$, то E_2 и E_3 компактны в $\mathbb{R}^m$;

e) для любой функции $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ множество $E_4 = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \omega(f; x) \geqslant \varepsilon\}$ замкнуто в $\mathbb{R}^m$.

2. Покажите, что отображение $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого в $\mathbb{R}^n$ множества является открытым в $\mathbb{R}^m$ множеством.

3. Покажите, что

a) образ $f(E)$ связного множества $E \subset \mathbb{R}^m$ при непрерывном отображении $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ является множеством связным;

b) объединение связных множеств, имеющих общую точку, является связным множеством;

c) полусфера $(x^1)^2 + \ldots + (x^m)^2 = 1,\ x^m \geqslant 0$, является связным множеством;

d) сфера $(x^1)^2 + \ldots + (x^m)^2 = 1$ является связным множеством;

e) если $E \subset \mathbb{R}$ и E связно, то E есть промежуток на $\mathbb{R}$ (т. е. отрезок, полуинтервал, интервал, луч или вся числовая ось);

f) если x_0 — внутренняя, а x_1 — внешняя точка множества $M \subset \mathbb{R}^m$, то носитель любого пути с концами x_0, x_1 пересекает границу множества M.

ГЛАВА VIII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Векторная структура в $\mathbb{R}^m$

1. $\mathbb{R}^m$ как векторное пространство. Из курса алгебры вам уже хорошо известно понятие векторного пространства.

Если в $\mathbb{R}^m$ ввести операцию сложения элементов $x_1 = (x_1^1, \dots, x_1^m)$, $x_2 = (x_2^1, \dots, x_2^m)$ по формуле

$$x_1 + x_2 = (x_1^1 + x_2^1, \dots, x_1^m + x_2^m), \tag{1}$$

а умножение элемента $x = (x^1, \dots, x^m)$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ — соотношением

$$\lambda x = (\lambda x^1, \dots, \lambda x^m), \tag{2}$$

то $\mathbb{R}^m$ становится векторным пространством над полем действительных чисел. Его точки теперь можно называть векторами.

Векторы

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \qquad (i = 1, \dots, m) \tag{3}$$

(где единица стоит лишь на i-м месте) образуют максимальную линейно независимую систему векторов этого пространства, ввиду чего оно оказывается m-мерным векторным пространством.

Любой вектор $x \in \mathbb{R}^m$ может быть разложен по базису (3), т. е. представлен в виде

$$x = x^1 e_1 + \ldots + x^m e_m. \tag{4}$$

Индекс при векторе мы условимся писать внизу, а координаты, как и до сих пор, будем отмечать верхним индексом. Это удобно по многим причинам, одна из которых, в частности, состоит в том, что, следуя Эйнштейну[1)], можно условиться выражения типа (4) записывать коротко в виде

$$x = x^i e_i, \tag{5}$$

считая, что появление одинакового индекса сверху и снизу означает суммирование по этому индексу в пределах диапазона его изменения.

2. Линейные отображения $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Напомним, что отображение $L\colon X \to Y$ векторного пространства X в векторное пространство Y называется *линейным*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ выполнено

$$L(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 L(x_1) + \lambda_2 L(x_2).$$

Нас будут интересовать линейные отображения $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Если $\{e_1, \ldots, e_m\}$ и $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n\}$ — фиксированные базисы пространств $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно, то, зная разложения

$$L(e_i) = a_i^1 \tilde{e}_1 + \ldots + a_i^n \tilde{e}_n = a_i^j \tilde{e}_j \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{6}$$

образов векторов базиса при линейном отображении $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, мы в силу линейности преобразования L можем найти разложение по базису $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n\}$ образа $L(h)$ любого вектора $h = h^1 e_1 + \ldots + h^m e_m = h^i e_i$. А именно:

$$L(h) = L(h^i e_i) = h^i L(e_i) = h^i a_i^j \tilde{e}_j = a_i^j h^i \tilde{e}_j. \tag{7}$$

Значит, в координатной записи:

$$L(h) = (a_i^1 h^i, \ldots, a_i^n h^i). \tag{8}$$

Отображение $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ при фиксированном в $\mathbb{R}^n$ базисе можно, таким образом, рассматривать как набор

$$L = (L^1, \ldots, L^n) \tag{9}$$

из n (координатных) отображений $L^j\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

[1)] А. Эйнштейн (1879 – 1955) — крупнейший физик XX столетия, работы которого по квантовой теории и особенно по теории относительности оказали революционизирующее влияние на всю современную физику.

С учетом (8) легко заключаем, что отображение $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ линейно тогда и только тогда, когда каждое отображение L^j набора (9) линейно.

Если записать набор (9) в виде столбца, то с учетом соотношения (8) имеем

$$L(h) = \begin{pmatrix} L^1(h) \\ \dots\dots \\ L^n(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 \ \dots \ a_m^1 \\ \dots\dots\dots \\ a_1^n \ \dots \ a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ \dots \\ h^m \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Итак, фиксация базисов в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ позволяет установить взаимно однозначное соответствие между линейными отображениями $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и $m \times n$-матрицами $\left(a_i^j\right)$ $(i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n)$. При этом столбец с номером i матрицы $\left(a_i^j\right)$, отвечающей отображению L, состоит из координат образа $L(e_i)$ вектора $e_i \in \{e_1, \dots, e_m\}$. Координаты образа $L(h)$ произвольного вектора $h = h^i e_i \in \mathbb{R}^m$ могут быть получены из соотношения (10) умножением матрицы линейного отображения на столбец координат вектора h.

При наличии в $\mathbb{R}^n$ структуры векторного пространства можно говорить о линейной комбинации $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ отображений $f_1\colon X \to \mathbb{R}^n$, $f_2\colon X \to \mathbb{R}^n$, полагая

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) := \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x). \tag{11}$$

В частности, линейная комбинация линейных отображений $L_1\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $L_2\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ есть, в соответствии с определением (11), отображение

$$h \mapsto \lambda_1 L_1(h) + \lambda_2 L_2(h) = L(h),$$

которое, очевидно, линейно. Матрица этого отображения есть соответствующая линейная комбинация матриц отображений L_1 и L_2.

Композиция $C = B \circ A$ линейных отображений $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, очевидно, также является линейным отображением, матрица которого, как следует из (10), есть произведение матрицы отображения A и матрицы отображения B (на которую умножаем слева). Кстати, закон умножения матриц определен известным вам образом именно для того, чтобы композиции отображений отвечало произведение матриц.

3. Норма в $\mathbb{R}^m$. Величину

$$\|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^m)^2} \tag{12}$$

назовем *нормой* вектора $x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$.

Из этого определения с учетом неравенства Минковского следует, что

1° $\|x\| \geqslant 0$,

2° $(\|x\| = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$,

3° $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, где $\lambda \in \mathbb{R}$,

4° $\|x_1 + x_2\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\|$.

Вообще, любую функцию $\| \ \| \colon X \to \mathbb{R}$ на векторном пространстве X, удовлетворяющую условиям $1^\circ - 4^\circ$, называют *нормой* в векторном пространстве. Иногда, чтобы уточнить, о какой норме идет речь, знак нормы вектора наделяют символом того пространства, в котором эту норму рассматривают. Например, можно написать $\|x\|_{\mathbb{R}^m}$ или $\|y\|_{\mathbb{R}^n}$, однако мы, как правило, не станем этого делать, ибо из контекста всегда будет ясно, о каком пространстве и какой норме идет речь.

Заметим, что в силу (12)

$$\|x_2 - x_1\| = d(x_1, x_2), \tag{13}$$

где $d(x_1, x_2)$ — расстояние в $\mathbb{R}^m$ между векторами x_1 и x_2, рассматриваемыми как точки метрического пространства $\mathbb{R}^m$.

Из соотношения (13) видно, что следующие условия равносильны:

$$x \to x_0, \qquad d(x, x_0) \to 0, \qquad \|x - x_0\| \to 0.$$

Ввиду (13), в частности, имеем

$$\|x\| = d(0, x).$$

Свойство 4° нормы называют *неравенством треугольника*, и теперь ясно почему.

Неравенство треугольника по индукции распространяется на сумму любого конечного числа слагаемых. А именно, справедливо неравенство

$$\|x_1 + \ldots + x_k\| \leqslant \|x_1\| + \ldots + \|x_k\|.$$

Наличие нормы вектора позволяет сравнивать по величине значения функций $f \colon X \to \mathbb{R}^m$, $g \colon X \to \mathbb{R}^n$.

Условимся писать, что $f(x) = o(g(x))$ или $f = o(g)$ при базе $\mathcal{B}$ в X, если $\|f(x)\|_{\mathbb{R}^m} = o(\|g(x)\|_{\mathbb{R}^n})$ при этой базе $\mathcal{B}$.

Если $f(x) = (f^1(x), \ldots, f^m(x))$ — координатное представление отображения $f\colon X \to \mathbb{R}^m$, то ввиду неравенств

$$|f^i(x)| \leqslant \|f(x)\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |f^i(x)| \tag{14}$$

можно сделать следующее полезное для дальнейшего наблюдение:

$$\bigl(f = o(g) \text{ при базе } \mathcal{B}\bigr) \Leftrightarrow \bigl(f^i = o(g) \text{ при базе } \mathcal{B};\ \ i = 1, \ldots, m\bigr). \tag{15}$$

Условимся также, что запись $f = O(g)$ при базе $\mathcal{B}$ в X будет означать, что $\|f(x)\|_{\mathbb{R}^m} = O(\|g(x)\|_{\mathbb{R}^n})$ при этой базе $\mathcal{B}$.

Тогда из (14) получаем, что

$$\bigl(f = O(g) \text{ при базе } \mathcal{B}\bigr) \Leftrightarrow \bigl(f^i = O(g) \text{ при базе } \mathcal{B};\ \ i = 1, \ldots, m\bigr). \tag{16}$$

Пример. Рассмотрим линейное отображение $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Пусть $h = h^1 e_1 + \ldots + h^m e_m$ — произвольный вектор пространства $\mathbb{R}^m$. Оценим $\|L(h)\|_{\mathbb{R}^n}$:

$$\|L(h)\| = \left\| \sum_{i=1}^{m} h^i L(e_i) \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \|L(e_i)\| |h^i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} \|L(e_i)\| \right) \|h\|. \tag{17}$$

Таким образом, можно утверждать, что

$$L(h) = O(h) \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{18}$$

В частности, из этого следует, что $L(x - x_0) = L(x) - L(x_0) \to 0$ при $x \to x_0$, т.е. линейное отображение $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ непрерывно в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Из оценки (17) видна даже равномерная непрерывность линейного отображения.

4. Евклидова структура в $\mathbb{R}^m$. Из алгебры известно понятие *скалярного произведения* в вещественном векторном пространстве как числовой функции $\langle x, y \rangle$, определенной на парах векторов пространства и обладающей свойствами

$$\langle x, x \rangle \geqslant 0,$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle x_2, x_1 \rangle,$$

$$\langle \lambda x_1, x_2 \rangle = \lambda \langle x_1, x_2 \rangle, \quad \text{где} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\langle x_1 + x_2, x_3 \rangle = \langle x_1, x_3 \rangle + \langle x_2, x_3 \rangle.$$

Из этих свойств, в частности, следует, что если в пространстве фиксирован базис $\{e_1, \ldots, e_m\}$, то через координаты $(x^1, \ldots, x^m)$, $(y^1, \ldots, y^m)$ векторов x и y их скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ запишется в виде билинейной формы

$$\langle x, y\rangle = g_{ij}x^i y^j \tag{19}$$

(подразумевается суммирование по i и по j), в которой $g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$.

Векторы называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

Базис $\{e_1, \ldots, e_m\}$ называется *ортонормированным*, если $g_{ij} = \delta_{ij}$, где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

В ортонормированном базисе скалярное произведение (19) имеет самый простой вид

$$\langle x, y\rangle = \delta_{ij}x^i y^j,$$

или

$$\langle x, y\rangle = x^1 \cdot y^1 + \ldots + x^m \cdot y^m. \tag{20}$$

Координаты, в которых скалярное произведение имеет такой вид, называют *декартовыми* координатами.

Напомним, что пространство $\mathbb{R}^m$ с определенным в нем скалярным произведением называется *евклидовым пространством*.

Между скалярным произведением (20) и нормой вектора (12) имеется очевидная связь

$$\langle x, x\rangle = \|x\|^2.$$

Из алгебры известно следующее неравенство:

$$\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle,$$

которое, в частности, показывает, что для любой пары векторов найдется угол $\varphi \in [0, \pi]$ такой, что

$$\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\| \cos\varphi.$$

Этот угол называют *углом между векторами x и y*. Именно по этой причине естественно считать ортогональными векторы, скалярное произведение которых равно нулю.

Полезным для нас будет также следующий известный из алгебры простой, но очень важный факт:

любая линейная функция $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *в евклидовом пространстве имеет вид*

$$L(x) = \langle \xi, x \rangle,$$

где $\xi \in \mathbb{R}^m$ *— фиксированный и однозначно соответствующий функции* L *вектор.*

§ 2. Дифференциал функции многих переменных

1. Дифференцируемость и дифференциал функции в точке

Определение 1. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}^n$, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}^m$, называется *дифференцируемой в точке* $x \in E$, предельной для множества E, если

$$\boxed{f(x+h) - f(x) = L(x)h + \alpha(x; h),} \tag{1}$$

где $L(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — линейная относительно h функция[1)], а $\alpha(x; h) = o(h)$ при $h \to 0$, $x + h \in E$.

Векторы

$$\Delta x(h) := (x+h) - x = h,$$
$$\Delta f(x; h) := f(x+h) - f(x)$$

называются соответственно *приращением аргумента* и *приращением функции* (отвечающим этому приращению аргумента). Эти векторы по традиции обозначают символами Δx и $\Delta f(x)$ самих функций от h.

Линейная функция $L(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ в соотношении (1) называется *дифференциалом*, *касательным отображением* или *производным отображением функции* $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ *в точке* $x \in E$.

Дифференциал функции $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ в точке $x \in E$ обозначается символами $df(x)$, $Df(x)$ или $f'(x)$.

[1)] По аналогии с одномерным случаем, мы позволим себе писать $L(x)h$ вместо $L(x)(h)$. Отметим также, что в определении мы подразумеваем, что $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ наделены указанной в § 1 нормой.

В соответствии с введенными обозначениями, соотношение (1) можно переписать в виде

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \alpha(x;h)$$

или

$$\Delta f(x;h) = df(x)h + \alpha(x;h).$$

Заметим, что дифференциал, в сущности, определен на смещениях h от рассматриваемой точки $x \in \mathbb{R}^m$.

Чтобы это подчеркнуть, с точкой $x \in \mathbb{R}^m$ связывают свой экземпляр векторного пространства $\mathbb{R}^m$ и обозначают его через $T_x\mathbb{R}^m$, $T\mathbb{R}^m(x)$ или $T\mathbb{R}^m_x$; $T\mathbb{R}^m_x$ можно трактовать как совокупность векторов, приложенных к точке $x \in \mathbb{R}^m$. Векторное пространство $T\mathbb{R}^m_x$ называют *касательным пространством к* $\mathbb{R}^m$ *в точке* $x \in \mathbb{R}^m$. Происхождение этой терминологии прояснится позже.

Значение дифференциала на векторе $h \in T\mathbb{R}^m_x$ есть вектор $f'(x)h \in T\mathbb{R}^n_{f(x)}$, приложенный к точке $f(x)$ и аппроксимирующий приращение $f(x+h) - f(x)$ функции, вызванное приращением h аргумента x.

Итак, $df(x)$ или $f'(x)$ есть линейное отображение $f'(x)\colon T\mathbb{R}^m_x \to T\mathbb{R}^n_{f(x)}$.

Мы видим, что, в полном соответствии с уже изученным нами одномерным случаем, функция многих переменных с векторными значениями дифференцируема в точке, если ее приращение $\Delta f(x;h)$ в этой точке как функция приращения аргумента h линейно по h с точностью до поправки $\alpha(x;h)$, бесконечно малой при $h \to 0$ в сравнении с приращением аргумента.

2. Дифференциал и частные производные вещественнозначной функции. Если векторы $f(x+h)$, $f(x)$, $L(x)h$, $\alpha(x;h)$ из $\mathbb{R}^n$ записать в координатах, то равенство (1) окажется равносильным n равенствам

$$f^i(x+h) - f^i(x) = L^i(x)h + \alpha^i(x;h) \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{2}$$

между вещественнозначными функциями, в которых, как следует из соотношений (9) и (15) §1, $L^i(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ суть линейные функции, а $\alpha^i(x;h) = o(h)$ при $h \to 0,\ x+h \in E$ для любого $i = 1, \dots, n$.

Таким образом, справедливо

Утверждение 1. *Отображение $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ множества $E \subset \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке $x \in E$, предельной для множества E, тогда и только тогда, когда в этой точке дифференцируемы функции $f^i\colon E \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$, задающие координатное представление данного отображения.*

Поскольку соотношения (1) и (2) равносильны, то для отыскания дифференциала $L(x)$ отображения $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ достаточно научиться находить дифференциалы $L^i(x)$ его координатных функций $f^i\colon E \to \mathbb{R}$.

Итак, рассмотрим вещественнозначную функцию $f\colon E \to \mathbb{R}$, определенную на множестве $E \subset \mathbb{R}^m$ и дифференцируемую во внутренней точке $x \in E$ этого множества. Заметим, что в дальнейшем нам большей частью придется иметь дело с тем случаем, когда E будет областью в $\mathbb{R}^m$. Если x есть внутренняя точка множества E, то при любом достаточно малом смещении h от точки x точка $x + h$ также будет принадлежать E и, следовательно, будет находиться в области определения функции $f\colon E \to \mathbb{R}$.

Если перейти к координатной записи точки $x = (x^1, \ldots, x^m)$, вектора $h = (h^1, \ldots, h^m)$ и линейной функции $L(x)h = a_1(x)h^1 + \ldots + a_m(x)h^m$, то условие

$$f(x + h) - f(x) = L(x)h + o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0 \tag{3}$$

перепишется в виде

$$\begin{aligned} f(x^1 + h^1, \ldots, x^m + h^m) - f(x^1, \ldots, x^m) = \\ = a_1(x)h^1 + \ldots + a_m(x)h^m + o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где $a_1(x), \ldots, a_m(x)$ — связанные с точкой x вещественные числа.

Мы хотим найти эти числа. Для этого вместо произвольного смещения h рассмотрим специальное смещение

$$h_i = h^i e_i = 0 \cdot e_1 + \ldots + 0 \cdot e_{i-1} + h^i e_i + 0 \cdot e_{i+1} + \ldots + 0 \cdot e_m$$

на вектор h_i, коллинеарный вектору e_i базиса $\{e_1, \ldots, e_m\}$ в $\mathbb{R}^m$.

При $h = h_i$, очевидно, $\|h\| = |h^i|$, поэтому из (4) при $h = h_i$ получаем

$$\begin{aligned} f(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^i + h^i, x^{i+1}, \ldots, x^m) - f(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^m) = \\ = a_i(x)h^i + o(h^i) \quad \text{при} \quad h^i \to 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Это означает, что если фиксировать в функции $f(x^1, \ldots, x^m)$ все переменные, кроме i-й, то получаемая при этом функция i-й переменной оказывается дифференцируемой в точке x^i.

Из равенства (5), таким образом, находим, что

$$a_i(x) = \\ = \lim_{h^i \to 0} \frac{f(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^i + h^i, x^{i+1}, \ldots, x^m) - f(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^m)}{h^i}. \quad (6)$$

Определение 2. Предел (6) называется *частной производной* функции $f(x)$ в точке $x = (x^1, \ldots, x^m)$ по переменной x^i. Его обозначают одним из следующих символов:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x), \quad \partial_i f(x), \quad D_i f(x), \quad f'_{x^i}(x).$$

Пример 1. Если $f(u, v) = u^3 + v^2 \sin u$, то

$$\partial_1 f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = 3u^2 + v^2 \cos u,$$

$$\partial_2 f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = 2v \sin u.$$

Пример 2. Если $f(x, y, z) = \operatorname{arctg}(xy^2) + e^z$, то

$$\partial_1 f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{y^2}{1 + x^2 y^4},$$

$$\partial_2 f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{2xy}{1 + x^2 y^4},$$

$$\partial_3 f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = e^z.$$

Итак, мы доказали

Утверждение 2. *Если функция $f\colon E \to \mathbb{R}$, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}^m$, дифференцируема во внутренней точке $x \in E$ этого множества, то в этой точке функция имеет частные производные по каждой переменной и дифференциал функции однозначно определяется этими частными производными в виде*

$$df(x)h = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x)h^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(x)h^m. \quad (7)$$

Формулу (7), используя соглашение о суммировании по повторяющемуся снизу и сверху индексу, можно записать компактно:

$$df(x)h = \partial_i f(x)h^i. \tag{8}$$

Пример 3. Если бы мы знали (а скоро мы это узнаем), что рассмотренная в примере 2 функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $(0, 1, 0)$, то можно было бы сразу записать, что

$$df(0,1,0)h = 1 \cdot h^1 + 0 \cdot h^2 + 1 \cdot h^3 = h^1 + h^3$$

и, в соответствии с этим,

$$f\left(h^1, 1 + h^2, h^3\right) - f(0,1,0) = df(0,1,0)h + o(h)$$

или

$$\operatorname{arctg}\left(h^1(1+h^2)^2\right) + e^{h^3} = 1 + h^1 + h^3 + o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Пример 4. Для функции $x = (x^1, \ldots, x^m) \xmapsto{\pi^i} x^i$, которая точке $x \in \mathbb{R}^m$ ставит в соответствие ее i-ю координату, имеем

$$\Delta\pi^i(x; h) = (x^i + h^i) - x^i = h^i,$$

т. е. приращение этой функции само есть линейная по h функция $h \xmapsto{\pi^i}$ $\xmapsto{\pi^i}$ h^i. Таким образом, $\Delta\pi^i(x; h) = d\pi^i(x)h$, причем отображение $d\pi^i(x) = d\pi^i$ на самом деле оказывается не зависящим от $x \in \mathbb{R}^m$ в том смысле, что $d\pi^i(x)h = h^i$ в любой точке $x \in \mathbb{R}^m$. Если вместо $\pi^i(x)$ писать $x^i(x)$, то получаем, что $dx^i(x)h = dx^i h = h^i$.

Учитывая это обстоятельство и формулу (8), мы теперь можем представить дифференциал любой функции в виде линейной комбинации дифференциалов координат ее аргумента $x \in \mathbb{R}^m$. А именно:

$$df(x) = \partial_i f(x)dx^i = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x)dx^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(x)dx^m, \tag{9}$$

поскольку для любого вектора $h \in T\mathbb{R}^m_x$ имеем

$$df(x)h = \partial_i f(x)h^i = \partial_i f(x)dx^i h.$$

3. Координатное представление дифференциала отображения. Матрица Якоби. Итак, мы нашли формулу (7) для дифференциала вещественнозначной функции $f\colon E \to \mathbb{R}$. Но тогда, в силу установленной эквивалентности соотношений (1) и (2), уже для любого отображения $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ множества $E \subset \mathbb{R}^m$, дифференцируемого во внутренней точке $x \in E$ этого множества, можно выписать координатное представление дифференциала $df(x)$ в виде

$$df(x)h = \begin{pmatrix} df^1(x)h \\ \dots\dots\dots \\ df^n(x)h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_i f^1(x)h^i \\ \dots\dots\dots \\ \partial_i f^n(x)h^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^m}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^m}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ \dots \\ h^m \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Определение 3. Матрица $\big(\partial_i f^j(x)\big)$ $(i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n)$ из частных производных координатных функций данного отображения в точке $x \in E$ называется *матрицей Якоби*[1)] или *якобианом*[2)] отображения в этой точке.

В случае, когда $n = 1$, мы возвращаемся к формуле (7), а когда $n = 1$ и $m = 1$, мы приходим к дифференциалу вещественнозначной функции одного вещественного переменного.

Из эквивалентности соотношений (1) и (2) и единственности дифференциала (7) вещественнозначной функции следует

Утверждение 3. *Если отображение $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ множества $E \subset \mathbb{R}^m$ дифференцируемо во внутренней точке $x \in E$ этого множества, то оно имеет в этой точке единственный дифференциал $df(x)$, причем координатное представление отображения $df(x)\colon T\mathbb{R}^m_x \to T\mathbb{R}^n_{f(x)}$ задается соотношением* (10).

4. Непрерывность, частные производные и дифференцируемость функции в точке. Мы закончим обсуждение понятия дифференцируемости функции в точке указанием на взаимоотношения между непрерывностью функции в точке, наличием у нее частных производных в точке и дифференцируемостью ее в этой точке.

В § 1 (соотношения (17) и (18)) мы установили, что если $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение, то $Lh \to 0$ при $h \to 0$. Таким образом, из

[1)] К. Г. Я. Якоби (1804 – 1851) — известный немецкий математик.

[2)] Якобианом чаще называют определитель этой матрицы (когда она квадратная).

соотношения (1) можно заключить, что функция, дифференцируемая в точке, непрерывна в этой точке, поскольку

$$f(x+h) - f(x) = L(x)h + o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0,\ \ x+h \in E.$$

Обратное, конечно, не верно потому, что, как нам известно, это не верно уже в одномерном случае.

Таким образом, взаимоотношение непрерывности и дифференцируемости функции в точке в многомерном случае такое же, как и в одномерном.

Совсем иначе обстоит дело во взаимоотношениях частных производных и дифференциала. В одномерном случае, т. е. в случае вещественнозначной функции одного вещественного переменного, наличие дифференциала и наличие производной у функции в точке были условиями равносильными. Для функций многих переменных мы показали (утверждение 2), что дифференцируемость функции во внутренней точке области определения обеспечивает существование у нее частных производных по каждой переменной в этой точке. Однако обратное утверждение уже не имеет места.

Пример 5. Функция

$$f(x^1, x^2) = \begin{cases} 0, & \text{если } x^1x^2 = 0, \\ 1, & \text{если } x^1x^2 \neq 0, \end{cases}$$

равна нулю на осях координат и потому имеет в точке $(0,0)$ обе частные производные:

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{h^1 \to 0} \frac{f(h^1, 0) - f(0,0)}{h^1} = \lim_{h^1 \to 0} \frac{0-0}{h^1} = 0,$$

$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{h^2 \to 0} \frac{f(0, h^2) - f(0,0)}{h^2} = \lim_{h^2 \to 0} \frac{0-0}{h^2} = 0.$$

Вместе с тем эта функция не дифференцируема в точке $(0,0)$, поскольку она, очевидно, разрывна в этой точке.

Приведенная в примере 5 функция не имеет одной из частных производных в точках осей координат, отличных от точки $(0,0)$. Однако функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

(которая нам встречалась в примере 2 из § 2 гл. VII), уже во всех точках плоскости (x, y) имеет частные производные, однако она тоже разрывна в начале координат и потому не дифференцируема в точке $(0, 0)$.

Таким образом, возможность написать правую часть равенств (7), (8) еще не гарантирует того, что это будет дифференциал нашей функции, поскольку функция может оказаться не дифференцируемой.

Это обстоятельство могло бы стать серьезной помехой всему дифференциальному исчислению функций многих переменных, если бы не выяснилось (это будет доказано позже), что непрерывности частных производных в точке достаточно для дифференцируемости функции в этой точке.

§ 3. Основные законы дифференцирования

1. Линейность операции дифференцирования

Теорема 1. *Если отображения $f_1\colon E \to \mathbb{R}^n$, $f_2\colon E \to \mathbb{R}^n$, определенные на множестве $E \subset \mathbb{R}^m$, дифференцируемы в точке $x \in E$, то их линейная комбинация $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\colon E \to \mathbb{R}^n$ также является дифференцируемым в этой точке отображением, причем имеет место равенство*

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)'(x) = (\lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2')(x). \tag{1}$$

Равенство (1) показывает, что операция дифференцирования, т. е. сопоставление отображению его дифференциала в точке, является линейной операцией на векторном пространстве отображений $f\colon E \to \mathbb{R}^n$, дифференцируемых в фиксированной точке множества E. Слева в (1) стоит, по определению, линейное отображение $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)'(x)$, а справа стоит линейная комбинация $(\lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2')(x)$ линейных отображений $f_1'(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $f_2'(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, которая, как нам известно из § 1, также является линейным отображением. Теорема 1 утверждает, что эти отображения совпадают.

$$\blacktriangleleft \quad (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x+h) - (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) =$$
$$= (\lambda_1 f_1(x+h) + \lambda_2 f_2(x+h)) - (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) =$$
$$= \lambda_1 (f_1(x+h) - f_1(x)) + \lambda_2 (f_2(x+h) - f_2(x)) =$$
$$= \lambda_1 (f_1'(x)h + o(h)) + \lambda_2 (f_2'(x)h + o(h)) =$$
$$= (\lambda_1 f_1'(x) + \lambda_2 f_2'(x))h + o(h). \quad \blacktriangleright$$

Если рассматриваемые функции вещественнозначны, то над ними выполнимы также операции умножения и (при необращении знаменателя в нуль) деления. Имеет место

Теорема 2. *Если функции $f\colon E \to \mathbb{R}$, $g\colon E \to \mathbb{R}$, определенные на множестве $E \subset \mathbb{R}^m$, дифференцируемы в точке $x \in E$, то*

a) *их произведение дифференцируемо в x, причем*

$$(f \cdot g)'(x) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x); \tag{2}$$

b) *их отношение дифференцируемо в x, если $g(x) \neq 0$, причем*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{1}{g^2(x)}\big(g(x)f'(x) - f(x)g'(x)\big)\,. \tag{3}$$

Доказательство этой теоремы совпадает с доказательством соответствующих пунктов теоремы 1 из § 2 гл. V, поэтому мы на нем не останавливаемся.

Соотношения (1), (2), (3) можно переписать также и в иных обозначениях дифференциала. А именно:

$$d(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = (\lambda_1 df_1 + \lambda_2 df_2)(x),$$

$$d(f \cdot g)(x) = g(x)df(x) + f(x)dg(x),$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{g^2(x)}\left(g(x)df(x) - f(x)dg(x)\right).$$

Посмотрим, что означают эти равенства в координатном представлении отображений. Нам известно, что если отображение $\varphi\colon E \to \mathbb{R}^n$, дифференцируемое во внутренней точке x множества $E \subset \mathbb{R}^m$, записать в координатном виде

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi^1(x^1, \ldots, x^m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi^n(x^1, \ldots, x^m) \end{pmatrix},$$

то его дифференциалу $d\varphi(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ в этой точке будет соответствовать матрица Якоби

$$\varphi'(x) = \begin{pmatrix} \partial_1\varphi^1 & \ldots & \partial_m\varphi^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial_1\varphi^n & \ldots & \partial_m\varphi^n \end{pmatrix}(x) = \left(\partial_i\varphi^j\right)(x).$$

При фиксированных базисах в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответствие между линейными отображениями $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и $m \times n$-матрицами — взаимно однозначное, поэтому линейное отображение L можно отождествить с задающей его матрицей.

Для обозначения матрицы Якоби мы все же, как правило, будем использовать символ $f'(x)$, а не символ $df(x)$, ибо это больше соответствует тому традиционному разделению понятий производной и дифференциала, которое проводится в одномерном случае.

Таким образом, в силу единственности дифференциала, во внутренней точке x множества E получаем следующие координатные формы записи соотношений (1), (2), (3), означающие равенства соответствующих матриц Якоби:

$$\bigl(\partial_i\bigl(\lambda_1 f_1^j + \lambda_2 f_2^j\bigr)\bigr)(x) = \bigl(\lambda_1\partial_i f_1^j + \lambda_2\partial_i f_2^j\bigr)(x) \qquad (i = 1, \ldots, m,\ \ j = 1, \ldots, n), \tag{1$'$}$$

$$\bigl(\partial_i(f \cdot g)\bigr)(x) = g(x)\partial_i f(x) + f(x)\partial_i g(x) \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{2$'$}$$

$$\left(\partial_i\left(\frac{f}{g}\right)\right)(x) = \frac{1}{g^2(x)}\bigl(g(x)\partial_i f(x) - f(x)\partial_i g(x)\bigr) \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{3$'$}$$

Из поэлементного равенства указанных матриц, например, следует, что частную производную по переменной x^i от произведения вещественнозначных функций $f(x^1, \ldots, x^m)$ и $g(x^1, \ldots, x^m)$ надо брать так:

$$\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x^i}(x^1, \ldots, x^m) = \\ = g(x^1, \ldots, x^m)\frac{\partial f}{\partial x^i}(x^1, \ldots, x^m) + f(x^1, \ldots, x^m)\frac{\partial g}{\partial x^i}(x^1, \ldots, x^m).$$

Отметим, что как это равенство, так и матричные равенства (1′), (2′), (3′) являются очевидными следствиями определения частной производной и обычных правил дифференцирования вещественнозначных функций одного вещественного переменного. Однако нам известно, что наличия частных производных еще может оказаться недостаточно для дифференцируемости функции многих переменных. Поэтому наряду с важными и вполне очевидными равенствами (1′), (2′), (3′) особую роль в теоремах 1 и 2 приобретают утверждения о существовании дифференциала соответствующего отображения.

Заметим, наконец, что по индукции из равенства (2) можно получить соотношение

$$d(f_1 \dots f_k)(x) = (f_2 \dots f_k)(x)\, df_1(x) + \dots + (f_1 \dots f_{k-1})(x)\, df_k(x)$$

для дифференциала произведения $(f_1 \dots f_k)$ дифференцируемых вещественнозначных функций.

2. Дифференцирование композиции отображений

a. Основная теорема

Теорема 3. *Если отображение $f\colon X \to Y$ множества $X \subset \mathbb{R}^m$ в множество $Y \subset \mathbb{R}^n$ дифференцируемо в точке $x \in X$, а отображение $g\colon Y \to \mathbb{R}^k$ дифференцируемо в точке $y = f(x) \in Y$, то композиция $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}^k$ этих отображений дифференцируема в точке x, причем дифференциал $d(g \circ f)\colon T\mathbb{R}^m_x \to T\mathbb{R}^k_{g(f(x))}$ композиции равен композиции $dg(y) \circ df(x)$ дифференциалов*

$$df(x)\colon T\mathbb{R}^m_x \to T\mathbb{R}^n_{f(x)=y}, \quad dg(y)\colon T\mathbb{R}^n_y \to T\mathbb{R}^k_{g(y)}.$$

Доказательство этой теоремы почти полностью повторяет доказательство теоремы 2 из § 2 гл. V. Чтобы обратить внимание на одну новую, появляющуюся теперь деталь, мы все же проведем еще раз это доказательство, не вдаваясь, однако, в уже разобранные технические подробности.

◀ Используя дифференцируемость отображений f и g в точках x и $y = f(x)$, а также линейность дифференциала $g'(x)$, можно написать, что

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x) &= g(f(x+h)) - g(f(x)) = \\
&= g'(f(x))(f(x+h) - f(x)) + o(f(x+h) - f(x)) = \\
&= g'(y)(f'(x)h + o(h)) + o(f(x+h) - f(x)) = \\
&= g'(y)(f'(x)h) + g'(y)(o(h)) + o(f(x+h) - f(x)) = \\
&= (g'(y) \circ f'(x))h + \alpha(x; h),
\end{aligned}$$

где $g'(y) \circ f'(x)$ есть линейное отображение (как композиция линейных отображений), а

$$\alpha(x; h) = g'(y)(o(h)) + o(f(x+h) - f(x)).$$

Но, как показывают соотношения (17), (18) из § 1,

$$g'(y)(o(h)) = o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h) = O(h) + o(h) = O(h) \quad \text{при} \quad h \to 0$$

и

$$o(f(x+h) - f(x)) = o(O(h)) = o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Следовательно,

$$\alpha(x; h) = o(h) + o(h) = o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

и теорема доказана. ►

Будучи переписана в координатной форме, теорема 3 означает, что если x — внутренняя точка множества X и

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f^1(x) \ \dots \ \partial_m f^1(x) \\ \dotfill \\ \partial_1 f^n(x) \ \dots \ \partial_m f^n(x) \end{pmatrix} = \left(\partial_i f^j\right)(x),$$

а $y = f(x)$ — внутренняя точка множества Y и

$$g'(y) = \begin{pmatrix} \partial_1 g^1(y) \ \dots \ \partial_n g^1(y) \\ \dotfill \\ \partial_1 g^k(y) \ \dots \ \partial_n g^k(y) \end{pmatrix} = \left(\partial_j g^l\right)(y),$$

то

$$(g \circ f)'(x) = \begin{pmatrix} \partial_1(g^1 \circ f)(x) \ \dots \ \partial_m(g^1 \circ f)(x) \\ \dotfill \\ \partial_1(g^k \circ f)(x) \ \dots \ \partial_m(g^k \circ f)(x) \end{pmatrix} = \Big(\partial_i(g^l \circ f)\Big)(x) =$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_1 g^1(y) \ \dots \ \partial_n g^1(y) \\ \dotfill \\ \partial_1 g^k(y) \ \dots \ \partial_n g^k(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 f^1(x) \ \dots \ \partial_m f^1(x) \\ \dotfill \\ \partial_1 f^n(x) \ \dots \ \partial_m f^n(x) \end{pmatrix} = \Big(\partial_j g^l(y) \cdot \partial_i f^j(x)\Big).$$

В равенстве

$$\Big(\partial_i(g^l \circ f)\Big)(x) = \Big(\partial_j g^l(f(x)) \cdot \partial_i f^j(x)\Big) \tag{4}$$

справа имеется в виду суммирование по индексу j в пределах его изменения, т. е. от 1 до n.

В отличие от равенств $(1')$, $(2')$, $(3')$, соотношение (4) нетривиально даже в смысле поэлементного равенства участвующих в нем матриц.

Рассмотрим некоторые важные частные случаи доказанной теоремы.

b. Дифференциал и частные производные сложной вещественнозначной функции. Пусть $z = g(y^1, \dots, y^n)$ — вещественнозначная функция вещественных переменных $y^1, \dots, y^n$, каждое из которых в свою очередь есть функция $y^j = f^j(x^1, \dots, x^m)$ $(j = 1, \dots, n)$ переменных $x^1, \dots, x^m$. В предположении дифференцируемости функций g и f^j $(j = 1, \dots, n)$ найдем частную производную $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x^i}(x)$ композиции отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to \mathbb{R}$.

По формуле (4), в которой при наших условиях $l = 1$, находим

$$\partial_i(g \circ f)(x) = \partial_j g(f(x)) \cdot \partial_i f^j(x) \tag{5}$$

или, в более подробной записи,

$$\frac{\partial z}{\partial x^i}(x) = \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^m) = \frac{\partial g}{\partial y^1} \cdot \frac{\partial y^1}{\partial x^i} + \dots + \frac{\partial g}{\partial y^n} \cdot \frac{\partial y^n}{\partial x^i} =$$
$$= \partial_1 g(f(x)) \cdot \partial_i f^1(x) + \dots + \partial_n g(f(x)) \cdot \partial_i f^n(x).$$

c. Производная по вектору и градиент функции в точке. Рассмотрим установившийся поток жидкости или газа в некоторой области G пространства $\mathbb{R}^3$. Термин «установившийся» означает, что скорость потока в каждой точке области G не меняется со временем, хотя в различных точках области G она, разумеется, может быть различной. Пусть, например, $f(x) = f(x^1, x^2, x^3)$ — давление в потоке в точке $x = (x^1, x^2, x^3) \in G$. Если мы будем перемещаться в потоке по закону $x = x(t)$, где t — время, то в момент t мы будем регистрировать давление $(f \circ x)(t) = f(x(t))$. Скорость изменения давления со временем вдоль нашей траектории, очевидно, есть производная $\frac{d(f \circ x)}{dt}(t)$ по времени от функции $(f \circ x)(t)$. Найдем ее в предположении, что $f(x^1, x^2, x^3)$ — дифференцируемая в области G функция. По закону дифференцирования композиции функций находим

$$\frac{d(f \circ x)}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x(t))\dot{x}^1(t) + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x(t))\dot{x}^2(t) + \frac{\partial f}{\partial x^3}(x(t))\dot{x}^3(t), \tag{6}$$

где $\dot{x}^i(t) = \frac{dx^i}{dt}(t)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Поскольку $(\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3)(t) = v(t)$ есть вектор скорости нашего перемещения в момент t, а $(\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f)(x)$ есть координатная запись дифференциала $df(x)$ функции f в точке x, то равенство (6) можно переписать также в виде

$$\frac{d(f \circ x)}{dt}(t) = df(x(t))v(t), \tag{7}$$

т. е. искомая величина есть значение дифференциала $df(x(t))$ функции $f(x)$ в точке $x(t)$ на векторе $v(t)$ скорости нашего движения.

В частности, если при $t = 0$ мы были в точке $x_0 = x(0)$, то

$$\frac{d(f \circ x)}{dt}(0) = df(x_0)v, \tag{8}$$

где $v = v(0)$ — вектор скорости в момент $t = 0$.

Правая часть соотношения (8) зависит только от точки $x_0 \in G$ и вектора v скорости, которую мы имеем в этой точке, и не зависит от конкретного вида траектории $x = x(t)$, лишь бы было выполнено условие $\dot{x}(0) = v$. Это означает, что на любой траектории вида

$$x(t) = x_0 + vt + \alpha(t), \tag{9}$$

где $\alpha(t) = o(t)$ при $t \to 0$, значение левой части равенства (8) будет одинаково, поскольку оно вполне определяется заданием точки x_0 и вектора $v \in T\mathbb{R}^3_{x_0}$, приложенного к этой точке. В частности, если бы мы хотели непосредственно вычислить значение левой (а значит, и правой) части равенства (8), то можно было бы в качестве закона движения выбрать функцию

$$x(t) = x_0 + vt, \tag{10}$$

отвечающую равномерному движению со скоростью v, при котором в момент $t = 0$ мы находимся в точке $x(0) = x_0$.

Дадим теперь следующее

Определение 1. Если функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^m$, а $v \in T\mathbb{R}^m_{x_0}$ — вектор, приложенный к точке x_0, то величина

$$\boxed{D_v f(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + vt) - f(x_0)}{t}} \tag{11}$$

(если указанный предел существует) называется *производной функции f в точке x_0 по вектору v.*

Из проведенных рассмотрений следует, что если функция f дифференцируема в точке x_0, то при любой функции $x(t)$ вида (9) и, в частности, вида (10) имеет место равенство

$$D_v f(x_0) = \frac{d(f \circ x)}{dt}(0) = df(x_0)v, \tag{12}$$

что в координатном представлении означает

$$D_v f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)v^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0)v^m. \tag{13}$$

В частности, для базисных векторов $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_m = (0, \ldots, 0, 1)$ из этой формулы получаем

$$D_{e_i} f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

На основании равенства (12) в силу линейности дифференциала $df(x_0)$ заключаем, что если f — дифференцируемая в точке x_0 функция, то для любых векторов $v_1, v_2 \in T\mathbb{R}^m_{x_0}$ и любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ функция имеет в точке x_0 производную по вектору $(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \in T\mathbb{R}^m_{x_0}$ и при этом

$$D_{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2} f(x_0) = \lambda_1 D_{v_1} f(x_0) + \lambda_2 D_{v_2} f(x_0). \tag{14}$$

Если пространство $\mathbb{R}^m$ рассматривать как евклидово пространство, т. е. как векторное пространство со скалярным произведением, то (см. § 1) любую линейную функцию $L(v)$ можно будет записать в виде скалярного произведения $\langle \xi, v \rangle$ фиксированного вектора $\xi = \xi(L)$ и переменного вектора v.

В частности, найдется вектор ξ такой, что

$$df(x_0)v = \langle \xi, v \rangle. \tag{15}$$

Определение 2. Вектор $\xi \in T\mathbb{R}^m_{x_0}$, отвечающий в смысле равенства (15) дифференциалу $df(x_0)$ функции f в точке x_0, называется *градиентом* функции в этой точке и обозначается символом $\operatorname{grad} f(x_0)$.

Итак, по определению

$$\boxed{df(x_0)v = \langle \operatorname{grad} f(x_0), v \rangle.} \tag{16}$$

Если в $\mathbb{R}^m$ выбрана декартова система координат, то, сопоставляя соотношения (12), (13) и (16), заключаем, что в такой системе координат градиент имеет следующее координатное представление:

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^m}\right)(x_0). \tag{17}$$

Выясним теперь геометрический смысл вектора $\operatorname{grad} f(x_0)$.

Пусть $e \in T\mathbb{R}^m_{x_0}$ — единичный вектор. Тогда в силу (16)

$$D_e f(x_0) = |\operatorname{grad} f(x_0)| \cos\varphi, \tag{18}$$

где φ — угол между векторами e и $\operatorname{grad} f(x_0)$.

Таким образом, если $\operatorname{grad} f(x_0) \neq 0$ и $e = \|\operatorname{grad} f(x_0)\|^{-1} \operatorname{grad} f(x_0)$, то производная $D_e f(x_0)$ принимает наибольшее значение. То есть скорость роста функции f (выраженная в единицах величины f, отнесенных к единице длины в $\mathbb{R}^m$) при движении из точки x_0 максимальна и равна $\|\operatorname{grad} f(x_0)\|$, когда мы смещаемся именно в направлении вектора $\operatorname{grad} f(x_0)$. При смещении в противоположном направлении значения функции наиболее резко уменьшаются, а при смещении в направлении, перпендикулярном вектору $\operatorname{grad} f(x_0)$, скорость изменения значений функции равна нулю.

Производную по единичному вектору данного направления обычно называют *производной по данному направлению*.

Поскольку единичный вектор в евклидовом пространстве задается направляющими косинусами:

$$e = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_m),$$

где α_i — угол, который вектор e образует с базисным вектором e_i декартовой системы координат, то

$$D_e f(x_0) = \langle \operatorname{grad} f(x_0), e\rangle = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)\cos\alpha_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0)\cos\alpha_m.$$

Вектор $\operatorname{grad} f(x_0)$ встречается очень часто и имеет многочисленные применения. Например, на отмеченном выше геометрическом свойстве градиента основаны так называемые *градиентные методы* численного (на ЭВМ) поиска экстремумов функций многих переменных. (См. в этой связи задачу 2 в конце параграфа.)

Многие важные векторные поля, как, например, ньютоновское поле сил тяготения или кулоновское поле заряда, являются градиентами некоторых скалярных функций — потенциалов этих полей (см. задачу 3).

Многие физические законы в самой своей формулировке используют вектор $\operatorname{grad} f$. Например, в механике сплошной среды эквивалентом основного закона Ньютона $ma = F$ динамики точки является соотношение

$$\rho \boldsymbol{a} = -\operatorname{grad} p,$$

связывающее ускорение $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(x,t)$ в потоке свободной от внешних сил идеальной жидкости или газа в точке x в момент t с плотностью среды $\rho = \rho(x,t)$ и градиентом давления $p = p(x,t)$, отнесенными к этой же точке и к этому же моменту времени (см. задачу 4).

О векторе $\operatorname{grad} f$ мы еще будем говорить позже, при изучении векторного анализа и элементов теории поля.

3. Дифференцирование обратного отображения

Теорема 4. *Пусть $f\colon U(x) \to V(y)$ — отображение окрестности $U(x) \subset \mathbb{R}^m$ точки x на окрестность $V(y) \subset \mathbb{R}^m$ точки $y = f(x)$. Пусть f непрерывно в точке x и имеет обратное отображение $f^{-1}\colon V(y) \to U(x)$, непрерывное в точке y.*

Если при этом отображение f дифференцируемо в точке x и касательное к f в точке x отображение $f'(x)\colon T\mathbb{R}^m_x \to T\mathbb{R}^m_y$ имеет обратное отображение $[f'(x)]^{-1}\colon T\mathbb{R}^m_y \to T\mathbb{R}^m_x$, то отображение $f^{-1}\colon V(y) \to U(x)$ дифференцируемо в точке $y = f(x)$ и справедливо равенство

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \left[f'(x)\right]^{-1}.$$

Таким образом, взаимно обратные дифференцируемые отображения имеют в соответствующих точках взаимно обратные касательные отображения.

◄ Положим

$$f(x) = y, \qquad f(x+h) = y + t, \qquad t = f(x+h) - f(x);$$

тогда

$$f^{-1}(y) = x, \qquad f^{-1}(y+t) = x + h, \qquad h = f^{-1}(y+t) - f^{-1}(y).$$

Будем предполагать, что h столь мало, что $x + h \in U(x)$, а значит, $y + t \in V(y)$.

Из непрерывности f в x и f^{-1} в y следует, что

$$t = f(x+h) - f(x) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0 \tag{1}$$

и

$$h = f^{-1}(y+t) - f^{-1}(y) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0. \tag{2}$$

Из дифференцируемости f в точке x следует, что

$$t = f'(x)h + o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0, \tag{3}$$

т. е. можно утверждать даже, что $t = O(h)$ при $h \to 0$ (см. соотношения (17), (18) из § 1).

Покажем, что если $f'(x)$ — обратимое линейное отображение, то и $h = O(t)$ при $t \to 0$.

В самом деле, из (3) последовательно получаем

$$\begin{aligned}
&\big[f'(x)\big]^{-1} t = h + \big[f'(x)\big]^{-1} o(h) && \text{при} \quad h \to 0, \qquad (4)\\
&\big[f'(x)\big]^{-1} t = h + o(h) && \text{при} \quad h \to 0,\\
&\Big\|\big[f'(x)\big]^{-1} t\Big\| \geqslant \|h\| - \|o(h)\| && \text{при} \quad h \to 0,\\
&\Big\|\big[f'(x)\big]^{-1} t\Big\| \geqslant \tfrac{1}{2}\|h\| && \text{при} \quad \|h\| < \delta,
\end{aligned}$$

где число $\delta > 0$ выбрано так, что $\|o(h)\| < \frac{1}{2}\|h\|$ при $\|h\| < \delta$. Тогда с учетом соотношения (2) находим

$$\|h\| \leqslant 2\Big\|\big[f'(x)\big]^{-1} t\Big\| = O\big(\|t\|\big) \quad \text{при} \quad t \to 0,$$

что равносильно соотношению

$$h = O(t) \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$o(h) = o(t) \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Учитывая это, из (2) и (4) получаем

$$h = \big[f'(x)\big]^{-1} t + o(t) \quad \text{при} \quad t \to 0$$

или

$$f^{-1}(y+t) - f^{-1}(y) = \big[f'(x)\big]^{-1} t + o(t) \quad \text{при} \quad t \to 0. \quad \blacktriangleright$$

Из алгебры известно, что если линейному преобразованию $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ отвечает матрица A, то обратному к L линейному преобразованию $L^{-1}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ соответствует матрица A^{-1}, обратная к матрице A. Построение элементов обратной матрицы также известно из алгебры, следовательно, доказанная теорема дает прямой рецепт для построения отображения $\left(f^{-1}\right)'(y)$.

Отметим, что при $m = 1$, т. е. при $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}$, якобиан отображения $f\colon U(x) \to V(y)$ в точке x сводится к одному числу $f'(x)$ — производной функции f в точке x, а линейное преобразование $f'(x)\colon T\mathbb{R}_x \to T\mathbb{R}_y$ сводится к умножению на это число: $h \mapsto f'(x)h$. Это линейное преобразование обратимо тогда и только тогда, когда $f'(x) \neq 0$, причем матрица обратного преобразования $[f'(x)]^{-1} : T\mathbb{R}_y \to T\mathbb{R}_x$ также состоит из одного числа, равного $[f'(x)]^{-1}$, т. е. обратного к $f'(x)$. Значит, теорема 4 содержит в себе также доказанное ранее правило отыскания производной обратной функции.

Задачи и упражнения

1. a) Два пути $t \mapsto x_1(t)$, $t \mapsto x_2(t)$ в $\mathbb{R}^m$ будем считать эквивалентными в точке $x_0 \in \mathbb{R}^m$, если $x_1(0) = x_2(0) = x_0$ и $d(x_1(t), x_2(t)) = o(t)$ при $t \to 0$.

Проверьте, что указанное отношение действительно является отношением эквивалентности, т. е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

b) Проверьте, что между векторами $\boldsymbol{v} \in T\mathbb{R}^m_{x_0}$ и классами эквивалентных в точке x_0 гладких путей имеется взаимно однозначное соответствие.

c) Отождествляя касательное пространство $T\mathbb{R}^m_{x_0}$ с множеством классов эквивалентных в точке $x_0 \in \mathbb{R}^m$ гладких путей, введите операции сложения классов путей и умножения их на число.

d) Проверьте, зависят ли введенные вами операции от системы координат в $\mathbb{R}^m$.

2. a) Изобразите график функции $z = x^2 + 4y^2$, где (x, y, z) — декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$.

b) Пусть $f\colon C \to \mathbb{R}$ — числовая функция, определенная в области $G \subset \mathbb{R}^m$. *Уровнем* (c-уровнем) функции называется множество $E \subset G$, на котором функция принимает одно значение ($f(E) = c$). Точнее, $E = f^{-1}(c)$. Изобразите в $\mathbb{R}^2$ уровни функции, указанной в a).

c) Найдите градиент функции $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ и проверьте, что в любой точке (x, y) вектор $\operatorname{grad} f$ ортогонален линии уровня функции f, проходящей через эту точку.

d) Используя результаты задач a), b), c), проложите на поверхности $z = x^2 + 4y^2$ самый короткий, на ваш взгляд, маршрут спуска из точки $(2, 1, 8)$ поверхности в низшую ее точку $(0, 0, 0)$.

e) Какой алгоритм, пригодный для ЭВМ, вы могли бы предложить для отыскания минимума функции $f(x,y) = x^2 + 4y^2$?

3. Говорят, что в области G пространства $\mathbb{R}^m$ задано *векторное поле*, если каждой точке $x \in G$ сопоставлен некоторый вектор $\boldsymbol{v}(x) \in T\mathbb{R}^m_x$. Векторное поле $\boldsymbol{v}(x)$ в G называется *потенциальным*, если в области G есть числовая функция $U\colon G \to \mathbb{R}$ такая, что $\boldsymbol{v}(x) = \operatorname{grad} U(x)$. Функцию $U(x)$ называют *потенциалом* поля $\boldsymbol{v}(x)$. (В физике потенциалом обычно называют функцию $-U(x)$, а функцию $U(x)$ называют *силовой функцией*, если речь идет о поле сил.)

a) Изобразите на плоскости с декартовыми координатами (x,y) поле $\operatorname{grad} f(x,y)$ для каждой из функций $f_1(x,y) = x^2 + y^2$; $f_2(x,y) = -(x^2+y^2)$; $f_3(x,y) = \operatorname{arctg}(x/y)$ в области $y > 0$; $f_4(x,y) = xy$.

b) Согласно закону Ньютона частица массы m, находящаяся в точке $0 \in \mathbb{R}^3$, притягивает частицу массы 1, находящуюся в точке $x \in \mathbb{R}^3$ $(x \neq 0)$, с силой $\boldsymbol{F} = -m|\boldsymbol{r}|^{-3}\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{r}$ — вектор $\overrightarrow{0x}$ (размерную постоянную G мы опустили). Покажите, что векторное поле $\boldsymbol{F}(x)$ в $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ потенциально.

c) Проверьте, что массы m_i, $(i = 1, \ldots, n)$, помещенные в точках (ξ_i, η_i, ζ_i) $(i = 1, \ldots, n)$ соответственно, создают вне этих точек ньютоновское поле сил, потенциалом которого служит функция

$$U(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\sqrt{(x-\xi_i)^2 + (y-\eta_i)^2 + (z-\zeta_i)^2}}.$$

d) Укажите потенциал кулоновского электростатического поля напряженности, создаваемого точечными зарядами q_i $(i = 1, \ldots, n)$, помещенными в точках (ξ_i, η_i, ζ_i) $(i = 1, \ldots, n)$ соответственно.

4. Рассмотрим движение идеальной несжимаемой жидкости в пространстве, свободном от внешних (в том числе и гравитационных) сил.

Пусть $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x,y,z,t)$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(x,y,z,t)$, $\rho = \rho(x,y,z,t)$, $p = p(x,y,z,t)$ суть соответственно скорость, ускорение, плотность и давление в точке (x,y,z) среды в момент времени t.

Идеальность жидкости означает, что давление в любой ее точке не зависит от направления.

a) Выделите из жидкости объем в виде небольшого параллелепипеда, одно из ребер которого параллельно вектору $\operatorname{grad} p(x,y,z,t)$ (где $\operatorname{grad} p$ берется по пространственным координатам). Оцените действующую на объем за счет перепада давления силу и дайте приближенную формулу для ускорения этого объема, считая жидкость несжимаемой.

b) Проверьте, согласуется ли полученный вами в a) результат с *уравнением Эйлера*

$$\rho\boldsymbol{a} = -\operatorname{grad} p.$$

c) Линия, в любой точке которой касательная имеет направление вектора скорости в этой точке, называется *линией тока*. Движение называется *установившимся*, если функции $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$, ρ, p не зависят от t. Используя b), покажите, что вдоль линий тока в установившемся потоке несжимаемой жидкости величина $\frac{1}{2}\|\boldsymbol{v}\|^2 + p/\rho$ постоянна (*закон Бернулли*[1]).

d) Как изменятся формулы в a) и b), если движение будет происходить в поле тяжести вблизи поверхности Земли? Покажите, что в этом случае

$$\rho\boldsymbol{a} = -\operatorname{grad}(gz + p)$$

и потому вдоль каждой линии тока установившегося движения несжимаемой жидкости на сей раз постоянна величина $\frac{1}{2}\|\boldsymbol{v}\|^2 + gz + p/\rho$, где g — ускорение силы тяжести, а z — высота точки линии тока, отсчитываемая от некоторого нулевого уровня.

e) Объясните на основании предыдущих результатов, почему несущее крыло имеет характерный выпуклый вверх профиль.

f) В цилиндрический стакан с круглым дном радиуса R налита до уровня h несжимаемая идеальная жидкость плотности ρ. После этого стакан стали вращать вокруг его оси с угловой скоростью ω. Используя несжимаемость жидкости, найдите уравнение $z = f(x, y)$ ее поверхности в установившемся режиме (см. также задачу 3 из гл. V, § 1).

g) По найденному в f) уравнению $z = f(x, y)$ поверхности напишите формулу $p = p(x, y, z)$ для давления в любой точке (x, y, z) объема, заполненного вращающейся жидкостью. Проверьте, выполнено ли для найденной вами формулы полученное в d) уравнение $\rho\boldsymbol{a} = -\operatorname{grad}(gz + p)$.

h) Не могли бы вы теперь объяснить, почему чаинки тонут (хотя и не слишком быстро!), а при вращении чая собираются не у стенок стакана, а в центре дна?

5. *Оценка погрешностей вычисления значений функции.*

a) Используя определение дифференцируемой функции и приближенное равенство $\Delta f(x; h) \approx df(x)h$, покажите, что относительная погрешность $\delta = \delta(f(x); h)$ в значении произведения $f(x) = x^1 \ldots x^m$ m отличных от нуля сомножителей, вызванная погрешностями в задании самих сомножителей, может быть найдена в виде $\delta \approx \sum\limits_{i=1}^{m} \delta_i$, где δ_i — относительная погрешность задания i-го сомножителя.

b) Используя то, что $d\ln f(x) = \frac{1}{f(x)} df(x)$, еще раз получите результат предыдущей задачи и покажите, что вообще относительную погрешность дроби

$$\frac{f_1 \cdots f_n}{g_1 \cdots g_k}(x_1, \ldots, x_m)$$

можно найти как сумму относительных погрешностей значений функций $f_1, \ldots, f_n,\ g_1, \ldots, g_k$.

---

[1] Д. Бернулли (1700 – 1782) — швейцарский ученый, один из наиболее выдающихся физиков и математиков своего времени.

6. *Однородные функции и тождество Эйлера.* Функция $f\colon G \to \mathbb{R}$, определенная в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^m$, называется *однородной* (*положительно однородной*) *степени* n, если для любых $x \in \mathbb{R}^m$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ таких, что $x \in G$ и $\lambda x \in G$, имеет место равенство

$$f(\lambda x) = \lambda^n f(x) \qquad (f(\lambda x) = |\lambda|^n f(x)).$$

Функция называется *локально однородной* степени n в области G, если она является однородной функцией указанной степени в некоторой окрестности любой точки области G.

a) Докажите, что в выпуклой области всякая локально однородная функция является однородной.

b) Пусть область G есть плоскость $\mathbb{R}^2$ без луча $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2 \wedge \wedge\, y \geqslant 0\}$. Проверьте, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} y^4/x, & \text{если } x > 2 \wedge y > 0, \\ y^3 & \text{в остальных точках области} \end{cases}$$

локально однородна в G, но не является однородной функцией в этой области.

c) Укажите степень однородности или положительной однородности следующих функций, рассматриваемых в их естественной области определения:

$$\begin{aligned} &f_1(x^1, \ldots, x^m) = x^1x^2 + x^2x^3 + \ldots + x^{m-1}x^m; \\ &f_2(x^1, x^2, x^3, x^4) = \frac{x^1x^2 + x^3x^4}{x^1x^2x^3 + x^2x^3x^4}; \\ &f_3(x^1, \ldots, x^m) = |x^1 \ldots x^m|^l. \end{aligned}$$

d) Продифференцировав равенство $f(tx) = t^n f(x)$ по t, покажите, что если дифференцируемая функция $f\colon G \to \mathbb{R}$ локально однородна степени n в области $G \subset \mathbb{R}^m$, то она удовлетворяет в G следующему *тождеству Эйлера для однородных функций*:

$$x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1, \ldots, x^m) + \ldots + x^m \frac{\partial f}{\partial x^m}(x^1, \ldots, x^m) \equiv n f(x^1, \ldots, x^m).$$

e) Покажите, что если для дифференцируемой в области G функции $f\colon G \to \mathbb{R}$ выполнено тождество Эйлера, то эта функция локально однородна степени n в области G.

Указание. Проверьте, что функция $\varphi(t) = t^{-n} f(tx)$ при любом $x \in G$ определена и постоянна в некоторой окрестности единицы.

7. *Однородные функции и метод размерности.*

1° *Размерность физической величины и особенности функциональных связей между физическими величинами.*

Физические законы устанавливают взаимосвязи физических величин, поэтому если для некоторых из этих величин принять какие-то единицы измерения, то единицы измерения связанных с ними других величин будут определенным образом выражаться через единицы измерения фиксированных величин. Так возникают основные и производные единицы той или иной системы единиц измерения.

В системе СИ (Système International) за основные механические единицы измерения приняты единицы длины — метр (м), массы — килограмм (кг) и времени — секунда (с).

Выражение производной единицы измерения через основные называется ее *размерностью*. Это определение ниже будет уточнено.

Размерность любой механической величины записывают символически в виде формулы, выражающей ее через предложенные Максвеллом[1)] символы L, M, T размерностей указанных выше основных единиц. Например, размерности скорости, ускорения и силы имеют соответственно вид

$$[v] = LT^{-1}, \quad [a] = LT^{-2}, \quad [F] = MLT^{-2}.$$

Если физические законы не зависят от выбора единиц измерения, то отражением этой инвариантности должны быть определенные особенности функциональной зависимости

$$x_0 = f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \tag{$*$}$$

между числовыми характеристиками физических величин.

Рассмотрим, например, зависимость $c = f(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}$ между длинами катетов и длиной гипотенузы прямоугольного треугольника. Изменение масштаба длин должно одинаково сказаться на всех длинах, поэтому для любых допустимых значений a и b должно быть выполнено соотношение $f(\alpha a, \alpha b) = \varphi(\alpha) f(a, b)$, причем в нашем случае $\varphi(\alpha) = \alpha$.

Основная (на первый взгляд очевидная) предпосылка теории размерности состоит в том, что *претендующая на физическую значимость зависимость* $(*)$ *должна быть такой, чтобы при изменении масштабов основных единиц измерения численные значения всех одноименных величин, участвующих в формуле, менялись в одно и то же число раз.*

В частности, если x_1, x_2, x_3 — основные независимые физические величины и $(x_1, x_2, x_3) \mapsto f(x_1, x_2, x_3)$ — зависимость от них некоторой четвертой физической величины, то, в силу сформулированного принципа, при любых допустимых значениях x_1, x_2, x_3 должно быть выполнено равенство

$$f(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3) = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) f(x_1, x_2, x_3), \tag{$**$}$$

с некоторой конкретной функцией φ.

[1)] Дж. К. Максвелл (1831 – 1879) — выдающийся английский физик; создал математическую теорию электромагнитного поля, известен также исследованиями по кинетической теории газов, оптике и механике.

Функция φ в равенстве $(**)$ полностью характеризует зависимость численного значения рассматриваемой физической величины от изменения масштабов основных фиксированных физических величин. Таким образом, эту функцию и следует считать *размерностью* данной физической величины по отношению к фиксированным основным единицам измерения.

Уточним теперь вид функции размерности.

a) Пусть $x \mapsto f(x)$ — функция одного переменного, удовлетворяющая условию $f(\alpha x) = \varphi(\alpha) f(x)$, где f и φ — дифференцируемые функции.

Покажите, что $\varphi(\alpha) = \alpha^d$.

b) Покажите, что функция размерности φ в равенстве $(**)$ всегда имеет вид $\alpha_1^{d_1} \cdot \alpha_2^{d_2} \cdot \alpha_3^{d_3}$, где показатели степени d_1, d_2, d_3 суть некоторые действительные числа. Таким образом, если, например, фиксированы основные единицы L, M, T, то набор (d_1, d_2, d_3) показателей в степенном выражении $L^{d_1} M^{d_2} T^{d_3}$ также можно считать *размерностью* данной физической величины.

c) В b) было получено, что функция размерности всегда имеет вид степенной зависимости, т. е. является однородной функцией определенной степени по каждой из основных единиц измерения. Что означает, что степень однородности функции размерности некоторой физической величины по отношению к одной из основных единиц измерения равна нулю?

2° П-*теорема и метод размерности.*

Пусть $[x_i] = X_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ — размерности физических величин, участвующих в законе $(*)$.

Предположим, что размерности величин x_0, $x_{k+1}, \ldots, x_n$ могут быть выражены через размерности величин $x_1, \ldots, x_k$, т. е.

$$[x_0] = X_0 = X_1^{p_0^1} \ldots X_k^{p_0^k},$$
$$[x_{k+i}] = X_{k+i} = X_1^{p_i^1} \ldots X_k^{p_i^k}, \qquad (i = 1, \ldots, n-k).$$

d) Покажите, что тогда наряду с $(*)$ должно быть справедливо соотношение

$$\alpha_1^{p_0^1} \ldots \alpha_k^{p_0^k} x_0 = f\left(\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_k x_k, \alpha_1^{p_1^1} \ldots \alpha_k^{p_1^k} x_{k+1}, \ldots, \alpha_1^{p_{n-k}^1} \ldots \alpha_k^{p_{n-k}^k} x_n\right). \quad (***)$$

e) Если $x_1, \ldots, x_k$ независимы, то в $(***)$ положим $\alpha_1 = x_1^{-1}, \ldots, \alpha_k = x_k^{-1}$. Проверьте, что при этом из $(***)$ получается равенство

$$\frac{x_0}{x_1^{p_0^1} \ldots x_k^{p_0^k}} = f\left(1, \ldots, 1, \frac{x_{k+1}}{x_1^{p_1^1} \ldots x_k^{p_1^k}}, \ldots, \frac{x_n}{x_1^{p_{n-k}^1} \ldots x_k^{p_{n-k}^k}}\right),$$

являющееся соотношением

$$\Pi = f(1, \ldots, 1, \Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}) \qquad (****)$$

между безразмерными величинами $\Pi, \Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}$.

Таким образом, получается следующая

П-теорема теории размерности. *Если в соотношении* $(*)$ *величины* $x_1, \dots, x_k$ *независимы, то это соотношение сводится к функции* $(****)$ *от* $n-k$ *безразмерных параметров.*

f) Проверьте, что если $k = n$, то на основании П-теоремы функция f из соотношения $(*)$ может быть найдена с точностью до числового множителя. Найдите таким путем выражение $c(\varphi_0)\sqrt{l/g}$ для периода колебаний маятника (т. е. подвешенной на нити длины l массы m, качающейся у поверхности Земли; φ_0 — начальный угол отклонения).

g) Найдите формулу $P = c\sqrt{mr/F}$ для периода обращения тела массы m, удерживаемого на круговой орбите центральной силой величины F.

h) Из закона Кеплера $(P_1/P_2)^2 = (r_1/r_2)^3$, устанавливающего в применении к круговым орбитам связь между отношением периодов обращения планет (спутников) и отношением радиусов их орбит, найдите, вслед за Ньютоном, показатель степени α в законе $F = G\frac{m_1 m_2}{r^\alpha}$ всемирного тяготения.

§ 4. Основные факты дифференциального исчисления вещественнозначных функций многих переменных

1. Теорема о среднем

Теорема 1. *Пусть* $f\colon G \to \mathbb{R}$ — *вещественнозначная функция, определенная в области* $G \subset \mathbb{R}^m$. *Пусть отрезок* $[x, x+h]$ *с концами* x, $x+h$ *содержится в* G. *Если при этих условиях функция* f *непрерывна в точках отрезка* $[x, x+h]$ *и дифференцируема в точках интервала* $]x, x+h[$, *то найдется такая точка* $\xi \in\,]x, x+h[$, *что имеет место равенство*

$$\boxed{f(x+h) - f(x) = f'(\xi)h.} \tag{1}$$

◀ Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x+th),$$

определенную на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$. Функция F удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа: она непрерывна на $[0,1]$, как композиция непрерывных отображений, и дифференцируема в интервале $]0,1[$, как композиция дифференцируемых отображений. Следовательно, найдется точка $\theta \in\,]0,1[$ такая, что

$$F(1) - F(0) = F'(\theta) \cdot 1.$$

Но $F(1) = f(x+h)$, $F(0) = f(x)$, $F'(\theta) = f'(x+\theta h)h$ и, значит, выделенное равенство совпадает с утверждением теоремы 1. ►

Приведем теперь координатную форму записи соотношения (1).

Если $x = (x^1, \ldots, x^m)$, $h = (h^1, \ldots, h^m)$ и $\xi = (x^1 + \theta h^1, \ldots, x^m + \theta h^m)$, то равенство (1) означает, что

$$f(x+h) - f(x) = f(x^1 + h^1, \ldots, x^m + h^m) - f(x^1, \ldots, x^m) =$$
$$= f'(\xi)h = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^m}(\xi)\right)\begin{pmatrix} h^1 \\ \ldots \\ h^m \end{pmatrix} =$$
$$= \partial_1 f(\xi)h^1 + \ldots + \partial_m f(\xi)h^m = \sum_{i=1}^{m} \partial_i f(x^1 + \theta h^1, \ldots, x^m + \theta h^m)h^i.$$

Используя соглашение о суммировании по повторяющемуся сверху и снизу индексу, окончательно можно записать

$$f(x^1 + h^1, \ldots, x^m + h^m) - f(x^1, \ldots, x^m) =$$
$$= \partial_i f(x^1 + \theta h^1, \ldots, x^m + \theta h^m)h^i, \tag{1'}$$

где $0 < \theta < 1$, причем θ зависит и от x, и от h.

Замечание. Теорема 1 называется теоремой о среднем в связи с тем, что существует некоторая «средняя» точка $\xi \in]x, x+h[$, в которой выполняется равенство (1). Мы уже отмечали при обсуждении теоремы Лагранжа (см. гл. V, § 3, п. 1), что теорема о среднем специфична именно для вещественнозначных функций. Общая теорема о конечном приращении для отображений будет доказана в главе X (часть II).

Из теоремы 1 вытекает полезное

Следствие. *Если функция $f\colon G \to \mathbb{R}$ дифференцируема в области $G \subset \mathbb{R}^m$ и в любой точке $x \in G$ ее дифференциал равен нулю, то f постоянна в области G.*

◄ Равенство нулю линейного отображения равносильно обращению в нуль всех элементов отвечающей ему матрицы. В нашем случае

$$df(x)h = (\partial_1 f, \ldots, \partial_m f)(x)h,$$

поэтому $\partial_1 f(x) = \ldots = \partial_m f(x) = 0$ в любой точке $x \in G$.

По определению, область есть открытое связное множество. Воспользуемся этим.

Покажем сначала, что если $x \in G$, то в шаре $B(x;r) \subset G$ функция f постоянна. Действительно, если $(x+h) \in B(x;r)$, то и $[x, x+h] \subset \subset B(x;r) \subset G$. Применяя соотношение (1) или (1′), получаем

$$f(x+h) - f(x) = f'(\xi)h = 0 \cdot h = 0,$$

т. е. $f(x+h) = f(x)$ и значения f в шаре $B(x;r)$ совпадают со значением f в центре этого шара.

Пусть теперь $x_0, x_1 \in G$ — произвольные точки области G. В силу связности G найдется путь $t \mapsto x(t) \in G$ такой, что $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$. Мы предполагаем, что непрерывное отображение $t \mapsto x(t)$ определено на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$. Пусть $B(x_0;r)$ — шар с центром в x_0, содержащийся в G. Поскольку $x(0) = x_0$ и отображение $t \mapsto x(t)$ непрерывно, найдется положительное число δ такое, что $x(t) \in B(x_0;r) \subset G$ при $0 \leqslant t \leqslant \delta$. Тогда по доказанному $(f \circ x)(t) \equiv f(x_0)$ на промежутке $[0, \delta]$.

Пусть $l = \sup \delta$, где верхняя грань берется по всем числам $\delta \in [0,1]$ таким, что $(f \circ x)(t) \equiv f(x_0)$ на промежутке $[0, \delta]$. В силу непрерывности функции $f(x(t))$ имеем $f(x(l)) = f(x_0)$. Но тогда $l = 1$. Действительно, в противном случае можно было бы взять некоторый шар $B(x(l);r) \subset G$, в котором $f(x) = f(x(l)) = f(x_0)$, затем в силу непрерывности отображения $t \mapsto x(t)$ найти $\Delta > 0$ так, что $x(t) \in B(x(l);r)$ при $l \leqslant t \leqslant l + \Delta$. Тогда $(f \circ x)(t) = f(x(l)) = f(x_0)$ при $0 \leqslant t \leqslant l + \Delta$ и $l \neq \sup \delta$.

Итак, показано, что $(f \circ x)(t) = f(x_0)$ при любом $t \in [0,1]$. В частности, $(f \circ x)(1) = f(x_1) = f(x_0)$ и мы проверили, что в любых двух точках $x_0, x_1 \in G$ значения функции $f\colon G \to \mathbb{R}$ совпадают. ►

2. Достаточное условие дифференцируемости функции многих переменных

Теорема 2. *Пусть $f\colon U(x) \to \mathbb{R}$ — функция, определенная в окрестности $U(x) \subset \mathbb{R}^m$ точки $x = (x^1, \ldots, x^m)$.*

Если функция f имеет в каждой точке окрестности $U(x)$ все частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x^m}$, то из их непрерывности в точке x следует дифференцируемость функции f в этой точке.

◄ Без ограничения общности будем считать, что $U(x)$ является шаром $B(x;r)$. Тогда вместе с точками $x = (x^1, \ldots, x^m)$, $x + h = = (x^1 + h^1, \ldots, x^m + h^m)$ области $U(x)$ должны принадлежать также точки $(x^1, x^2+h^2, \ldots, x^m+h^m), \ldots, (x^1, x^2, \ldots, x^{m-1}, x^m+h^m)$ и соединяющие их отрезки. Воспользуемся этим, применяя в следующей выкладке теорему Лагранжа для функций одной переменной:

$$\begin{gathered}
f(x+h)-f(x)=f(x^1+h^1,\ldots,x^m+h^m)-f(x^1,\ldots,x^m)= \\
=f(x^1+h^1,\ldots,x^m+h^m)-f(x^1,x^2+h^2,\ldots,x^m+h^m)+ \\
+f(x^1,x^2+h^2,\ldots,x^m+h^m)-f(x^1,x^2,x^3+h^3,\ldots,x^m+h^m)+\ldots+ \\
+f(x^1,x^2,\ldots,x^{m-1},x^m+h^m)-f(x^1,\ldots,x^m)= \\
=\partial_1 f(x^1+\theta^1h^1,x^2+h^2,\ldots,x^m+h^m)h^1+ \\
+\partial_2 f(x^1,x^2+\theta^2h^2,x^3+h^3,\ldots,x^m+h^m)h^2+\ldots+ \\
+\partial_m f(x^1,x^2,\ldots,x^{m-1},x^m+\theta^mh^m)h^m.
\end{gathered}$$

Пока мы воспользовались лишь наличием у функции f в области $U(x)$ частных производных по каждой из переменных.

Теперь воспользуемся их непрерывностью в точке x. Продолжая предыдущую выкладку, получаем, что

$$\begin{gathered}
f(x+h)-f(x)=\partial_1 f(x^1,\ldots,x^m)h^1+\alpha^1h^1+ \\
+\partial_2 f(x^1,\ldots,x^m)h^2+\alpha^2h^2+\ldots+ \\
+\partial_m f(x^1,\ldots,x^m)h^m+\alpha^mh^m,
\end{gathered}$$

где величины $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ в силу непрерывности частных производных в точке x стремятся к нулю при $h \to 0$.

Но это означает, что

$$f(x+h)-f(x)=L(x)h+o(h) \quad \text{при} \quad h\to 0,$$

где $L(x)h = \partial_1 f(x^1, \ldots, x^m)h^1 + \ldots + \partial_m f(x^1, \ldots, x^m)h^m$. ►

Из теоремы 2 следует, что если частные производные функции $f\colon G \to \mathbb{R}$ непрерывны в области $G \subset \mathbb{R}^m$, то функция дифференцируема в любой точке этой области.

Условимся в дальнейшем через $C^{(1)}(G;\mathbb{R})$ или, проще, через $C^{(1)}(G)$ обозначать множество функций, имеющих в области G непрерывные частные производные.

3. Частные производные высшего порядка. Если функция $f : G \to \mathbb{R}$, определенная в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^m$, имеет частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}(x)$ по одной из переменных $x^1, \dots, x^m$, то эта частная производная вновь является некоторой функцией $\partial_i f \colon G \to \mathbb{R}$, которая в свою очередь может иметь частную производную $\partial_j(\partial_i f)(x)$ по некоторой переменной x^j.

Функция $\partial_j(\partial_i f) \colon G \to \mathbb{R}$ называется *второй производной от функции f по переменным x^i, x^j* и обозначается одним из символов

$$\partial_{ji} f(x), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x).$$

Порядок индексов указывает, в каком порядке производится дифференцирование по соответствующим переменным.

Мы определили частные производные второго порядка.

Если определена частная производная

$$\partial_{i_1 \dots i_k} f(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}}(x)$$

порядка k, то по индукции определяем частную производную порядка $k+1$ соотношением

$$\partial_{i i_1 \dots i_k} f(x) := \partial_i(\partial_{i_1 \dots i_k} f)(x).$$

Здесь возникает специфический для случая функций многих переменных вопрос о том, влияет ли порядок дифференцирований на вычисляемую частную производную.

Теорема 3. *Если функция $f \colon G \to \mathbb{R}$ имеет в области G частные производные*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x),$$

то в любой точке $x \in G$, в которой обе эти производные непрерывны, их значения совпадают.

◄ Пусть $x \in G$ — точка, в которой обе функции $\partial_{ij} f \colon G \to \mathbb{R}$, $\partial_{ji} f \colon G \to \mathbb{R}$ непрерывны. Дальнейшие рассмотрения будем проводить в некотором шаре $B(x; r) \subset G$, $r > 0$, являющемся выпуклой окрестностью точки x. Мы хотим проверить, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x^1, \dots, x^m) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x^1, \dots, x^m).$$

Поскольку во всех дальнейших выкладках меняться будут только переменные x^i и x^j, то мы для сокращения записи предположим, что f есть функция двух переменных $f(x^1, x^2)$, и нам надо проверить, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}(x^1, x^2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1}(x^1, x^2),$$

если в точке $(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ обе указанные функции непрерывны.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(h^1, h^2) = f(x^1 + h^1, x^2 + h^2) - f(x^1 + h^1, x^2) - f(x^1, x^2 + h^2) + f(x^1, x^2),$$

где смещение $h = (h^1, h^2)$ предполагается достаточно малым, а именно таким, что $x + h \in B(x; r)$.

Если $F(h^1, h^2)$ рассмотреть как разность

$$F(h^1, h^2) = \varphi(1) - \varphi(0),$$

где $\varphi(t) = f(x^1 + th^1, x^2 + h^2) - f(x^1 + th^1, x^2)$, то по теореме Лагранжа найдем, что

$$F(h^1, h^2) = \varphi'(\theta_1) = \big(\partial_1 f(x^1 + \theta_1 h^1, x^2 + h^2) - \partial_1 f(x^1 + \theta_1 h^1, x^2)\big)\, h^1.$$

Применяя к последней разности вновь теорему Лагранжа, найдем, что

$$F(h^1, h^2) = \partial_{21} f(x^1 + \theta_1 h^1, x^2 + \theta_2 h^2) h^2 h^1. \tag{2}$$

Если теперь $F(h^1, h^2)$ представить в виде разности

$$F(h^1, h^2) = \widetilde{\varphi}(1) - \widetilde{\varphi}(0),$$

где $\widetilde{\varphi}(t) = f(x^1 + h^1, x^2 + th^2) - f(x^1, x^2 + th^2)$, то аналогично найдем, что

$$F(h^1, h^2) = \partial_{12} f(x^1 + \tilde{\theta}_1 h^1, x^2 + \tilde{\theta}_2 h^2) h^1 h^2. \tag{3}$$

Сравнивая равенства (2) и (3), заключаем, что

$$\partial_{21} f(x^1 + \theta_1 h^1, x^2 + \theta_2 h^2) = \partial_{12} f(x^1 + \tilde{\theta}_1 h^1, x^2 + \tilde{\theta}_2 h^2), \tag{4}$$

где θ_1, θ_2, $\tilde{\theta}_1$, $\tilde{\theta}_2 \in \,]0, 1[$. Воспользовавшись непрерывностью рассматриваемых частных производных в точке (x^1, x^2) при $h \to 0$, из (4) получаем нужное равенство

$$\partial_{21} f(x^1, x^2) = \partial_{12} f(x^1, x^2). \quad \blacktriangleright$$

Заметим, что без каких-либо дополнительных предположений, вообще говоря, нельзя утверждать, что справедливо равенство $\partial_{ij}f(x) = \partial_{ji}f(x)$, если обе указанные частные производные определены в точке x (см. задачу 2 в конце параграфа).

Договоримся в дальнейшем через $C^{(k)}(G;\mathbb{R})$ или $C^{(k)}(G)$ обозначать множество функций $f\colon G \to \mathbb{R}$, все частные производные которых до порядка k включительно определены и непрерывны в области $G \subset \mathbb{R}^m$.

В качестве следствия теоремы 3 получаем

Утверждение 1. *Если $f \in C^{(k)}(G;\mathbb{R})$, то значение $\partial_{i_1\ldots i_k}f(x)$ частной производной не зависит от порядка $i_1,\ldots,i_k$ дифференцирования, т. е. остается тем же при любой перестановке индексов $i_1,\ldots,i_k$.*

◀ В случае $k = 2$ это утверждение содержится в теореме 3.

Предположим, что утверждение справедливо до порядка n включительно. Покажем, что тогда оно справедливо и для порядка $n+1$.

Но $\partial_{i_1 i_2\ldots i_{n+1}}f(x) = \partial_{i_1}(\partial_{i_2\ldots i_{n+1}}f)(x)$. Индексы i_2, …, i_{n+1} по предположению индукции можно переставлять, не меняя функции $\partial_{i_2\ldots i_{n+1}}f(x)$, а следовательно, и функции $\partial_{i_1\ldots i_{n+1}}f(x)$. Поэтому достаточно проверить, что можно переставлять также, например, индексы i_1 и i_2, не меняя значения производной $\partial_{i_1 i_2\ldots i_{n+1}}f(x)$.

Поскольку

$$\partial_{i_1 i_2\ldots i_{n+1}}f(x) = \partial_{i_1 i_2}(\partial_{i_3\ldots i_{n+1}}f)(x),$$

то возможность этой перестановки непосредственно вытекает из теоремы 3. В силу принципа индукции утверждение 1 доказано. ▶

Пример 1. Пусть $f(x) = f(x^1, x^2)$ — функция класса $C^{(k)}(G;\mathbb{R})$.

Пусть $h = (h^1, h^2)$ таково, что отрезок $[x, x+h]$ содержится в области G. Покажем, что функция

$$\varphi(t) = f(x + th),$$

определенная на отрезке $[0,1]$, принадлежит классу $C^{(k)}[0,1]$, и найдем ее производную по t порядка k.

Имеем

$$\varphi'(t) = \partial_1 f(x^1 + th^1, x^2 + th^2)h^1 + \partial_2 f(x^1 + th^1, x^2 + th^2)h^2,$$

$$\begin{aligned}\varphi''(t) = \partial_{11}f(x+th)h^1h^1 + \partial_{21}f(x+th)h^2h^1 +\\ + \partial_{12}f(x+th)h^1h^2 + \partial_{22}f(x+th)h^2h^2 =\\ = \partial_{11}f(x+th)(h^1)^2 + 2\partial_{12}f(x+th)h^1h^2 + \partial_{22}f(x+th)(h^2)^2.\end{aligned}$$

Эти соотношения можно записать в форме действия на функцию оператора $(h^1\partial_1 + h^2\partial_2)$:

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= (h^1\partial_1 + h^2\partial_2)f(x+th) = h^i\partial_i f(x+th),\\ \varphi''(t) &= (h^1\partial_1 + h^2\partial_2)^2 f(x+th) = h^{i_1}h^{i_2}\partial_{i_1i_2}f(x+th).\end{aligned}$$

По индукции получаем

$$\varphi^{(k)}(t) = (h^1\partial_1 + h^2\partial_2)^k f(x+th) = h^{i_1}\dots h^{i_k}\partial_{i_1\dots i_k}f(x+th)$$

(имеется в виду суммирование по всевозможным наборам $i_1, \dots, i_k$ из k индексов, каждый из которых принимает значения 1 или 2).

Пример 2. Если $f(x) = f(x^1, \dots, x^m)$ и $f \in C^{(k)}(G;\mathbb{R})$, то, в предположении, что $[x, x+h] \subset G$, для функции $\varphi(t) = f(x+th)$, определенной на отрезке $[0,1]$, получаем

$$\varphi^{(k)}(t) = h^{i_1}\dots h^{i_k}\partial_{i_1\dots i_k}f(x+th), \tag{5}$$

где справа имеется в виду суммирование по всевозможным наборам индексов $i_1, \dots, i_k$, каждый из которых может принимать любое значение от 1 до m включительно.

Формулу (5) можно записать также в виде

$$\varphi^{(k)}(t) = (h^1\partial_1 + \dots + h^m\partial_m)^k f(x+th). \tag{6}$$

4. Формула Тейлора

Теорема 4. *Если функция $f\colon U(x) \to \mathbb{R}$ определена и принадлежит классу $C^{(n)}(U(x);\mathbb{R})$ в окрестности $U(x) \subset \mathbb{R}^m$ точки $x \in \mathbb{R}^m$, а отрезок $[x, x+h]$ полностью содержится в $U(x)$, то имеет место равенство*

$$f(x^1+h^1,\dots,x^m+h^m)-f(x^1,\dots,x^m)= \\ =\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}(h^1\partial_1+\dots+h^m\partial_m)^k f(x)+r_{n-1}(x;h), \tag{7}$$

где

$$r_{n-1}(x;h)=\int_0^1\frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}(h^1\partial_1+\dots+h^m\partial_m)^n f(x+th)\,dt. \tag{8}$$

Равенство (7) совместно с соотношением (8) называется *формулой Тейлора с интегральной формой остаточного члена.*

◀ Формула Тейлора (7) немедленно следует из соответствующей формулы Тейлора для функции одной переменной. В самом деле, рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(t)=f(x+th),$$

которая в силу условий теоремы 4 определена на отрезке $0\leqslant t\leqslant 1$ и (как мы проверили выше) принадлежит классу $C^{(n)}[0,1]$.

Тогда при $\tau\in[0,1]$ в силу формулы Тейлора для функций одной переменной можно записать, что

$$\varphi(\tau)=\varphi(0)+\frac{1}{1!}\varphi'(0)\tau+\dots+\frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\tau^{n-1}+ \\ +\int_0^1\frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n)}(t\tau)\tau^n\,dt.$$

Полагая здесь $\tau=1$, получаем

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\frac{1}{1!}\varphi'(0)+\dots+\frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)+ \\ +\int_0^1\frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n)}(t)\,dt. \tag{9}$$

Подставляя в полученное равенство, в соответствии с формулой (6), значения

$$\varphi^{(k)}(0)=(h^1\partial_1+\dots+h^m\partial_m)^k f(x) \qquad (k=0,\dots,n-1),$$
$$\varphi^{(n)}(t)=(h^1\partial_1+\dots+h^m\partial_m)^n f(x+th),$$

получаем то, что и утверждает теорема 4. ▶

Замечание. Если вместо интегральной формы остаточного члена в соотношении (9) написать остаточный член в форме Лагранжа, то из равенства

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0) + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(\theta),$$

где $0 < \theta < 1$, получается формула Тейлора (7) с остаточным членом

$$r_{n-1}(x; h) = \frac{1}{n!}(h^1\partial_1 + \ldots + h^m\partial_m)^n f(x + \theta h). \tag{10}$$

Эту форму остаточного члена, так же как и в случае функций одной переменной, называют *формой Лагранжа остаточного члена формулы Тейлора.*

Коль скоро $f \in C^{(n)}(U(x); \mathbb{R})$, то из (10) следует, что

$$r_{n-1}(x; h) = \frac{1}{n!}(h^1\partial_1 + \ldots + h^m\partial_m)^n f(x) + o\big(\|h\|^n\big) \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

поэтому имеет место равенство

$$\begin{aligned} f(x^1 + h^1, \ldots, x^m + h^m) - f(x^1, \ldots, x^m) &= \\ = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(h^1\partial_1 + \ldots + h^m\partial_m)^k f(x) &+ o\big(\|h\|^n\big) \quad \text{при} \quad h \to 0, \end{aligned} \tag{11}$$

называемое *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.*

5. Экстремумы функций многих переменных. Одним из важнейших применений дифференциального исчисления является его использование для отыскания и исследования экстремумов функций.

Определение 1. Говорят, что функция $f\colon E \to \mathbb{R}$, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}^m$, имеет *локальный максимум* (*локальный минимум*) во внутренней точке x_0 множества E, если существует окрестность $U(x_0) \subset E$ точки x_0 такая, что $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно, $f(x) \geqslant f(x_0)$) при $x \in U(x_0)$.

Если при $x \in U(x_0) \setminus x_0$ имеет место строгое неравенство $f(x) < f(x_0)$ (или, соответственно, $f(x) > f(x_0)$), то говорят, что функция имеет в точке x_0 *строгий локальный максимум* (*строгий локальный минимум*).

Определение 2. Локальные минимумы и локальные максимумы функции называют ее *локальными экстремумами.*

Теорема 5. *Пусть функция* $f\colon U(x_0) \to \mathbb{R}$*, определенная в окрестности* $U(x_0) \subset \mathbb{R}^m$ *точки* $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m)$*, имеет в точке* x_0 *частные производные по каждой из переменных* $x^1, \dots, x^m$.

Тогда для того, чтобы функция имела в x_0 *локальный экстремум, необходимо, чтобы в этой точке были выполнены равенства*

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0) = 0. \tag{12}$$

◀ Рассмотрим функцию $\varphi(x^1) = f(x^1, x_0^2, \dots, x_0^m)$ одной переменной, определенную, в силу условий теоремы, в некоторой окрестности точки x_0^1 вещественной оси. В точке x_0^1 функция $\varphi(x^1)$ имеет локальный экстремум, и поскольку

$$\varphi'\left(x_0^1\right) = \frac{\partial f}{\partial x^1}\left(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^m\right),$$

то $\dfrac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) = 0$.

Аналогично доказываются и остальные равенства системы (12). ▶

Обратим внимание на то, что равенства (12) дают лишь необходимые, но не достаточные условия экстремума функции многих переменных. Примером, подтверждающим это, может стать любой пример, построенный по этому же поводу для функции одной переменной. Так, если раньше мы говорили о функции $x \mapsto x^3$, имеющей в нуле нулевую производную, но не имеющей там экстремума, то теперь можно рассмотреть функцию

$$f(x^1, \dots, x^m) = (x^1)^3,$$

все частные производные которой в точке $x_0 = (0, \dots, 0)$ равны нулю, но экстремума в этой точке функция, очевидно, не имеет.

Теорема 5 показывает, что если функция $f\colon G \to \mathbb{R}$ определена на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^m$, то ее локальные экстремумы находятся либо среди точек, в которых f не дифференцируема, либо в тех точках, в которых дифференциал $df(x_0)$ или, что то же самое, касательное отображение $f'(x_0)$ обращается в нуль.

Нам известно, что если отображение $f\colon U(x_0) \to \mathbb{R}^n$, определенное в окрестности $U(x_0) \subset \mathbb{R}^m$ точки $x_0 \in \mathbb{R}^m$, дифференцируемо в x_0, то матрица касательного отображения $f'(x_0)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \partial_1 f^1(x_0) & \dots & \partial_m f^1(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 f^n(x_0) & \dots & \partial_m f^n(x_0) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Определение 3. Точка x_0 называется *критической точкой отображения* $f\colon U(x_0) \to \mathbb{R}^n$, если ранг матрицы Якоби (13) отображения в этой точке меньше, чем $\min\{m, n\}$, т. е. меньше, чем максимально возможный.

В частности, при $n = 1$ точка x_0 критическая, если выполнены условия (12), т. е. все частные производные функции $f\colon U(x_0) \to \mathbb{R}$ обращаются в нуль.

Критические точки вещественнозначных функций называют также *стационарными* точками таких функций.

После того как в результате решения системы уравнений (12) найдены критические точки функции, их дальнейший анализ в отношении того, являются они точками экстремума или нет, часто удается провести, используя формулу Тейлора и доставляемые ею следующие достаточные условия наличия или отсутствия экстремума.

Теорема 6. *Пусть $f\colon U(x_0) \to \mathbb{R}$ — функция класса $C^{(2)}(U(x_0); \mathbb{R})$, определенная в окрестности $U(x_0) \subset \mathbb{R}^m$ точки $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m) \in \mathbb{R}^m$, и пусть x_0 — критическая точка этой функции f.*

Если в тейлоровском разложении

$$f\left(x_0^1 + h^1, \dots, x_0^m + h^m\right) = \\ = f\left(x_0^1, \dots, x_0^m\right) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) h^i h^j + o\left(\|h\|^2\right) \tag{14}$$

функции в точке x_0 квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) h^i h^j \equiv \partial_{ij} f(x_0) h^i h^j \tag{15}$$

а) *знакоопределена, то в точке x_0 функция имеет локальный экстремум, который является строгим локальным минимумом, если квадратичная форма* (15) *положительно определена, и строгим локальным максимумом, если она отрицательно определена*;

b) *может принимать значения разных знаков, то в точке* x_0 *функция экстремума не имеет.*

◀ Пусть $h \neq 0$ и $x_0 + h \in U(x_0)$. Представим соотношение (14) в виде

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{1}{2!}\|h\|^2 \left[\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)\frac{h^i}{\|h\|}\frac{h^j}{\|h\|} + o(1)\right], \qquad (16)$$

где $o(1)$ есть величина, бесконечно малая при $h \to 0$.

Из (16) видно, что знак разности $f(x_0+h) - f(x_0)$ полностью определяется знаком величины, стоящей в квадратных скобках. Этой величиной мы теперь и займемся.

Вектор $e = \big(h^1/\|h\|, \dots, h^m/\|h\|\big)$, очевидно, имеет единичную норму. Квадратичная форма (15) непрерывна как функция h в $\mathbb{R}^m$, поэтому ее ограничение на единичную сферу $S(0;1) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| = 1\}$ также непрерывно на $S(0;1)$. Но сфера S есть замкнутое ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^m$, т. е. компакт. Следовательно, форма (15) имеет на S как точку минимума, так и точку максимума, в которых она принимает соответственно значения m и M.

Если форма (15) положительно определена, то $0 < m \leqslant M$ и потому найдется число $\delta > 0$ такое, что при $\|h\| < \delta$ будет $|o(1)| < m$. Тогда при $\|h\| < \delta$ квадратная скобка в правой части равенства (16) окажется положительной и, следовательно, $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$ при $0 < \|h\| < \delta$. Таким образом, в этом случае точка x_0 оказывается точкой строгого локального минимума рассматриваемой функции.

Аналогично проверяется, что в случае отрицательной определенности формы (15) функция имеет в x_0 строгий локальный максимум.

Тем самым пункт a) теоремы 6 исчерпан.

Докажем утверждение b).

Пусть e_m и e_M — те точки единичной сферы, в которых форма (15) принимает соответственно значения m, M, и пусть $m < 0 < M$.

Полагая $h = te_m$, где t — достаточно малое положительное число (настолько малое, что $x_0 + te_m \in U(x_0)$), из (16) находим

$$f(x_0 + te_m) - f(x_0) = \frac{1}{2!}t^2(m + o(1)),$$

где $o(1) \to 0$ при $t \to 0$. Начиная с некоторого момента (т. е. при всех достаточно малых значениях t), величина $m + o(1)$ в правой части этого равенства будет иметь знак m, т. е. будет отрицательна. Следовательно, отрицательной будет и левая часть.

Аналогично, полагая $h = te_M$, получим

$$f(x_0 + te_M) - f(x_0) = \frac{1}{2!}t^2(M + o(1)),$$

и, следовательно, при всех достаточно малых t разность $f(x_0 + te_M) - f(x_0)$ положительна.

Таким образом, если квадратичная форма (15) на единичной сфере или, что, очевидно, равносильно, в $\mathbb{R}^m$ принимает значения разных знаков, то в любой окрестности точки x_0 найдутся как точки, в которых значение функции больше $f(x_0)$, так и точки, в которых оно меньше $f(x_0)$. Следовательно, в этом случае x_0 не является точкой локального экстремума рассматриваемой функции. ►

Сделаем теперь несколько замечаний в связи с доказанной теоремой.

Замечание 1. Теорема 6 ничего не говорит о случае, когда форма (15) полуопределена, т. е. неположительна или неотрицательна. Оказывается, в этом случае точка x_0 может быть точкой экстремума, а может и не быть таковой. Это видно, в частности, из следующего примера.

Пример 3. Найдем экстремумы определенной в $\mathbb{R}^2$ функции $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2$.

В соответствии с необходимыми условиями (12) напишем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4x = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 = 0, \end{cases}$$

из которой находим три критические точки: $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$.

Поскольку

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 - 4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \equiv 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2,$$

то квадратичная форма (15) в указанных трех критических точках имеет соответственно вид

$$8(h^1)^2, \qquad -4(h^1)^2, \qquad 8(h^1)^2,$$

т. е. во всех случаях она полуопределена (положительно или отрицательно). Теорема 6 тут не применима, но поскольку $f(x,y) = (x^2-1)^2+y^4-1$, то очевидно, что в точках $(-1,0)$, $(1,0)$ функция $f(x,y)$ имеет строгий минимум -1 (и даже нелокальный), а в точке $(0,0)$ у нее нет экстремума, поскольку при $x = 0$ и $y \neq 0$ $f(0,y) = y^4 > 0$, а при $y = 0$ и достаточно малых $x \neq 0$ $f(x,0) = x^4 - 2x^2 < 0$.

Замечание 2. После того как квадратичная форма (15) получена, исследование ее определенности может быть проведено с помощью известного из курса алгебры критерия Сильвестра[1]. Напомним, что в силу критерия Сильвестра квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij}x^i x^j$ с симметрической матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

положительно определена тогда и только тогда, когда положительны все главные миноры этой матрицы; форма отрицательно определена тогда и только тогда, когда $a_{11} < 0$ и при переходе от любого главного минора матрицы к главному минору следующего порядка знак значения минора меняется.

Пример 4. Найдем экстремумы функции

$$f(x,y) = xy \ln\left(x^2+y^2\right),$$

определенной в плоскости $\mathbb{R}^2$ всюду, кроме начала координат.

Решая систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\ln\left(x^2+y^2\right) + \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\ln\left(x^2+y^2\right) + \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2} = 0, \end{cases}$$

находим все критические точки функции

$$(0,\pm1); \quad (\pm1,0); \quad \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\right); \quad \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2e}}\right).$$

[1] Дж. Дж. Сильвестр (1814 – 1897) — английский математик; наиболее известные его работы относятся к алгебре.

Поскольку функция нечетна относительно каждого из двух своих аргументов в отдельности, то точки $(0, \pm 1)$ и $(\pm 1, 0)$, очевидно, не являются точками экстремума нашей функции.

Видно также, что данная функция не меняет своего значения при одновременном изменении знака обеих переменных x и y. Таким образом, если мы исследуем только одну из оставшихся критических точек, например точку $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, то мы сможем сделать заключение и о характере остальных.

Поскольку

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{6xy}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right) + 2 - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{6xy}{x^2+y^2} - \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$

то в точке $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ квадратичная форма $\partial_{ij} f(x_0) h^i h^j$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

т. е. она положительно определена, и, следовательно, в этой точке функция имеет локальный минимум

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = -\frac{1}{2e}.$$

В силу сделанных выше наблюдений относительно особенностей рассматриваемой функции можно сразу же заключить, что

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = -\frac{1}{2e}$$

— также локальный минимум, а

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = \frac{1}{2e}$$

— локальные максимумы функции. Впрочем, это можно проверить и непосредственно, убедившись в определенности соответствующей квадратичной формы. Например, в точке $\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ матрица квадратичной формы (15) имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

откуда видно, что форма отрицательно определена.

Замечание 3. Следует обратить внимание на то, что мы указали необходимые (теорема 5) и достаточные (теорема 6) условия экстремума функции лишь во внутренней точке области определения. Таким образом, при отыскании абсолютного максимума или минимума функции необходимо наряду с внутренними критическими точками функции исследовать также точки границы области определения, поскольку максимальное или минимальное значение функция может принять в одной из таких граничных точек.

Подробнее общие принципы исследования невнутренних экстремумов будут разбираться позже (см. раздел, посвященный условному экстремуму). Полезно иметь в виду, что при отыскании минимумов и максимумов часто наряду с формальной техникой, а иногда и вместо нее, можно использовать некоторые простые соображения, связанные с природой задачи. Например, если рассматриваемая в $\mathbb{R}^m$ дифференцируемая функция по смыслу задачи должна иметь минимум и вместе с тем она не ограничена сверху, то, при условии, что функция имеет единственную критическую точку, можно без дальнейшего исследования утверждать, что в этой точке она и принимает свое минимальное значение.

Пример 5. *Задача Гюйгенса.* На основе законов сохранения энергии и импульса замкнутой механической системы несложным расчетом можно показать, что при соударении двух абсолютно упругих шаров, имеющих массы m_1 и m_2 и начальные скорости v_1 и v_2, их скорости после центрального удара (когда скорости направлены по линии центров) определяются соотношениями

$$\widetilde{v}_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2},$$
$$\widetilde{v}_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

В частности, если шар массы M, движущийся со скоростью V, ударяется о неподвижный шар массы m, то приобретаемая последним скорость v может быть найдена по формуле

$$v = \frac{2M}{m+M}V, \tag{17}$$

из которой видно, что если $0 \leqslant m \leqslant M$, то $V \leqslant v \leqslant 2V$.

Каким же образом телу малой массы можно передать значительную часть кинетической энергии большой массы? Для этого, например, между шарами малой и большой масс можно вставить шары с промежуточными массами $m < m_1 < m_2 < \ldots < m_n < M$. Вычислим (вслед за Гюйгенсом), как надо выбрать массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$, чтобы в результате последовательных центральных соударений тело m приобрело наибольшую скорость.

В соответствии с формулой (17) получаем следующее выражение для искомой скорости как функции от переменных $m_1, m_2, \ldots, m_n$:

$$v = \frac{m_1}{m+m_1} \cdot \frac{m_2}{m_1+m_2} \cdot \ldots \cdot \frac{m_n}{m_{n-1}+m_n} \cdot \frac{M}{m_n+M} \cdot 2^{n+1}V. \tag{18}$$

Таким образом, задача Гюйгенса сводится к отысканию максимума функции

$$f(m_1, \ldots, m_n) = \frac{m_1}{m+m_1} \cdot \ldots \cdot \frac{m_n}{m_{n-1}+m_n} \cdot \frac{M}{m_n+M}.$$

Система уравнений (12), представляющих необходимые условия внутреннего экстремума, в данном случае сводится к системе

$$\begin{cases} \quad m \cdot m_2 - m_1^2 = 0, \\ \quad m_1 \cdot m_3 - m_2^2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_{n-1} \cdot M - m_n^2 = 0, \end{cases}$$

из которой следует, что числа $m, m_1, \ldots, m_n, M$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q, равным $\sqrt[n+1]{M/m}$.

Получаемое при таком наборе масс значение скорости (18) определяется равенством

$$v = \left(\frac{2q}{1+q}\right)^{n+1} V, \tag{19}$$

которое при $n = 0$ совпадает с равенством (17).

Из физических соображений ясно, что формула (19) указывает максимальное значение функции (18), однако это можно проверить и формально (не привлекая громоздких вторых производных; см. задачу 9 в конце параграфа).

Заметим, что из формулы (19) видно, что если $m \to 0$, то $v \to \to 2^{n+1}V$. Таким образом, промежуточные массы действительно заметно увеличивают передаваемую малой массе m часть кинетической энергии массы M.

6. Некоторые геометрические образы, связанные с функциями многих переменных

а. График функции и криволинейные координаты. Пусть x, y, z — декартовы координаты точки пространства $\mathbb{R}^3$, и пусть $z = f(x, y)$ — непрерывная функция, определенная в некоторой области G плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных (x, y).

В силу общего определения графика функции, график функции $f\colon G \to \mathbb{R}$ в нашем случае есть множество $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in G, z = f(x, y)\}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Очевидно, что отображение $G \xrightarrow{F} S$, определяемое соотношением $(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$, есть непрерывное взаимно однозначное отображение G на S, в силу которого любую точку множества S можно задать, указывая соответствующую ей точку области G или, что то же самое, задавая координаты (x, y) этой точки G.

Таким образом, пары чисел $(x, y) \in G$ можно рассматривать как некоторые координаты точек множества S — графика функции $z = f(x, y)$. Поскольку точки S задаются парами чисел, то S будем условно называть *двумерной поверхностью* в $\mathbb{R}^3$ (общее определение поверхности будет дано позже).

Если задать путь $\Gamma\colon I \to G$ в G, то автоматически возникает путь $F \circ \Gamma : I \to S$ на поверхности S. Если $x = x(t),\ y = y(t)$ — параметрическое задание пути Γ, то путь $F \circ \Gamma$ на S задается тремя функциями: $x = x(t),\ y = y(t),\ z = f(x(t), y(t))$. В частности, если положить $x = x_0 + t,\ y = y_0$, то мы получим кривую $x = x_0 + t,\ y = y_0,\ z = = f(x_0 + t, y_0)$ на поверхности S, вдоль которой координата $y = y_0$ точек S не меняется. Аналогично можно указать кривую $x = x_0,\ y = y_0 + t$, $z = f(x_0, y_0 + t)$ на S, вдоль которой не меняется первая координата x_0 точек S. Эти линии на S по аналогии с плоским случаем естественно называть координатными линиями на поверхности S. Однако, в отличие от координатных линий в $G \subset \mathbb{R}^2$, являющихся кусками прямых, координатные линии на S, вообще говоря, являются кривыми в $\mathbb{R}^3$. По этой причине введенные координаты (x, y) точек поверхности S часто называют *криволинейными координатами* на S.

Итак, график непрерывной функции $z = f(x, y)$, определенной в области $G \subset \mathbb{R}^2$, есть двумерная поверхность S в $\mathbb{R}^3$, точки которой можно задавать криволинейными координатами $(x, y) \in G$.

Мы пока не останавливаемся на общем определении поверхности, поскольку сейчас нас интересует только частный случай поверхности — график функции, однако мы предполагаем, что из курса аналитической геометрии читателю хорошо знакомы некоторые важные конкретные поверхности в $\mathbb{R}^3$ (плоскость, эллипсоид, параболоиды, гиперболоиды).

b. Касательная плоскость к графику функции. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x_0, y_0) \in G$, то это означает, что

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + \\ + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right) \quad \text{при} \quad (x, y) \to (x_0, y_0), \quad (20)$$

где A и B — некоторые постоянные.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ плоскость

$$z = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0), \qquad (21)$$

где $z_0 = f(x_0, y_0)$. Сравнивая равенства (20) и (21), видим, что график нашей функции в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) хорошо аппроксимируется плоскостью (21). Точнее, точка $(x, y, f(x, y))$ графика функции уклоняется от точки $(x, y, z(x, y))$ плоскости (21) на величину, бесконечно малую в сравнении с величиной $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ смещения ее криволинейных координат (x, y) от координат (x_0, y_0) точки (x_0, y_0, z_0).

В силу единственности дифференциала функции, плоскость (21), обладающая указанным свойством, единственна и имеет вид

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \qquad (22)$$

Она называется *касательной плоскостью к графику функции* $z = f(x, y)$ *в точке* $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

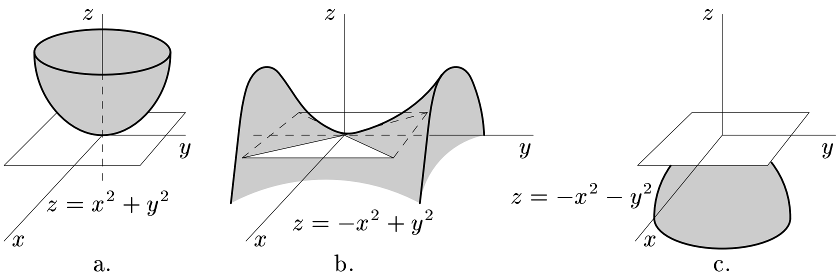


Рис. 53.

Итак, дифференцируемость функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) и наличие у графика этой функции касательной плоскости в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ суть равносильные условия.

c. Нормальный вектор. Записывая уравнение (22) касательной плоскости в каноническом виде

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0,$$

заключаем, что вектор

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right) \tag{23}$$

является *нормальным вектором касательной плоскости.* Его направление считается направлением, нормальным или ортогональным к поверхности S (графику функции) в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

В частности, если (x_0, y_0) — критическая точка функции $f(x, y)$, то в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ графика нормальный вектор имеет вид $(0, 0, -1)$ и, следовательно, касательная плоскость к графику функции в такой точке горизонтальна (параллельна плоскости (x, y)).

Следующие три рисунка иллюстрируют сказанное.

На рис. 53, a, c изображено расположение графика функции по отношению к касательной плоскости в окрестности точки локального экстремума (соответственно, минимума и максимума), а на рис. 53, b — в окрестности так называемой седловой критической точки.

d. Касательная плоскость и касательный вектор. Мы знаем, что если путь $\Gamma \colon I \to \mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$ задается дифференцируемыми функциями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то вектор $(\dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0))$ есть вектор скорости в момент $t = 0$. Это направляющий вектор касательной в точке $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$, $z_0 = z(0)$ к кривой в $\mathbb{R}^3$, являющейся носителем пути Γ.

Рассмотрим теперь путь $\Gamma\colon I \to S$ на графике функции $z = f(x, y)$, задаваемый в виде $x = x(t),\ y = y(t),\ z = f(x(t), y(t))$. В этом конкретном случае находим, что

$$(\dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)) = \Big(\dot{x}(0), \dot{y}(0), \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\dot{x}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\dot{y}(0)\Big),$$

откуда видно, что найденный вектор ортогонален вектору (23), нормальному к графику S функции в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Таким образом, мы показали, что если вектор (ξ, η, ζ) касателен в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ к некоторой кривой на поверхности S, то он ортогонален вектору (23) и (в этом смысле) лежит в плоскости (22), касательной к поверхности S в указанной точке. Точнее можно было бы сказать, что вся прямая $x = x_0 + \xi t,\ y = y_0 + \eta t,\ z = f(x_0, y_0) + \zeta t$ лежит в касательной плоскости (22).

Покажем теперь, что верно и обратное утверждение, т. е. если прямая $x = x_0 + \xi t,\ y = y_0 + \eta t,\ z = f(x_0, y_0) + \zeta t$ или, что то же самое, вектор (ξ, η, ζ) лежит в плоскости (22), касательной к графику S функции $z = f(x, y)$ в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, то на S есть путь, для которого вектор (ξ, η, ζ) является вектором скорости в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

В качестве такового можно взять, например, путь

$$x = x_0 + \xi t, \quad y = y_0 + \eta t, \quad z = f(x_0 + \xi t, y_0 + \eta t).$$

В самом деле, для него

$$\dot{x}(0) = \xi, \quad \dot{y}(0) = \eta, \quad \dot{z}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\eta.$$

Ввиду того, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\dot{x}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\dot{y}(0) - \dot{z}(0) = 0$$

и по условию также

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\eta - \zeta = 0,$$

заключаем, что

$$(\dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)) = (\xi, \eta, \zeta).$$

Итак, касательная плоскость к поверхности S в точке (x_0, y_0, z_0) образована векторами, касательными в точке (x_0, y_0, z_0) к кривым, проходящим на поверхности S через указанную точку (рис. 54).

Это уже более геометричное описание касательной плоскости. Во всяком случае, из него видно, что если инвариантно (относительно выбора системы координат) определена касательная к кривой, то касательная плоскость также определена инвариантно.

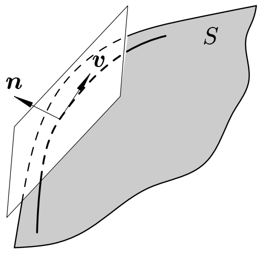


Рис. 54.

Для наглядности мы рассматривали функции двух переменных, однако все сказанное, очевидно, переносится и на общий случай функции

$$y = f(x^1, \dots, x^m) \tag{24}$$

m переменных, где $m \in \mathbb{N}$.

Плоскость, касательная к графику такой функции в точке $(x_0^1, \dots, x_0^m, f(x_0^1, \dots, x_0^m))$, запишется в виде

$$y = f(x_0^1, \dots, x_0^m) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \dots, x_0^m)(x^i - x_0^i); \tag{25}$$

вектор

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0), -1\right)$$

есть нормальный вектор плоскости (25). Сама эта плоскость, как и график функции (24), имеет размерность m, т. е. любая точка задается теперь набором $(x^1, \dots, x^m)$ из m координат.

Таким образом, уравнение (25) задает гиперплоскость в $\mathbb{R}^{m+1}$.

Дословно повторяя проведенные выше рассуждения, можно проверить, что касательная плоскость (25) состоит из векторов, касательных в точке $(x_0^1, \dots, x_0^m, f(x_0^1, \dots, x_0^m))$ к кривым, проходящим через эту точку и лежащим на m-мерной поверхности S — графике функции (24).

Задачи и упражнения

1. Пусть $z = f(x, y)$ — функция класса $C^{(1)}(G; \mathbb{R})$.

a) Если $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \equiv 0$ в G, то можно ли утверждать, что функция f не зависит от y в области G?

b) При каком условии на область G ответ на предыдущий вопрос положителен?

2. a) Проверьте, что для функции

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если } x^2+y^2=0,\end{cases}$$

имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1\neq -1=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0).$$

b) Докажите, что если функция $f(x,y)$ имеет частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ в некоторой окрестности U точки (x_0,y_0) и если смешанная производная $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ (или $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$) существует в U и непрерывна в (x_0,y_0), то смешанная производная $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ (соответственно, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$) также существует в этой точке и имеет место равенство

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0).$$

3. Пусть $x^1,\dots,x^m$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^m$. Дифференциальный оператор

$$\Delta=\sum_{i=1}^m\frac{\partial^2}{\partial {x^i}^2},$$

действующий на функции $f\in C^{(2)}(G;\mathbb{R})$ по правилу

$$\Delta f=\sum_{i=1}^m\frac{\partial^2 f}{\partial {x^i}^2}(x^1,\dots,x^m),$$

называется *оператором Лапласа.*

Уравнение $\Delta f=0$ относительно функции f в области $G\subset\mathbb{R}^m$ называется *уравнением Лапласа*, а его решения — *гармоническими функциями в области G*.

a) Покажите, что если $x=(x^1,\dots,x^m)$ и

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^m (x^i)^2},$$

то при $m>2$ функция

$$f(x)=\|x\|^{-\frac{2-m}{2}}$$

является гармонической в области $\mathbb{R}^m\setminus 0$, где $0=(0,\dots,0)$.

b) Проверьте, что функция

$$f(x^1, \dots, x^m, t) = \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^m} \cdot \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4a^2 t}\right),$$

определенная при $t > 0$ и $x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяет *уравнению теплопроводности*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a^2 \Delta f,$$

т. е. что $\dfrac{\partial f}{\partial t} = a^2 \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^{i2}}$ в любой точке области определения функции.

4. *Формула Тейлора в мультииндексных обозначениях.*

Символ $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, состоящий из неотрицательных целых чисел α_i, $i = 1, \dots, m$, называется *мультииндексом* α.

Условились в следующих обозначениях:

$$|\alpha| := |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_m|,$$

$$\alpha! := \alpha_1! \ldots \alpha_m!;$$

наконец, если $a = (a_1, \dots, a_m)$, то

$$a^\alpha := a_1^{\alpha_1} \ldots a_m^{\alpha_m}.$$

a) Проверьте, что если $k \in \mathbb{N}$, то

$$(a_1 + \ldots + a_m)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \ldots \alpha_m!} a_1^{\alpha_1} \ldots a_m^{\alpha_m},$$

или

$$(a_1 + \ldots + a_m)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} a^\alpha,$$

где суммирование ведется по всем наборам $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ неотрицательных целых чисел, таким, что $\sum\limits_{i=1}^{m} |\alpha_i| = k$.

b) Пусть

$$D^\alpha f(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{(\partial x^1)^{\alpha_1} \ldots (\partial x^m)^{\alpha_m}}(x).$$

Покажите, что если $f \in C^{(k)}(G; \mathbb{R})$, то в любой точке $x \in G$ имеет место равенство

$$\sum_{i_1 + \ldots + i_m = k} \partial_{i_1 \ldots i_k} f(x) h^{i_1} \ldots h^{i_k} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(x) h^\alpha,$$

где $h = (h^1, \dots, h^m)$.

c) Проверьте, что в мультииндексных обозначениях формулу Тейлора, например, с остаточным членом в форме Лагранжа можно записать в виде

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha|=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x) h^\alpha + \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x+\theta h) h^\alpha.$$

d) Запишите в мультииндексных обозначениях формулу Тейлора с интегральным остаточным членом (теорема 4).

5. a) Пусть $I^m = \{x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m \mid |x^i| \leqslant c^i,\ \ i = 1, \dots, m\}$ — m-мерный промежуток, а I — отрезок $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Покажите, что если функция $f(x,y) = f(x^1, \dots, x^m, y)$ определена и непрерывна на множестве $I^m \times I$, то для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что если $x \in I^m$, $y_1, y_2 \in I$ и $|y_1 - y_2| < \delta$, то $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon$.

b) Покажите, что функция

$$F(x) = \int_a^b f(x,y)\,dy$$

определена и непрерывна на промежутке I^m.

c) Покажите, что если $f \in C(I^m; \mathbb{R})$, то функция

$$\mathcal{F}(x,t) = f(tx)$$

определена и непрерывна на $I^m \times I^1$, где $I^1 = \{t \in \mathbb{R} \mid |t| \leqslant 1\}$.

d) Докажите следующую *лемму Адамара*.

Если $f \in C^{(1)}(I^m; \mathbb{R})$ и $f(0) = 0$, то существуют функции $g_1, \dots, g_m \in C(I^m; \mathbb{R})$ такие, что

$$f(x^1, \dots, x^m) = \sum_{i=1}^m x^i g_i(x^1, \dots, x^m)$$

в I^m, причем

$$g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0), \qquad i = 1, \dots, m.$$

6. Докажите следующее *обобщение теоремы Ролля для функций многих переменных.*

Если функция f непрерывна в замкнутом шаре $\overline{B}(0;r)$, равна нулю на его границе и дифференцируема во внутренних точках шара $B(0;r)$, то по крайней мере одна из внутренних точек этого шара является критической точкой функции.

7. Проверьте, что функция

$$f(x,y) = \left(y - x^2\right)\left(y - 3x^2\right)$$

не имеет экстремума в начале координат, хотя ее ограничение на любую прямую, проходящую через начало координат, имеет строгий локальный минимум в этой точке.

8. *Метод наименьших квадратов.*

Это один из наиболее распространенных методов обработки результатов наблюдений. Он состоит в следующем. Пусть известно, что физические величины x и y связаны линейным соотношением

$$y = ax + b, \tag{26}$$

или пусть на основе экспериментальных данных строится эмпирическая формула указанного вида.

Допустим, было сделано n наблюдений, в каждом из которых одновременно измерялись значения x и y, и в результате были получены пары значений $x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n$. Поскольку измерения имеют погрешности, то, даже если между величинами x и y имеется точная связь (26), равенства

$$y_k = ax_k + b$$

могут не выполняться для некоторых значений $k \in \{1, \ldots, n\}$, каковы бы ни были коэффициенты a и b.

Задача состоит в том, чтобы по указанным результатам наблюдений определить разумным образом неизвестные коэффициенты a и b.

Гаусс, исходя из анализа распределения вероятности величины ошибки наблюдения, установил, что наиболее вероятные значения коэффициентов a и b при данной совокупности результатов наблюдений следует искать, исходя из следующего *принципа наименьших квадратов*:

если $\delta_k = (ax_k + b) - y_k$ — невязка k-го наблюдения, то a и b надо выбирать так, чтобы величина

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \delta_k^2,$$

т. е. сумма квадратов невязок, была минимальной.

a) Покажите, что принцип наименьших квадратов в случае соотношения (26) приводит к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} [x_k, x_k]a + & [x_k, 1]b = & [x_k, y_k], \\ \ \ [1, x_k]a + & \ \ [1, 1]b = & \ \ [1, y_k] \end{cases}$$

для определения коэффициентов a и b; здесь, следуя Гауссу, положено $[x_k, x_k] := x_1x_1 + \ldots + x_nx_n$; $[x_k, 1] := x_1 \cdot 1 + \ldots + x_n \cdot 1$; $[x_k, y_k] := x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ и т. д.

b) Напишите систему уравнений для чисел $a_1, \ldots, a_m, b$, к которой приводит принцип наименьших квадратов в том случае, когда вместо равенства (26) имеется соотношение

$$y = \sum_{i=1}^{m} a_i x^i + b$$

(или, короче, $y = a_i x^i + b$) между величинами $x^1, \ldots, x^m, y$.

c) Как, используя метод наименьших квадратов, искать эмпирические формулы вида
$$y = cx_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n},$$
связывающие физические величины $x_1, \dots, x_m$ с величиной y?

d) (М. Джермен.) У нескольких десятков особей кольчатого червя Neries di versicolor была измерена частота R сокращений сердца при различных температурах T. Частота выражалась в процентах относительно частоты сокращений при 15 °C. Полученные данные приведены в следующей таблице:

Температура, °C	Частота, %	Температура, °C	Частота, %
0	39	20	136
5	54	25	182
10	74	30	254
15	100		

Зависимость R от T похожа на экспоненциальную. Считая $R = Ae^{bT}$, найдите значения констант A и b, которые бы наилучшим образом соответствовали результатам эксперимента.

9. a) Покажите, что в рассмотренной в примере 5 задаче Гюйгенса функция (18) стремится к нулю, если хотя бы одна из переменных $m_1, \dots, m_n$ стремится к бесконечности.

b) Покажите, что функция (18) имеет в $\mathbb{R}^n$ точку максимума и потому единственная критическая точка этой функции в $\mathbb{R}^n$ должна быть ее точкой максимума.

c) Покажите, что величина v, определяемая формулой (19), монотонно возрастает с ростом n, и найдите ее предел при $n \to \infty$.

10. a) Во время так называемого круглого наружного шлифования инструмент — быстро вращающийся шлифовальный круг (с шероховатой периферией), играющий роль напильника, — приводится в соприкосновение с медленно (в сравнении с ним) поворачивающейся поверхностью круглой детали (рис. 55).

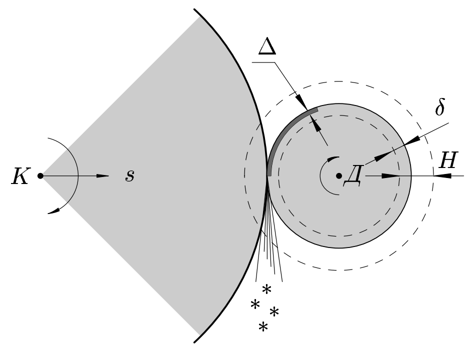


Рис. 55.

Круг K постепенно подается на деталь $Д$ и в результате происходит съем заданного слоя H металла, доведение детали до нужного размера и образование гладкой рабочей поверхности изделия. Эта поверхность в будущем механизме обычно является трущейся, и, чтобы увеличить срок ее службы, металл детали проходит предварительную закалку, повышающую твердость стали. Однако из-за высокой температуры в зоне контакта шлифовального круга с деталью могут произойти (и часто происходят) структурные изменения в некотором слое Δ металла и падение в этом слое твердости стали. Величина Δ монотонно зависит от скорости s подачи круга на деталь, т. е. $\Delta = \varphi(s)$. Известно, что существует некоторая критическая скорость $s_0 > 0$, при которой еще $\Delta = 0$, а при $s > s_0$ уже $\Delta > 0$. Для дальнейшего удобно ввести в рассмотрение обратную к указанной зависимость

$$s = \psi(\Delta),$$

определенную при $\Delta > 0$.

Здесь ψ — известная из эксперимента монотонно возрастающая функция, определенная при $\Delta \geqslant 0$, причем $\psi(0) = s_0 > 0$.

Режим шлифования должен быть таким, чтобы на окончательно получаемой поверхности изделия не было структурных изменений металла.

Оптимальным по быстродействию при указанных условиях, очевидно, будет такой режим изменения скорости s подачи шлифовального круга, когда

$$s = \psi(\delta),$$

где $\delta = \delta(t)$ — величина еще не снятого к моменту t слоя металла или, что то же самое, расстояние от периферии круга в момент t до окончательной поверхности будущего изделия. Объясните это.

b) Найдите время, необходимое для снятия слоя H в оптимальном режиме изменения скорости s подачи круга.

c) Найдите зависимость $s = s(t)$ скорости подачи круга от времени в оптимальном режиме при условии, что функция $\Delta \overset{\psi}{\longmapsto} s$ линейна: $s = s_0 + \lambda\Delta$.

В силу конструктивных особенностей некоторых видов шлифовальных станков изменение скорости s может происходить только дискретно. Тут и возникает задача оптимизации производительности процесса при дополнительном условии, что допускается только фиксированное число n переключений скорости s. Ответы на следующие вопросы дают представление о характере оптимального режима.

d) Какова геометрическая интерпретация найденного вами в b) времени $t(H) = \int\limits_0^H \frac{d\delta}{\psi(\delta)}$ шлифования в оптимальном непрерывном режиме изменения скорости s?

e) Какова геометрическая интерпретация потери во времени при переходе от оптимального непрерывного режима изменения s к оптимальному по быстродействию ступенчатому режиму изменения s?

f) Покажите, что точки $0 = s_{n+1} < x_n < \ldots < x_1 < x_0 = H$ промежутка $[0, H]$, в которых следует производить переключение скорости, должны удовлетворять условиям

$$\frac{1}{\psi(x_{i+1})} - \frac{1}{\psi(x_i)} = -\left(\frac{1}{\psi}\right)'(x_i)(x_i - x_{i-1}) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

и, следовательно, на участке от x_i до x_{i+1} скорость подачи круга имеет вид $s = \psi(x_{i+1})$ $(i = 0, \ldots, n)$.

g) Покажите, что в линейном случае, когда $\psi(\Delta) = s_0 + \lambda\Delta$, точки x_i (из задачи f)) на промежутке $[0, H]$ располагаются так, что числа

$$\frac{s_0}{\lambda} < \frac{s_0}{\lambda} + x_n < \ldots < \frac{s_0}{\lambda} + x_1 < \frac{s_0}{\lambda} + H$$

образуют геометрическую прогрессию.

11. a) Проверьте, что касательная к кривой $\Gamma\colon I \to \mathbb{R}^m$ определена инвариантно относительно выбора системы координат в $\mathbb{R}^m$.

b) Проверьте, что касательная плоскость к графику S функции $y = f(x^1, \ldots, x^m)$ определена инвариантно относительно выбора системы координат в $\mathbb{R}^m$.

c) Пусть множество $S \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1$ является графиком функции $y = f(x^1, \ldots, x^m)$ в координатах $(x^1, \ldots, x^m, y)$ в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1$ и графиком функции $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^m)$ в координатах $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^m, \tilde{y})$ в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1$. Проверьте, что касательная к S плоскость инвариантна относительно линейного преобразования координат в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1$.

d) Проверьте, что оператор Лапласа $\Delta f = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i2}}(x)$ определен инвариантно относительно ортогональных преобразований координат в $\mathbb{R}^m$.

§ 5. Теорема о неявной функции

1. Постановка вопроса и наводящие соображения. В этом параграфе будет доказана важная как сама по себе, так и благодаря ее многочисленным следствиям теорема о неявной функции.

Поясним сначала, в чем состоит вопрос. Пусть, например, мы имеем соотношение

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

между координатами x, y точек плоскости $\mathbb{R}^2$. Совокупность точек плоскости $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющих этому соотношению, есть единичная окружность (рис. 56).

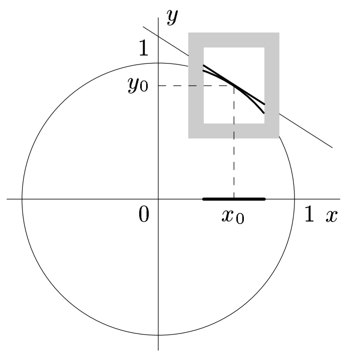


Рис. 56.

Наличие связи (1) показывает, что, фиксировав одну из координат, например x, мы не вправе брать вторую координату произвольно. Таким образом, соотношение (1) предопределяет зависимость y от x. Нас интересует вопрос об условиях, при которых неявная связь (1) может быть разрешена в виде явной функциональной зависимости $y = y(x)$.

Решая уравнение (1) относительно y, найдем, что

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}, \tag{2}$$

т. е. каждому значению x такому, что $|x| < 1$, на самом деле отвечают два допустимых значения y. При формировании функциональной зависимости $y = y(x)$, удовлетворяющей соотношению (1), нельзя без привлечения дополнительных требований отдать предпочтение какому-нибудь одному из значений (2). Например, функция $y(x)$, которая в рациональных точках отрезка $[-1, 1]$ принимает значение $+\sqrt{1 - x^2}$, а в иррациональных — значение $-\sqrt{1 - x^2}$, очевидно, удовлетворяет соотношению (1).

Ясно, что вариацией этого примера можно предъявить бесконечно много функциональных зависимостей, удовлетворяющих соотношению (1).

Вопрос о том, является ли множество, задаваемое в $\mathbb{R}^2$ соотношением (1), графиком некоторой функциональной зависимости $y = y(x)$, очевидно, решается отрицательно, ибо с геометрической точки зрения он равносилен вопросу о возможности взаимно однозначного прямого проектирования окружности на некоторую прямую.

Но наблюдение (см. рис. 56) подсказывает, что все-таки в окрестности отдельной точки (x_0, y_0) дуга окружности взаимно однозначно проектируется на ось x и ее единственным образом можно представить в виде $y = y(x)$, где $x \mapsto y(x)$ — непрерывная функция, определенная в окрестности точки x_0 и принимающая в x_0 значение y_0. В этом отношении плохими являются только точки $(-1, 0)$, $(1, 0)$, ибо никакая содержащая их внутри себя дуга окружности не проектируется взаимно однозначно на ось x. Зато окрестности этих точек на окружности хорошо расположены относительно оси y и могут быть представлены в виде графика функции $x = x(y)$, непрерывной в окрестности точки 0 и принимающей в этой точке значение -1 или 1 в соответствии с тем, идет ли речь о дуге, содержащей точку $(-1, 0)$ или $(1, 0)$.

Как же аналитически узнавать, когда наше геометрическое место точек, определяемое соотношением типа (1), в окрестности некоторой точки (x_0, y_0), принадлежащей ему, может быть представлено в виде явной зависимости $y = y(x)$ или $x = x(y)$?

Будем рассуждать следующим, уже привычным способом. У нас есть функция $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Локальное поведение функции в окрестности точки (x_0, y_0) хорошо описывается ее дифференциалом

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

поскольку

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ + o\left(|x - x_0| + |y - y_0|\right)$$

при $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

Если $F(x_0, y_0) = 0$ и нас интересует поведение линии уровня

$$F(x, y) = 0$$

нашей функции в окрестности точки (x_0, y_0), то о нем можно судить по расположению прямой (касательной)

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \tag{3}$$

Если эта прямая расположена так, что ее уравнение можно разрешить относительно y, то, коль скоро в окрестности точки (x_0, y_0) линия $F(x, y) = 0$ мало уклоняется от этой прямой, можно надеяться, что ее в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) тоже можно будет записать в виде $y = y(x)$.

То же самое, конечно, можно сказать о локальной разрешимости уравнения $F(x, y) = 0$ относительно x.

Записав уравнение (3) для рассматриваемого конкретного соотношения (1), получим следующее уравнение касательной:

$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0.$$

Это уравнение разрешимо относительно y всегда, когда $y_0 \neq 0$, т. е. во всех точках (x_0, y_0) окружности (1), кроме точек $(-1, 0)$ и $(1, 0)$. Оно разрешимо относительно x во всех точках окружности, кроме точек $(0, -1)$ и $(0, 1)$.

2. Простейший вариант теоремы о неявной функции. В этом параграфе теорема о неявной функции будет получена очень наглядным, но не очень эффективным методом, приспособленным только к случаю вещественнозначных функций вещественных переменных. С другим, во многих отношениях более предпочтительным способом получения этой теоремы, как и с более детальным анализом ее структуры, читатель сможет познакомится в главе X (часть II), а также в задаче 4, помещенной в конце параграфа.

Следующее утверждение является простейшим вариантом теоремы о неявной функции.

Утверждение 1. *Если функция* $F\colon U(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$*, определенная в окрестности* $U(x_0, y_0)$ *точки* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$*, такова, что*

1° $F \in C^{(p)}(U; \mathbb{R})$*, где* $p \geqslant 1$*,*

2° $F(x_0, y_0) = 0$*,*

3° $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$*,*

то существуют двумерный промежуток $I = I_x \times I_y$*, где*

$$I_x = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \alpha\}, \qquad I_y = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - y_0| < \beta\},$$

являющийся содержащейся в $U(x_0, y_0)$ *окрестностью точки* (x_0, y_0)*, и такая функция* $f \in C^{(p)}(I_x; I_y)$*, что для любой точки* $(x, y) \in I_x \times I_y$

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x), \tag{4}$$

причем производная функции $y = f(x)$ *в точках* $x \in I_x$ *может быть вычислена по формуле*

$$f'(x) = -\left[F'_y(x, f(x))\right]^{-1}\left[F'_x(x, f(x))\right]. \tag{5}$$

Прежде чем приступить к доказательству, дадим несколько возможных переформулировок заключительного соотношения (4), которые должны заодно прояснить смысл самого этого соотношения.

Утверждение 1 говорит о том, что при условиях 1°, 2°, 3° порция множества, определяемого соотношением $F(x, y) = 0$, попавшая в окрестность $I = I_x \times I_y$ точки (x_0, y_0), является графиком некоторой функции $f\colon I_x \to I_y$ класса $C^{(p)}(I_x; I_y)$.

Иначе можно сказать, что в пределах окрестности I точки (x_0, y_0) уравнение $F(x, y) = 0$ однозначно разрешимо относительно y, а функция $y = f(x)$ является этим решением, т. е. $F(x, f(x)) \equiv 0$ на I_x.

Отсюда в свою очередь следует, что если $y = \tilde{f}(x)$ — функция, определенная на I_x, про которую известно, что она удовлетворяет соотношению $F(x, \tilde{f}(x)) \equiv 0$ на I_x и что $\tilde{f}(x_0) = y_0$, то при условии непрерывности этой функции в точке $x_0 \in I_x$ можно утверждать, что найдется окрестность $\Delta \subset I_x$ точки x_0 такая, что $\tilde{f}(\Delta) \subset I_y$ и тогда $\tilde{f}(x) \equiv f(x)$ при $x \in \Delta$.

Без предположения непрерывности функции $\tilde{f}$ в точке x_0 и условия $\tilde{f}(x_0) = y_0$ последнее заключение могло бы оказаться неправильным, что видно на уже разобранном выше примере с окружностью.

Теперь докажем утверждение 1.

◀ Пусть для определенности $F'_y(x_0, y_0) > 0$. Поскольку $F \in C^{(1)}(U; \mathbb{R})$, то $F'_y(x, y) > 0$ также в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Чтобы не вводить новых обозначений, без ограничения общности можно считать, что $F'_y(x, y) > 0$ в любой точке исходной окрестности $U(x_0, y_0)$.

Более того, уменьшая, если нужно, окрестность $U(x_0, y_0)$, можно считать ее кругом некоторого радиуса $r = 2\beta > 0$ с центром в точке (x_0, y_0).

Поскольку $F'_y(x, y) > 0$ в U, то функция $F(x_0, y)$ от y определена и монотонно возрастает на отрезке $y_0 - \beta \leqslant y \leqslant y_0 + \beta$, следовательно,

$$F(x_0, y_0 - \beta) < F(x_0, y_0) = 0 < F(x_0, y_0 + \beta).$$

В силу непрерывности функции F в U, найдется положительное число $\alpha < \beta$ такое, что при $|x - x_0| \leqslant \alpha$ будут выполнены соотношения

$$F(x, y_0 - \beta) < 0 < F(x, y_0 + \beta).$$

Покажем теперь, что прямоугольник $I = I_x \times I_y$, где

$$I_x = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \alpha\}, \qquad I_y = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - y_0| < \beta\},$$

является искомым двумерным промежутком, в котором выполняется соотношение (4).

При каждом $x \in I_x$ фиксируем вертикальный отрезок с концами $(x, y_0 - \beta)$, $(x, y_0 + \beta)$. Рассматривая на нем $F(x, y)$ как функцию от y, мы получаем строго возрастающую непрерывную функцию, принимающую значения разных знаков на концах отрезка. Следовательно, при $x \in I_x$ найдется единственная точка $y(x) \in I_y$ такая, что $F(x, y(x)) = 0$. Полагая $y(x) = f(x)$, мы приходим к соотношению (4).

Теперь установим, что $f \in C^{(p)}(I_x; I_y)$.

Покажем сначала, что функция f непрерывна в точке x_0 и что $f(x_0) = y_0$. Последнее равенство, очевидно, вытекает из того, что при $x = x_0$ имеется единственная точка $y(x_0) \in I_y$ такая, что $F(x_0, y(x_0)) = 0$. Вместе с тем по условию $F(x_0, y_0) = 0$, поэтому $f(x_0) = y_0$.

Фиксировав число ε, $0 < \varepsilon < \beta$, мы можем повторить доказательство существования функции $f(x)$ и найти число δ, $0 < \delta < \alpha$, так, что в двумерном промежутке $\tilde{I} = \tilde{I}_x \times \tilde{I}_y$, где

$$\tilde{I}_x = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\}, \qquad \tilde{I}_y = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - y_0| < \varepsilon\},$$

будет выполнено соотношение

$$(F(x, y) = 0 \text{ в } \tilde{I}) \Leftrightarrow (y = \tilde{f}(x),\ x \in \tilde{I}_x) \tag{6}$$

с некоторой вновь найденной функцией $\tilde{f}\colon \tilde{I}_x \to \tilde{I}_y$.

Но $\tilde{I}_x \subset I_x$, $\tilde{I}_y \subset I_y$ и $\tilde{I} \subset I$, поэтому из (4) и (6) следует, что $\tilde{f}(x) \equiv f(x)$ при $x \in \tilde{I}_x \subset I_x$. Тем самым проверено, что $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - y_0| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$.

Мы установили непрерывность функции f в точке x_0. Но любая точка $(x, y) \in I$, в которой $F(x, y) = 0$, также может быть принята в качестве исходной точки построения, ибо в ней выполнены условия 2°, 3°. Выполнив это построение в пределах промежутка I, мы бы в силу (4) вновь пришли к соответствующей части функции f, рассматриваемой в окрестности точки x. Значит, функция f непрерывна в точке x. Таким образом, установлено, что $f \in C(I_x; I_y)$.

Покажем теперь, что $f \in C^{(1)}(I_x; I_y)$, и установим формулу (5).

Пусть число Δx таково, что $x + \Delta x \in I_x$. Пусть $y = f(x)$ и $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Применяя в пределах промежутка I к функции $F(x, y)$ теорему о среднем, находим, что

$$\begin{aligned}
0 &= F(x + \Delta x, f(x + \Delta x)) - F(x, f(x)) = \\
&= F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = \\
&= F'_x(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)\Delta x + F'_y(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)\Delta y \qquad (0 < \theta < 1),
\end{aligned}$$

откуда, учитывая, что $F'_y(x, y) \neq 0$ в I, получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)}{F'_y(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)}. \tag{7}$$

Поскольку $f \in C(I_x; I_y)$, то при $\Delta x \to 0$ также $\Delta y \to 0$ и, учитывая, что $F \in C^{(1)}(U; \mathbb{R})$, из (7) в пределе при $\Delta x \to 0$ получаем

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},$$

где $y = f(x)$. Тем самым формула (5) установлена.

В силу теоремы о непрерывности композиции функций, из формулы (5) вытекает, что $f \in C^{(1)}(I_x; I_y)$.

Если $F \in C^{(2)}(U; \mathbb{R})$, то правая часть формулы (5) допускает дифференцирование по x и мы находим, что

$$f''(x) = -\frac{\bigl[F''_{xx} + F''_{xy} \cdot f'(x)\bigr] F'_y - F'_x \bigl[F''_{xy} + F''_{yy} \cdot f'(x)\bigr]}{\bigl(F'_y\bigr)^2}, \tag{5$'$}$$

где F'_x, F'_y, F''_{xx}, F''_{xy}, F''_{yy} вычисляются в точке $(x, f(x))$.

Таким образом, $f \in C^{(2)}(I_x; I_y)$, если $F \in C^{(2)}(U; \mathbb{R})$. Поскольку порядок производных от f, входящих в правую часть соотношений (5), (5$'$) и т. д., на единицу ниже, чем порядок производной от f, стоящей в левой части равенства, то по индукции получаем, что $f \in C^{(p)}(I_x; I_y)$, если $F \in C^{(p)}(U; \mathbb{R})$. ►

Пример 1. Вернемся к рассмотренному выше соотношению (1), задающему окружность в $\mathbb{R}^2$, и проверим на этом примере утверждение 1.

В данном случае

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

и очевидно, что $F \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. Далее,

$$F'_x(x, y) = 2x, \qquad F'_y(x, y) = 2y,$$

поэтому $F'_y(x, y) \neq 0$, если $y \neq 0$. Таким образом, в силу утверждения 1, для любой точки (x_0, y_0) данной окружности, отличной от точек $(-1, 0)$, $(1, 0)$, найдется такая окрестность, что попадающая в нее дуга окружности может быть записана в виде $y = f(x)$. Непосредственное вычисление подтверждает это, причем $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ или $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

Далее, в силу утверждения 1,

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} = -\frac{x_0}{y_0}. \tag{8}$$

Непосредственное вычисление дает

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{если } f(x) = \sqrt{1-x^2}, \\ \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{если } f(x) = -\sqrt{1-x^2}, \end{cases}$$

что можно записать одним выражением

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y},$$

вычисление по которому приводит к тому же результату

$$f'(x_0) = -\frac{x_0}{y_0},$$

что и вычисление по формуле (8), полученной из утверждения 1.

Важно заметить, что формула (5) или (8) позволяет вычислять $f'(x)$, даже не располагая явным выражением зависимости $y = f(x)$, если нам только известно, что $f(x_0) = y_0$. Задание же условия $y_0 = f(x_0)$ необходимо для выделения той порции линии уровня $F(x, y) = 0$, которую мы намереваемся представить в виде $y = f(x)$.

На примере окружности видно, что задание только координаты x_0 еще не определяет дугу окружности и, только фиксировав y_0, мы выделяем одну из двух возможных в данном случае дуг.

3. Переход к случаю зависимости $\boldsymbol{F(x^1, \ldots, x^m, y) = 0}$. Простым обобщением утверждения 1 на случай зависимости $F(x^1, \ldots, x^m, y) = 0$ является следующее утверждение.

Утверждение 2. *Если функция $F\colon U \to \mathbb{R}$, определенная в окрестности $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$ точки $(x_0, y_0) = (x_0^1, \ldots, x_0^m, y_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$, такова, что*

1° $F \in C^{(p)}(U; \mathbb{R})$, $p \geqslant 1$,

2° $F(x_0, y_0) = F(x_0^1, \ldots, x_0^m, y_0) = 0$,

3° $F'_y(x_0, y_0) = F'_y(x_0^1, \ldots, x_0^m, y_0) \neq 0$,

то существуют $(m+1)$-мерный промежуток $I = I_x^m \times I_y^1$, где

$$I_x^m = \{x = (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m \mid |x^i - x_0^i| < \alpha^i,\ i = 1, \ldots, m\},$$

$$I_y^1 = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - y_0| < \beta\},$$

являющийся лежащей в U окрестностью точки (x_0, y_0), и такая функция $f \in C^{(p)}(I_x^m; I_y^1)$, что для любой точки $(x, y) \in I_x^m \times I_y^1$

$$F(x^1, \ldots, x^m, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x^1, \ldots, x^m), \tag{9}$$

причем частные производные функции $y = f(x^1, \ldots, x^m)$ в точках I_x могут быть вычислены по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = -\left[F_y'(x, f(x))\right]^{-1}\left[F_{x^i}'(x, f(x))\right]. \tag{10}$$

◀ Доказательство существования промежутка $I^{m+1} = I_x^m \times I_y^1$, функции $y = f(x) = f(x^1, \ldots, x^m)$ и ее непрерывности в I_x^m дословно повторяет соответствующие части доказательства утверждения 1, с единственным изменением, которое сводится к тому, что теперь под символом x надо понимать набор $(x^1, \ldots, x^m)$, а под символом α — набор $(\alpha^1, \ldots, \alpha^m)$.

Если теперь в функциях $F(x^1, \ldots, x^m, y)$ и $f(x^1, \ldots, x^m)$ фиксировать все переменные, кроме x^i и y, то мы окажемся в условиях утверждения 1, где на сей раз роль x выполняет переменная x^i. Отсюда следует справедливость формулы (10). Из этой формулы видно, что $\frac{\partial f}{\partial x^i} \in C(I_x^m; I_y^1)$ $(i = 1, \ldots, m)$, т. е. $f \in C^{(1)}(I_x^m; I_y^1)$. Рассуждая, как и при доказательстве утверждения 1, по индукции устанавливаем, что $f \in C^{(p)}(I_x^m; I_y^1)$, коль скоро $F \in C^{(p)}(U; \mathbb{R})$. ▶

Пример 2. Предположим, что функция $F\colon G \to \mathbb{R}$ определена в области $G \subset \mathbb{R}^m$ и принадлежит классу $C^{(1)}(G; \mathbb{R})$; $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^m) \in$ $\in G$ и $F(x_0) = F(x_0^1, \ldots, x_0^m) = 0$. Если x_0 не является критической точкой функции F, то хотя бы одна из частных производных функции F в точке x_0 отлична от нуля. Пусть, например, $\frac{\partial F}{\partial x^m}(x_0) \neq 0$.

Тогда, в силу утверждения 2, в некоторой окрестности точки x_0 подмножество $\mathbb{R}^m$, задаваемое уравнением $F(x^1, \ldots, x^m) = 0$, может быть задано как график некоторой функции $x^m = f(x^1, \ldots, x^{m-1})$, определенной в окрестности точки $(x_0^1, \ldots, x_0^{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$, непрерывно дифференцируемой в этой окрестности и такой, что $f(x_0^1, \ldots, x_0^{m-1}) = x_0^m$.

Таким образом, в окрестности некритической точки x_0 функции F уравнение

$$F(x^1, \ldots, x^m) = 0$$

задает $(m-1)$-мерную поверхность.

В частности, в случае $\mathbb{R}^3$ уравнение

$$F(x, y, z) = 0$$

в окрестности некритической точки (x_0, y_0, z_0), удовлетворяющей ему, задает двумерную поверхность, которая при выполнении условия $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ локально может быть записана в виде

$$z = f(x, y).$$

Как мы знаем, уравнение плоскости, касательной к графику этой функции в точке (x_0, y_0, z_0), имеет вид

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Но по формуле (10)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)},$$

поэтому уравнение касательной плоскости можно переписать в виде

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

симметричном относительно переменных x, y, z.

Аналогично и в общем случае получаем уравнение

$$\sum_{i=1}^{m} F'_{x^i}(x_0)(x^i - x_0^i) = 0$$

гиперплоскости в $\mathbb{R}^m$, касательной в точке $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^m)$ к поверхности, задаваемой уравнением $F(x^1, \ldots, x^m) = 0$ (разумеется, при условии, что $F(x_0) = 0$ и что x_0 — некритическая точка F).

Из полученных уравнений видно, что при наличии евклидовой структуры в $\mathbb{R}^m$ можно утверждать, что вектор

$$\operatorname{grad} F(x_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x^m}\right)(x_0)$$

ортогонален поверхности r-уровня $F(x) = r$ функции F в соответствующей точке $x_0 \in \mathbb{R}^m$.

Например, для функции

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

определенной в $\mathbb{R}^3$, r-уровнем являются: пустое множество при $r < 0$; точка при $r = 0$; эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r$$

при $r > 0$. Если (x_0, y_0, z_0) — точка на этом эллипсоиде, то по доказанному вектор

$$\operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2}\right)$$

ортогонален этому эллипсоиду в точке (x_0, y_0, z_0), а касательная к нему в этой точке плоскость имеет уравнение

$$\frac{x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} + \frac{z_0(z - z_0)}{c^2} = 0,$$

которое с учетом того, что точка (x_0, y_0, z_0) лежит на эллипсоиде, можно переписать в виде

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = r.$$

4. Теорема о неявной функции. Теперь перейдем к общему случаю системы уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F^n(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

которую мы будем решать относительно $y^1, \dots, y^n$, т. е. искать локально эквивалентную системе (11) систему функциональных связей

$$\begin{cases} y^1 = f^1(x^1, \dots, x^m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^n = f^n(x^1, \dots, x^m). \end{cases} \tag{12}$$

Для краткости, удобства письма и ясности формулировок условимся, что $x = (x^1, \dots, x^m)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$; левую часть системы (11) будем записывать как $F(x,y)$, систему (11) как $F(x,y)=0$, а отображение (12) как $y=f(x)$.

Если

$$\begin{aligned} x_0 &= (x_0^1,\dots,x_0^m), & y_0 &= (y_0^1,\dots,y_0^n),\\ \alpha &= (\alpha^1,\dots,\alpha^m), & \beta &= (\beta^1,\dots,\beta^n), \end{aligned}$$

то запись $|x-x_0|<\alpha$ или $|y-y_0|<\beta$ будет означать, что $|x^i-x_0^i|<\alpha^i$ $(i=1,\dots,m)$ и, соответственно, $|y^j-y_0^j|<\beta^j$ $(j=1,\dots,n)$.

Далее положим

$$f'(x)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}(x), \tag{13}$$

$$F'_x(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^1}{\partial x^m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial F^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}(x,y), \tag{14}$$

$$F'_y(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^1}{\partial y^n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial F^n}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}(x,y). \tag{15}$$

Заметим, что матрица $F'_y(x,y)$ квадратная и, следовательно, она обратима тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля. В случае $n=1$ она сводится к единственному элементу и в этом случае обратимость матрицы $F'_y(x,y)$ равносильна тому, что этот единственный ее элемент отличен от нуля. Матрицу, обратную к $F'_y(x,y)$, будем, как обычно, обозначать символом $\big[F'_y(x,y)\big]^{-1}$.

Теперь сформулируем основной результат параграфа.

Теорема (о неявной функции)**.** *Если отображение* $F\colon U\to\mathbb{R}^n$, *определенное в окрестности* U *точки* $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^{m+n}$, *таково, что*

1° $F\in C^{(p)}(U;\mathbb{R}^n)$, $p\geqslant 1$,

2° $F(x_0,y_0)=0$,

3° $F'_y(x_0,y_0)$ — *обратимая матрица,* *то существуют $(m+n)$-мерный промежуток $I = I_x^m \times I_y^n \subset U$, где*

$$I_x^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x - x_0| < \alpha\}, \qquad I_y^n = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - y_0| < \beta\},$$

и такое отображение $f \in C^{(p)}(I_x^m; I_y^n)$, что для любой точки $(x, y) \in \in I_x^m \times I_y^n$

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x), \tag{16}$$

причем

$$f'(x) = -\left[F_y'(x, f(x))\right]^{-1}\left[F_x'(x, f(x))\right]. \tag{17}$$

◀ Доказательство теоремы будет опираться на утверждение 2 и простейшие свойства определителей. Разобьем его на отдельные этапы. Будем рассуждать методом индукции.

При $n = 1$ теорема совпадает с утверждением 2 и потому верна.

Пусть теорема справедлива для размерности $n-1$. Покажем, что она тогда справедлива и для размерности n.

a) В силу условия 3°, определитель матрицы (15) отличен от нуля в точке $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{m+n}$, а значит, и в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Следовательно, по крайней мере один элемент последней строки этой матрицы отличен от нуля. С точностью до перемены обозначений можно считать, что таким является элемент $\dfrac{\partial F^n}{\partial y^n}$.

b) Применяя тогда к соотношению

$$F^n(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = 0$$

утверждение 2, найдем промежуток $\tilde{I}^{m+n} = \left(\tilde{I}_x^m \times \tilde{I}_y^{n-1}\right) \times I_y^1 \subset U$ и такую функцию $\tilde{f} \in C^{(p)}\left(\tilde{I}_x^m \times \tilde{I}_y^{n-1}; I_y^1\right)$, что

$$\begin{aligned}\left(F^n(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = 0 \ \text{ в } \ \tilde{I}^{m+n}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(y^n = \tilde{f}(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^{n-1}),\right. \\ \left.(x^1, \dots, x^m) \in \tilde{I}_x^m, \ \ (y^1, \dots, y^{n-1}) \in \tilde{I}_y^{n-1}\right).\end{aligned} \tag{16}$$

c) Подставляя найденное выражение $y^n = \tilde{f}(x, y^1, \dots, y^{n-1})$ переменной y^n в первые $n-1$ уравнений системы (11), получим $n-1$ соотношений

$$\begin{cases} \Phi^1(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^{n-1}) := \\ \quad = F^1(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^{n-1}, \tilde{f}(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^{n-1})) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi^{n-1}(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^{n-1}) := \\ \quad = F^{n-1}(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^{n-1}, \tilde{f}(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^{n-1})) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Видно, что $\Phi^i \in C^{(p)}(\tilde{I}_x^m \times \tilde{I}_y^{n-1};\mathbb{R})$ $(i = 1,\dots,n-1)$, причем

$$\Phi^i(x_0^1,\dots,x_0^m,y_0^1,\dots,y_0^{n-1}) = 0 \qquad (i = 1,\dots,n-1),$$

ибо $\tilde{f}(x_0^1,\dots,x_0^m,y_0^1,\dots,y_0^{n-1}) = y_0^n$ и $F^i(x_0,y_0) = 0$ $(i = 1,\dots,n)$.

В силу определения функций Φ^k $(k = 1,\dots,n-1)$,

$$\frac{\partial \Phi^k}{\partial y^i} = \frac{\partial F^k}{\partial y^i} + \frac{\partial F^k}{\partial y^n}\cdot\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^i} \qquad (i,k = 1,\dots,n-1). \tag{20}$$

Положив еще

$$\Phi^n(x^1,\dots,x^m,y^1,\dots,y^{n-1}) := \\ = F^n(x^1,\dots,x^m,y^1,\dots,y^{n-1},\tilde{f}(x^1,\dots,x^m,y^1,\dots,y^{n-1})),$$

в силу (18) получаем, что в области своего определения $\Phi^n \equiv 0$, поэтому

$$\frac{\partial \Phi^n}{\partial y^i} = \frac{\partial F^n}{\partial y^i} + \frac{\partial F^n}{\partial y^n}\cdot\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^i} \equiv 0 \qquad (i = 1,\dots,n-1). \tag{21}$$

Учитывая соотношения (20), (21) и свойства определителей, можно заметить, что определитель матрицы (15) равен определителю матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} + \frac{\partial F^1}{\partial y^n}\cdot\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial y^{n-1}} + \frac{\partial F^1}{\partial y^n}\cdot\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^{n-1}} & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1} + \frac{\partial F^n}{\partial y^n}\cdot\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial F^n}{\partial y^{n-1}} + \frac{\partial F^n}{\partial y^n}\cdot\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^{n-1}} & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial y^{n-1}} & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi^{n-1}}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial \Phi^{n-1}}{\partial y^{n-1}} & \frac{\partial F^{n-1}}{\partial y^n} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}.$$

По предположению, $\frac{\partial F^n}{\partial y^n} \neq 0$, а определитель матрицы (15) по условию отличен от нуля. Следовательно, в некоторой окрестности точки

$(x_0^1, \dots, x_0^m, y_0^1, \dots, y_0^{n-1})$ отличен от нуля и определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi^1}{\partial y^{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial \Phi^{n-1}}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi^{n-1}}{\partial y^{n-1}} \end{pmatrix} (x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^{n-1}).$$

Тогда по предположению индукции найдутся промежуток $I^{m+n-1} = I_x^m \times I_y^{n-1} \subset \tilde{I}_x^m \times \tilde{I}_y^{n-1}$ — окрестность точки $(x_0^1, \dots, x_0^m, y_0^1, \dots, y_0^{n-1})$ в $\mathbb{R}^{m+n-1}$ — и такое отображение $f \in C^{(p)}(I_x^m; I_y^{n-1})$, что в пределах промежутка $I^{m+n-1} = I_x^m \times I_y^{n-1}$ система (19) равносильна соотношениям

$$\begin{cases} y^1 = f^1(x^1, \dots, x^m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{n-1} = f^{n-1}(x^1, \dots, x^m), \end{cases} \quad x \in I_x^m. \tag{22}$$

d) Так как $I_y^{n-1} \subset \tilde{I}_y^{n-1}$, а $I_x^m \subset \tilde{I}_x^m$, то, подставляя $f^1, \dots, f^{n-1}$ из (22) вместо соответствующих переменных в функцию

$$y^n = \tilde{f}(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^{n-1})$$

из соотношения (18), получаем зависимость

$$y^n = f^n(x^1, \dots, x^m) \tag{23}$$

переменной y^n от $(x^1, \dots, x^m)$.

e) Покажем теперь, что система равенств

$$\begin{cases} y^1 = f^1(x^1, \dots, x^m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^n = f^n(x^1, \dots, x^m), \end{cases} \quad x \in I_x^m, \tag{24}$$

задающая отображение $f \in C^{(p)}(I_x^m; I_y^n)$, где $I_y^n = I_y^{n-1} \times I_y^1$, равносильна в пределах окрестности $I^{m+n} = I_x^m \times I_y^n$ системе уравнений (11).

В самом деле, сначала мы в пределах $\tilde{I}^{m+n} = \left(\tilde{I}_x^m \times \tilde{I}_y^{n-1}\right) \times I_y^1$ заменили последнее уравнение исходной системы (11) эквивалентным ему, в силу (18), равенством $y^n = \tilde{f}(x, y^1, \dots, y^{n-1})$. От так полученной второй системы мы перешли к равносильной ей третьей системе, заменив в первых $n-1$ уравнениях переменную y^n на $\tilde{f}(x, y^1, \dots, y^{n-1})$. Первые $n-1$

уравнений (19) третьей системы мы в пределах $I_x^m \times I_y^{n-1} \subset \tilde{I}_x^m \times \tilde{I}_y^{n-1}$ заменили равносильными им соотношениями (22). Тем самым получили четвертую систему, после чего перешли к равносильной ей в пределах $I_x^m \times I_y^{n-1} \times I_y^1 = I^{m+n}$ окончательной системе (24), заменив в последнем уравнении $y^n = \tilde{f}(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^{n-1})$ четвертой системы переменные $y^1, \dots, y^{n-1}$ их выражениями (22) и получив в качестве последнего уравнения соотношение (23).

f) Для завершения доказательства теоремы остается проверить формулу (17).

Поскольку в окрестности $I_x^m \times I_y^n$ точки (x_0, y_0) системы (11) и (12) равносильны, то

$$F(x, f(x)) \equiv 0, \quad \text{если} \quad x \in I_x^m.$$

В координатах это означает, что в области I_x^m

$$F^k(x^1, \dots, x^m, f^1(x^1, \dots, x^m), \dots, f^n(x^1, \dots, x^m)) \equiv 0 \qquad (k = 1, \dots, n). \quad (25)$$

Поскольку $f \in C^{(p)}(I_x^m; I_y^n)$ и $F \in C^{(p)}(U; \mathbb{R}^n)$, где $p \geqslant 1$, то $F(\cdot, f(\cdot)) \in$ $\in C^{(p)}(I_x^m; \mathbb{R}^n)$ и, дифференцируя тождества (25), получаем

$$\frac{\partial F^k}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F^k}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial f^j}{\partial x^i} = 0 \qquad (k = 1, \dots, n; \;\; i = 1, \dots, m). \quad (26)$$

Соотношения (26), очевидно, равносильны одному матричному равенству

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \cdot f'(x) = 0,$$

в котором $y = f(x)$.

Учитывая обратимость матрицы $F'_y(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0), из этого равенства получаем, что

$$f'(x) = -\left[F'_y(x, f(x))\right]^{-1} \left[F'_x(x, f(x))\right],$$

и теорема полностью доказана. ►

Задачи и упражнения

1. На плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y соотношением $F(x,y)=0$, где $F \in \in C^{(2)}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, задана кривая. Пусть (x_0,y_0) — некритическая точка функции $F(x,y)$, лежащая на кривой.

a) Напишите уравнение касательной к этой кривой в точке (x_0,y_0).

b) Покажите, что если (x_0,y_0) — точка перегиба кривой, то в этой точке выполняется равенство

$$\left(F''_{xx}{F'_y}^2 - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}{F'_x}^2\right)(x_0,y_0)=0.$$

c) Найдите формулу для кривизны кривой в точке (x_0,y_0).

2. *Преобразование Лежандра для m переменных.*
Преобразование Лежандра от переменных $x^1,\dots,x^m$ и функции $f(x^1,\dots,x^m)$ есть переход к новым переменным $\xi_1,\dots,\xi_m$ и функции $f^*(\xi_1,\dots,\xi_m)$, задаваемый соотношениями

$$\begin{cases} \xi_i = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}(x^1,\dots,x^m) \qquad (i=1,\dots,m),\\ f^*(\xi_1,\dots,\xi_m) = \sum\limits_{i=1}^{m}\xi_i x^i - f(x^1,\dots,x^m). \end{cases} \tag{27}$$

a) Дайте геометрическую интерпретацию преобразования (27) Лежандра как перехода от координат $(x^1,\dots,x^m,f(x^1,\dots,x^m))$ точки на графике функции $f(x)$ к параметрам $(\xi_1,\dots,\xi_m,f^*(\xi_1,\dots,\xi_m))$, задающим уравнение плоскости, касательной к графику в этой точке.

b) Покажите, что преобразование Лежандра локально заведомо возможно, если $f\in C^{(2)}$ и $\det\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)\neq 0$.

c) Используя для функции $f(x)=f(x^1,\dots,x^m)$ то же определение выпуклости, что и в одномерном случае (подразумевая теперь под x вектор $(x^1,\dots,x^m)\in\mathbb{R}^m$), покажите, что преобразованием Лежандра выпуклой функции является выпуклая функция.

d) Покажите, что

$$df^* = \sum_{i=1}^{m} x^i d\xi_i + \sum_{i=1}^{m}\xi_i dx^i - df = \sum_{i=1}^{m} x^i d\xi_i,$$

и выведите отсюда инволютивность преобразования Лежандра, т. е. проверьте, что

$$(f^*)^*(x) = f(x).$$

e) Учитывая d), запишите преобразование (27) в симметричном относительно переменных виде

$$\begin{cases} f^*(\xi_1,\dots,\xi_m) + f(x^1,\dots,x^m) = \sum\limits_{i=1}^{m}\xi_i x^i,\\ \xi_i = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}(x^1,\dots,x^m), \qquad x^i = \dfrac{\partial f^*}{\partial \xi_i}(\xi_1,\dots,\xi_m) \end{cases} \tag{28}$$

или, короче, в виде

$$f^*(\xi)+f(x)=\xi x, \qquad \xi=\nabla f(x), \quad x=\nabla f^*(\xi),$$

где

$$\nabla f(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x^m}\right)(x), \qquad \nabla f^*(\xi)=\left(\frac{\partial f^*}{\partial \xi_1},\dots,\frac{\partial f^*}{\partial \xi_m}\right)(\xi),$$

$$\xi x=\xi_i x^i=\sum_{i=1}^m \xi_i x^i.$$

f) Матрицу, составленную из частных производных второго порядка функции (а иногда и определитель этой матрицы), называют *гессианом* функции в данной точке.

Пусть d_{ij} и d^*_{ij} — алгебраические дополнения элементов $\frac{\partial f}{\partial x^i \partial x^j}$, $\frac{\partial f^*}{\partial \xi_i \partial \xi_j}$ гессианов

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^m \partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^m \partial x^m} \end{pmatrix}(x), \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f^*}{\partial \xi_1 \partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f^*}{\partial \xi_1 \partial \xi_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f^*}{\partial \xi_m \partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f^*}{\partial \xi_m \partial \xi_m} \end{pmatrix}(\xi)$$

функций $f(x)$ и $f^*(\xi)$, а d и d^* — определители этих матриц. Считая, что $d\neq 0$, покажите, что $d\cdot d^*=1$ и что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x)=\frac{d^*_{ij}}{d^*}(\xi), \qquad \frac{\partial^2 f^*}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\xi)=\frac{d_{ij}}{d}(x).$$

g) Мыльная пленка, натянутая на проволочный контур, образует так называемую *минимальную поверхность*, имеющую наименьшую площадь среди всех поверхностей, натянутых на этот контур.

Если локально задать эту поверхность как график функции $z=f(x,y)$, то, оказывается, функция f должна удовлетворять следующему уравнению минимальных поверхностей:

$$\left(1+{f'_y}^2\right)f''_{xx}-2f'_x f'_y f''_{xy}+\left(1+{f'_x}^2\right)f''_{yy}=0.$$

Покажите, что после преобразования Лежандра это уравнение приводится к виду

$$\left(1+\eta^2\right)f^{*\prime\prime}_{\eta\eta}+2\xi\eta f^{*\prime\prime}_{\xi\eta}+\left(1+\xi^2\right)f^{*\prime\prime}_{\xi\xi}=0.$$

3. *Канонические переменные и система уравнений Гамильтона*[1)].

a) В вариационном исчислении и фундаментальных принципах классической механики важную роль играет следующая система уравнений Эйлера –

[1)] У. Р. Гамильтон (1805 – 1865) — знаменитый ирландский математик и механик. Сформулировал вариационный принцип (принцип Гамильтона), построил феноменологическую теорию оптических явлений; создатель теории кватернионов и родоначальник векторного анализа (кстати, ему принадлежит сам термин «вектор»).

Лагранжа:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial L}{\partial x} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial v}\right)(t,x,v) = 0, \\ v = \dot{x}(t), \end{cases} \tag{29}$$

где $L(t,x,v)$ — заданная функция переменных t, x, v, среди которых t обычно является временем, x — координатой, а v — скоростью.

Систему (29) составляют два соотношения на три переменные. Из системы (29) обычно желают найти зависимости $x = x(t)$ и $v = v(t)$, что по существу сводится к отысканию зависимости $x = x(t)$, ибо $v = \frac{dx}{dt}$.

Запишите подробно первое уравнение системы (29), раскрыв производную $\frac{d}{dt}$ с учетом того, что $x = x(t)$ и $v = v(t)$.

b) Покажите, что если от переменных t, x, v, L перейти к так называемым *каноническим переменным* t, x, p, H, сделав преобразование Лежандра (см. задачу 2)

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial L}{\partial v}, \\ H = pv - L \end{cases}$$

по переменным v, L, заменяя их на переменные p, H, то система Эйлера – Лагранжа (29) приобретает симметричный вид

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{30}$$

в котором она называется *системой уравнений Гамильтона.*

c) В многомерном случае, когда $L = L(t, x^1, \ldots, x^m, v^1, \ldots, v^m)$, система уравнений Эйлера – Лагранжа имеет вид

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial L}{\partial x^i} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial v^i}\right)(t,x,v) = 0, \\ v^i = \dot{x}^i(t) \qquad (i = 1, \ldots, m), \end{cases} \tag{31}$$

где для краткости положено $x = (x^1, \ldots, x^m)$, $v = (v^1, \ldots, v^m)$.

Сделав преобразование Лежандра по переменным $v^1, \ldots, v^m, L$, перейдите от переменных $t, x^1, \ldots, x^m, v^1, \ldots, v^m, L$ к каноническим переменным $t, x^1, \ldots, x^m, p_1, \ldots, p_m, H$ и покажите, что в них система (31) перейдет в следующую систему уравнений Гамильтона:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \qquad \dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{32}$$

4. *Теорема о неявной функции.*

Решение этой задачи дает другое, быть может, менее наглядное и эффективное, но более короткое в сравнении с изложенным выше доказательство основной теоремы настоящего параграфа.

a) Пусть выполнены условия теоремы о неявной функции, и пусть

$$F_y^i(x,y) = \left(\frac{\partial F^i}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial F^i}{\partial y^n}\right)(x,y)$$

— i-я строка матрицы $F'_y(x,y)$.

Покажите, что определитель матрицы, составленной из векторов $F_y^i(x_i,y_i)$, отличен от нуля, если все точки (x_i,y_i) $(i=1,\ldots,n)$ лежат в некоторой достаточно малой окрестности $U = I_x^m \times I_y^n$ точки (x_0,y_0).

b) Покажите, что если при $x \in I_x^m$ найдутся точки $y_1, y_2 \in I_y^n$ такие, что $F(x,y_1)=0$ и $F(x,y_2)=0$, то для каждого $i \in \{1,\ldots,n\}$ найдется такая точка (x,y_i), лежащая на отрезке с концами (x,y_1), (x,y_2), что

$$F_y^i(x,y_i)(y_2-y_1) = 0 \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Покажите, что отсюда следует, что $y_1 = y_2$, т. е. если неявная функция $f\colon I_x^m \to \to I_y^n$ существует, то она единственна.

c) Покажите, что если шар $B(y_0;r)$ лежит в I_y^n, то $F(x_0,y) \neq 0$ при $\|y-y_0\|_{\mathbb{R}^n} = r > 0$.

d) Функция $\|F(x_0,y)\|^2_{\mathbb{R}^n}$ непрерывна и имеет положительный минимум μ на сфере $\|y-y_0\|_{\mathbb{R}^n} = r$.

e) Существует $\delta > 0$ такое, что при $\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^m} < \delta$

$$\|F(x,y)\|^2_{\mathbb{R}^n} \geqslant \frac{1}{2}\mu, \quad \text{если} \quad \|y-y_0\|_{\mathbb{R}^n} = r,$$

$$\|F(x,y)\|^2_{\mathbb{R}^n} < \frac{1}{2}\mu, \quad \text{если} \quad y = y_0.$$

f) При любом фиксированном x таком, что $\|x-x_0\|<\delta$, функция $\|F(x,y)\|^2_{\mathbb{R}^n}$ достигает минимума в некоторой внутренней точке $y=f(x)$ шара $\|y-y_0\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \leqslant r$, и поскольку матрица $F'_y(x,f(x))$ обратима, то $F(x,f(x))=0$. Этим устанавливается существование неявной функции $f\colon B(x_0;\delta) \to B(y_0;r)$.

g) Если $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, то

$$\Delta y = -\left[\widetilde{F}'_y\right]^{-1} \cdot \left[\widetilde{F}'_x\right] \Delta x,$$

где $\widetilde{F}'_y$ — матрица, строками которой являются векторы $F_y^i(x_i,y_i)$ $(i=1,\ldots,n)$, где (x_i,y_i) — точка на отрезке с концами (x,y), $(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Аналогичный смысл имеет символ $\widetilde{F}'_x$.

Покажите, что из этого соотношения следует непрерывность функции $y = f(x)$.

h) Покажите, что

$$f'(x) = -\left[\widetilde{F}'_y(x, f(x))\right]^{-1} \cdot \left[\widetilde{F}'_x(x, f(x))\right].$$

5. «Если $f(x, y, z) = 0$, то $\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} = -1$».

a) Придайте точный смысл этому высказыванию.

b) Проверьте его справедливость на примере формулы Клапейрона

$$\frac{P \cdot V}{T} = \mathrm{const}$$

и в общем случае функции трех переменных.

c) Запишите аналогичное высказывание для соотношения $f(x^1, \dots, x^m) = 0$ между m переменными. Проверьте его справедливость.

6. Покажите, что корни уравнения

$$z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n = 0$$

гладко зависят от его коэффициентов, во всяком случае, пока все корни различны.

§ 6. Некоторые следствия теоремы о неявной функции

1. Теорема об обратной функции

Определение 1. Отображение $f\colon U \to V$, где U и V — открытые подмножества в $\mathbb{R}^m$, называется $C^{(p)}$-*диффеоморфизмом* или *диффеоморфизмом гладкости* p $(p = 0, 1, \dots)$, если

1) $f \in C^{(p)}(U; V)$;

2) f — биекция;

3) $f^{-1} \in C^{(p)}(V; U)$.

$C^{(0)}$-диффеоморфизмы называют *гомеоморфизмами.*

Здесь мы, как правило, будем рассматривать только гладкий случай, т. е. случай $p \in \mathbb{N}$ или $p = \infty$.

Следующая часто используемая теорема в идейном плане утверждает, что если дифференциал отображения обратим в точке, то само отображение обратимо в некоторой окрестности этой точки.

Теорема 1 (теорема об обратной функции)**.** *Если отображение* $f\colon G \to \mathbb{R}^m$ *области* $G \subset \mathbb{R}^m$ *таково, что*

1° $f \in C^{(p)}(G; \mathbb{R}^m)$, $p \geqslant 1$,

2° $y_0 = f(x_0)$ при $x_0 \in G$,

3° $f'(x_0)$ обратимо,

то существуют окрестность $U(x_0) \subset G$ *точки* x_0 *и окрестность* $V(y_0)$ *точки* y_0 *такие, что* $f\colon U(x_0) \to V(y_0)$ *есть* $C^{(p)}$*-диффеоморфизм. При этом если* $x \in U(x_0)$ *и* $y = f(x) \in V(y_0)$*, то*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \left(f'(x)\right)^{-1}.$$

◀ Соотношение $y = f(x)$ перепишем в виде

$$F(x, y) = f(x) - y = 0. \tag{1}$$

Функция $F(x, y) = f(x) - y$ определена при $x \in G$ и $y \in \mathbb{R}^m$, т. е. определена в окрестности $G \times \mathbb{R}^m$ точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$.

Мы хотим разрешить уравнение (1) относительно x в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). В силу условий 1°, 2°, 3° теоремы отображение $F(x, y)$ таково, что

$$F \in C^{(p)}(G \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m), \quad p \geqslant 1,$$
$$F(x_0, y_0) = 0,$$
$$F'_x(x_0, y_0) = f'(x_0) \text{ обратимо.}$$

По теореме о неявной функции найдутся окрестность $I_x \times I_y$ точки (x_0, y_0) и отображение $g \in C^{(p)}(I_y; I_x)$ такие, что для любой точки $(x, y) \in I_x \times I_y$

$$f(x) - y = 0 \Leftrightarrow x = g(y) \tag{2}$$

и

$$g'(y) = -\left[F'_x(x, y)\right]^{-1}\left[F'_y(x, y)\right].$$

В нашем случае

$$F'_x(x, y) = f'(x), \qquad F'_y(x, y) = -E,$$

где E — единичная матрица; поэтому

$$g'(y) = \left(f'(x)\right)^{-1}. \tag{3}$$

Если положить $V = I_y$ и $U = g(V)$, то соотношение (2) показывает, что отображения $f\colon U \to V$ и $g\colon V \to U$ взаимно обратны, т. е. $g = f^{-1}$ на V.

Поскольку $V = I_y$, то V — окрестность точки y_0. Это означает, что при условиях 1°, 2°, 3° образ $y_0 = f(x_0)$ точки $x_0 \in G$, внутренней для G, является точкой, внутренней для образа $f(G)$ множества G. В силу формулы (3) матрица $g'(y_0)$ обратима. Значит, отображение $g\colon V \to U$ обладает свойствами 1°, 2°, 3° относительно области V и точки $y_0 \in V$. Тогда по уже доказанному $x_0 = g(y_0)$ — внутренняя точка множества $U = g(V)$.

Поскольку условия 1°, 2°, 3° в силу формулы (3), очевидно, выполнены в любой точке $y \in V$, то любая точка $x = g(y)$ является внутренней точкой множества U. Таким образом, U — открытая (и, очевидно, даже связная) окрестность точки x_0 в $\mathbb{R}^m$.

Теперь проверено, что отображение $f\colon U \to V$ удовлетворяет всем условиям определения 1 и утверждению теоремы 1. ▶

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих теорему 1. Очень часто теорема об обратной функции используется при переходе от одной системы координат к другой системе координат. Простейший вариант такого преобразования координат рассматривался в аналитической геометрии и линейной алгебре и имел вид

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \dots \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_m^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & \dots & a_m^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^m \end{pmatrix}$$

или, в компактной записи, $y^j = a_i^j x^i$. Это линейное преобразование $A\colon \mathbb{R}_x^m \to \mathbb{R}_y^m$ имеет обратное $A^{-1}\colon \mathbb{R}_y^m \to \mathbb{R}_x^m$, определенное во всем пространстве $\mathbb{R}_y^m$, тогда и только тогда, когда матрица $\left(a_i^j\right)$ обратима, т. е. при условии, что $\det\left(a_i^j\right) \neq 0$.

Теорема об обратной функции является локальным вариантом этого утверждения, опирающимся на то обстоятельство, что гладкое отображение в малой окрестности точки ведет себя примерно так же, как его дифференциал в этой точке.

Пример 1. *Полярные координаты.* Отображение $f\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}^2$ полуплоскости $\mathbb{R}_+^2 = \{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho \geqslant 0\}$ на плоскость $\mathbb{R}^2$, задаваемое формулами

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi, \\ y &= \rho\sin\varphi, \end{aligned} \tag{4}$$

проиллюстрировано на рис. 57.

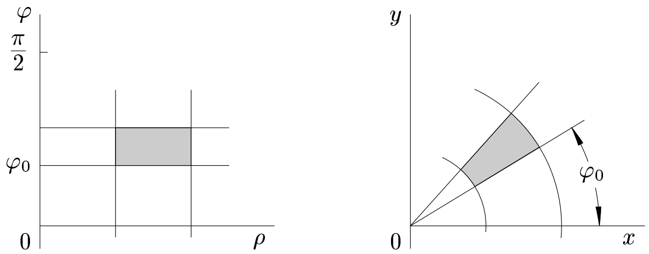


Рис. 57.

Якобиан этого отображения, как нетрудно подсчитать, равен ρ, т. е. отличен от нуля в окрестности любой точки (ρ, φ), где $\rho > 0$. Таким образом, формулы (4) локально обратимы и, значит, локально числа ρ, φ могут быть приняты в качестве новых координат точки, которую раньше задавали декартовы координаты x, y.

Координаты (ρ, φ) являются хорошо известной системой криволинейных координат на плоскости — это полярные координаты. Их геометрический смысл виден из рис. 57. Отметим, что в силу периодичности функций $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ отображение (4) при $\rho > 0$ только локально диффеоморфно, а во всей этой области оно не является биективным. Именно поэтому переход от декартовых координат к полярным всегда сопровождается выбором ветви (т. е. указанием диапазона изменения) аргумента φ.

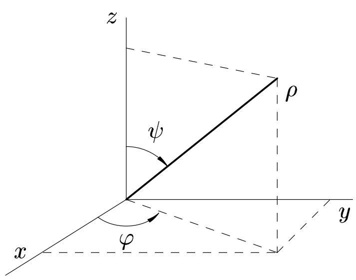


Рис. 58.

Полярные координаты (ρ, ψ, φ) в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ называют *сферическими* координатами. Они связаны с декартовыми координатами формулами

$$\begin{aligned} z &= \rho\cos\psi, \\ y &= \rho\sin\psi\sin\varphi, \\ x &= \rho\sin\psi\cos\varphi. \end{aligned} \tag{5}$$

Геометрический смысл параметров ρ, ψ, φ показан на рис. 58.

Якобиан отображения (5) равен $\rho^2 \sin\psi$ и в силу теоремы 1 преобразование (5) обратимо в окрестности любой точки (ρ, ψ, φ), в которой $\rho > 0$ и $\sin\psi \neq 0$.

Множествам, где $\rho = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ или $\psi = \text{const}$, в пространстве (x, y, z), очевидно, отвечают соответственно сферическая поверхность (на сфере радиуса ρ), полуплоскость, проходящая через ось z, и поверхность конуса с осью z.

Таким образом, при переходе от координат (x, y, z) к координатам (ρ, ψ, φ), например, сферическая поверхность и поверхность конуса локально распрямляются: им соответствуют куски плоскостей $\rho = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ соответственно. Аналогичное явление мы наблюдали и в двумерном случае, когда дуге окружности на плоскости (x, y) отвечал отрезок прямой на плоскости с координатами (ρ, φ) (см. рис. 57). Обратите внимание на то, что это именно локальное выпрямление.

В m-мерном случае полярные координаты вводятся соотношениями

$$\begin{aligned} x^1 &= \rho \cos\varphi_1, \\ x^2 &= \rho \sin\varphi_1 \cos\varphi_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^{m-1} &= \rho \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{m-2} \cos\varphi_{m-1}, \\ x^m &= \rho \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{m-2} \sin\varphi_{m-1}. \end{aligned} \tag{5'}$$

Якобиан этого преобразования равен

$$\rho^{m-1} \sin^{m-2}\varphi_1 \sin^{m-3}\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{m-2} \tag{6}$$

и в силу теоремы 1 оно тоже локально обратимо всюду, где этот якобиан отличен от нуля.

Пример 2. *Общая идея локального выпрямления кривых.* Новые координаты обычно вводят с целью упростить аналитическую запись объектов, участвующих в задаче, и сделать их более обозримыми в этой новой записи.

Пусть, например, на плоскости $\mathbb{R}^2$ некоторая кривая задана уравнением

$$F(x, y) = 0.$$

Пусть F — гладкая функция, а точка (x_0, y_0) такова, что она лежит на кривой, т. е. $F(x_0, y_0) = 0$, и не является критической точкой функции F, например, пусть $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Попробуем подобрать координаты ξ, η так, чтобы в них дуге нашей кривой, содержащей (x_0, y_0), отвечал отрезок одной из координатных линий, например линии $\eta = 0$.

Положим

$$\xi = x - x_0, \qquad \eta = F(x, y).$$

Матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ F'_x & F'_y \end{pmatrix} (x, y)$$

этого преобразования имеет своим детерминантом величину $F'_y(x, y)$, которая по предположению отлична от нуля в точке (x_0, y_0). Тогда по теореме 1 это отображение является диффеоморфизмом окрестности точки (x_0, y_0) на окрестность точки $(\xi, \eta) = (0, 0)$. Значит, в пределах указанной окрестности чи́сла ξ, η можно принять за новые координаты точек, лежащих в окрестности точки (x_0, y_0). В новых координатах наша кривая, очевидно, имеет уравнение $\eta = 0$, и в этом смысле мы действительно добились ее локального выпрямления (рис. 59).

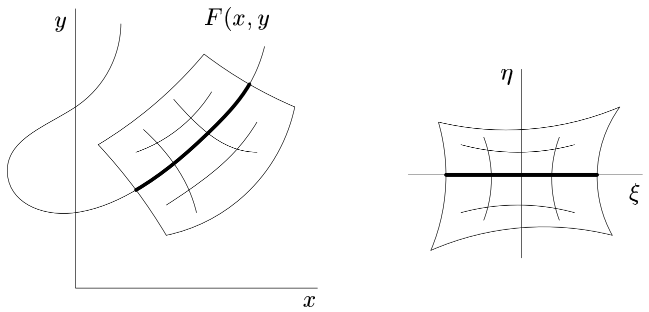


Рис. 59.

2. Локальное приведение гладкого отображения к каноническому виду. Мы рассмотрим здесь только один вопрос этого типа, а именно укажем канонический вид, к которому удачным выбором координат можно локально привести любое гладкое отображение, имеющее постоянный ранг.

Напомним, что рангом гладкого отображения $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ области $U \subset \mathbb{R}^m$ в точке $x \in U$ называется ранг касательного к нему в этой точке линейного отображения, т. е. ранг матрицы $f'(x)$. Ранг отображения f в точке x обозначают обычно символом $\operatorname{rang} f(x)$.

Теорема 2 (теорема о ранге). *Пусть* $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ *— отображение, определенное в окрестности* $U \subset \mathbb{R}^m$ *точки* $x_0 \in \mathbb{R}^m$. *Если* $f \in C^{(p)}(U;\mathbb{R}^n)$, $p \geqslant 1$, *и в любой точке* $x \in U$ *отображение* f *имеет один и тот же ранг* k, *то существуют окрестности* $O(x_0)$, $O(y_0)$ *точек* x_0, $y_0 = f(x_0)$ *и такие их диффеоморфизмы* $u = \varphi(x)$, $v = \psi(y)$ *класса* $C^{(p)}$, *что в окрестности* $O(u_0) = \varphi(O(x_0))$ *точки* $u_0 = \varphi(x_0)$ *отображение* $v = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(u)$ *имеет следующее координатное представление*:

$$(u^1, \ldots, u^k, \ldots, u^m) = u \mapsto v = (v^1, \ldots, v^n) = (u^1, \ldots, u^k, 0, \ldots, 0). \tag{7}$$

Иными словами, теорема утверждает (рис. 60), что вместо координат $(x^1, \ldots, x^m)$ можно выбрать координаты $(u^1, \ldots, u^m)$, а вместо координат $(y^1, \ldots, y^n)$ — координаты $(v^1, \ldots, v^n)$ так, что локально наше отображение в этих новых координатах будет иметь вид (7), т. е. канонический вид линейного отображения ранга k.

◀ Запишем координатное представление

$$\begin{aligned}
y^1 &= f^1(x^1, \ldots, x^m),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y^k &= f^k(x^1, \ldots, x^m),\\
y^{k+1} &= f^{k+1}(x^1, \ldots, x^m),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y^n &= f^n(x^1, \ldots, x^m)
\end{aligned} \tag{8}$$

нашего отображения $f\colon U \to \mathbb{R}^n_y$, определенного в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^m_x$. Чтобы не менять нумерацию координат и окрестность U, будем считать, что в любой точке $x \in U$ главный минор порядка k, стоящий в левом верхнем углу якобиевой матрицы отображения f, отличен от нуля.

Рассмотрим отображение, определяемое в окрестности U точки x_0 равенствами

$$\begin{aligned}
u^1 &= \varphi^1(x^1, \ldots, x^m) &&= f^1(x^1, \ldots, x^m),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u^k &= \varphi^k(x^1, \ldots, x^m) &&= f^k(x^1, \ldots, x^m),\\
u^{k+1} &= \varphi^{k+1}(x^1, \ldots, x^m) &&= x^{k+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u^m &= \varphi^m(x^1, \ldots, x^m) &&= x^m.
\end{aligned} \tag{9}$$

Его матрица Якоби имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}
\dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^k} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^m} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\dfrac{\partial f^k}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^k}{\partial x^k} & \dfrac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f^k}{\partial x^m} \\
\hdashline
 & & & 1 & & 0 \\
 & 0 & & & \ddots & \\
 & & & 0 & & 1
\end{array}\right),$$

и в силу сделанного предположения ее определитель отличен от нуля в U.

По теореме об обратной функции, отображение $u = \varphi(x)$ является диффеоморфизмом гладкости p некоторой окрестности $\widetilde{O}(x_0) \subset U$ точки x_0 на окрестность $\widetilde{O}(u_0) = \varphi\left(\widetilde{O}(x_0)\right)$ точки $u_0 = \varphi(x_0)$.

Сравнивая соотношения (8) и (9), видим, что композиция $g = f \circ \circ \varphi^{-1}\colon \widetilde{O}(u_0) \to \mathbb{R}^n_y$ имеет следующее координатное представление:

$$\begin{aligned}
y^1 &= f^1 \circ \varphi^{-1}(u^1, \dots, u^m) &&= u^1, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y^k &= f^k \circ \varphi^{-1}(u^1, \dots, u^m) &&= u^k, \\
y^{k+1} &= f^{k+1} \circ \varphi^{-1}(u^1, \dots, u^m) &&= g^{k+1}(u^1, \dots, u^m), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y^n &= f^n \circ \varphi^{-1}(u^1, \dots, u^m) &&= g^n(u^1, \dots, u^m).
\end{aligned} \tag{10}$$

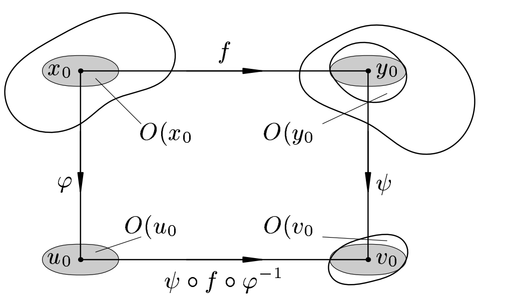


Рис. 60.

Поскольку отображение $\varphi^{-1}\colon \widetilde{O}(u_0) \to \widetilde{O}(x_0)$ в любой точке $u \in \widetilde{O}(u_0)$ имеет максимальный ранг m, а отображение $f\colon \widetilde{O}(x_0) \to \mathbb{R}^n_y$ в любой точке $x \in \widetilde{O}(x_0)$ имеет ранг k, то, как известно из линейной алгебры, матрица $g'(u) = = f'\left(\varphi^{-1}(u)\right) \times \left(\varphi^{-1}\right)'(u)$ имеет ранг k в любой точке $u \in \widetilde{O}(u_0)$.

Прямой подсчет матрицы Якоби отображения (10) дает

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & 1 & & & \\ \hdashline \frac{\partial g^{k+1}}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial g^{k+1}}{\partial u^k} & \frac{\partial g^{k+1}}{\partial u^{k+1}} & \cdots & \frac{\partial g^{k+1}}{\partial u^m} \\ \hdashline \frac{\partial g^n}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial g^n}{\partial u^k} & \frac{\partial g^n}{\partial u^{k+1}} & \cdots & \frac{\partial g^n}{\partial u^m} \end{array}\right).$$

Значит, в любой точке $u \in \widetilde{O}(u_0)$ получаем $\dfrac{\partial g^j}{\partial u^i}(u) = 0$ при $i = k + 1, \ldots, m$; $j = k + 1, \ldots, n$. Считая окрестность $\widetilde{O}(u_0)$ выпуклой (чего можно добиться, уменьшив $\widetilde{O}(u_0)$, например, до шара с центром u_0), отсюда можно заключить, что функции g^j при $j = k+1, \ldots, n$ на самом деле не зависят от переменных $u^{k+1}, \ldots, u^m$.

После этого решающего наблюдения отображение (10) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} y^1 &= u^1, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y^k &= u^k, \\ y^{k+1} &= g^{k+1}(u^1, \ldots, u^k), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^n &= g^n(u^1, \ldots, u^k). \end{aligned} \tag{11}$$

Теперь уже можно указать отображение ψ. Положим

$$\begin{aligned} v^1 &= y^1 =: \psi^1(y), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v^k &= y^k =: \psi^k(y), \\ v^{k+1} &= y^{k+1} - g^{k+1}(y^1, \ldots, y^k) =: \psi^{k+1}(y), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v^n &= y^n - g^n(y^1, \ldots, y^k) =: \psi^n(y). \end{aligned} \tag{12}$$

Из построения функций g^j $(j = k + 1, \ldots, n)$ видно, что отображение ψ определено в некоторой окрестности точки y_0 и принадлежит классу $C^{(p)}$ в этой окрестности.

Матрица Якоби отображения (12) имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}
1 & & 0 & & & \\
 & \ddots & & & 0 & \\
0 & & 1 & & & \\
\hdashline
-\dfrac{\partial g^{k+1}}{\partial y^1} & \dots & -\dfrac{\partial g^{k+1}}{\partial y^k} & 1 & & 0 \\
\hdashline
 & & & & \ddots & \\
-\dfrac{\partial g^{n}}{\partial y^1} & \dots & -\dfrac{\partial g^{n}}{\partial y^k} & 0 & & 1
\end{array}\right).$$

Ее определитель равен 1, и, значит, по теореме 1 отображение ψ является диффеоморфизмом гладкости p некоторой окрестности $\widetilde{O}(y_0)$ точки $y_0 \in \mathbb{R}^n_y$ на окрестность $\widetilde{O}(v_0) = \psi\left(\widetilde{O}(y_0)\right)$ точки $v_0 \in \mathbb{R}^n_v$.

Сравнивая соотношения (11) и (12), видим, что в достаточно малой окрестности $O(u_0) \subset \widetilde{O}(u_0)$ точки u_0 такой, что $g(O(u_0)) \subset \widetilde{O}(y_0)$, отображение $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \colon O(u_0) \to \mathbb{R}^n_v$ является отображением гладкости p этой окрестности $O(u_0)$ на некоторую окрестность $O(v_0) \subset \widetilde{O}(v_0)$ точки $v_0 \in \mathbb{R}^n_v$ и при этом имеет канонический вид

$$\begin{aligned}
v^1 &= u^1, \\
&\dots\dots\dots \\
v^k &= u^k, \\
v^{k+1} &= 0, \\
&\dots\dots\dots \\
v^n &= 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Полагая $\varphi^{-1}(O(u_0)) = O(x_0)$, $\psi^{-1}(O(v_0)) = O(y_0)$, получаем указанные в теореме окрестности точек x_0, y_0, чем и завершается доказательство. ►

Теорема 2, как и теорема 1, очевидно, является локальным вариантом соответствующей теоремы линейной алгебры.

В связи с проведенным доказательством теоремы 2 сделаем следующие полезные для дальнейшего замечания.

Замечание 1. Если в любой точке исходной окрестности $U \subset \mathbb{R}^m$ ранг отображения $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ равен n, то точка $y_0 = f(x_0)$, где $x_0 \in U$, является внутренней точкой множества $f(U)$, т. е. содержится в $f(U)$ вместе с некоторой своей окрестностью.

◄ Действительно, по доказанному отображение $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \colon O(u_0) \to \to O(v_0)$ в этом случае имеет вид

$$(u^1, \dots, u^n, \dots, u^m) = u \mapsto v = (v^1, \dots, v^n) = (u^1, \dots, u^n),$$

поэтому образ окрестности точки $u_0 = \varphi(x_0)$ содержит некоторую окрестность точки $v_0 = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(u_0)$.

Но отображения $\varphi \colon O(x_0) \to O(u_0)$, $\psi \colon O(y_0) \to O(v_0)$ — диффеоморфизмы, поэтому они переводят внутренние точки во внутренние. Записав исходное отображение f в виде $f = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$, заключаем, что точка $y_0 = f(x_0)$ является внутренней точкой образа окрестности точки x_0. ►

Замечание 2. Если ранг отображения $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ в любой точке окрестности U равен k и $k < n$, то, в силу равенств (8), (12) и (13), в некоторой окрестности точки $x_0 \in U \subset \mathbb{R}^m$ имеют место $n - k$ соотношений

$$f^i(x^1, \dots, x^m) = g^i(f^1(x^1, \dots, x^m), \dots, f^k(x^1, \dots, x^m)) \\ (i = k+1, \dots, n). \quad (14)$$

Указанные соотношения выписаны в принятом нами предположении о том, что главный минор порядка k матрицы $f'(x_0)$ отличен от нуля, т. е. что ранг k реализуется уже на наборе функций $f^1, \dots, f^k$. В противном случае можно изменить нумерацию функций $f^1, \dots, f^n$ и снова иметь указанную ситуацию.

3. Зависимость функций

Определение 2. Говорят, что система непрерывных функций $f^i(x) = f^i(x^1, \dots, x^m)$ $(i = 1, \dots, n)$ является *функционально независимой* в окрестности точки $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m)$, если для любой непрерывной функции $F(y) = F(y^1, \dots, y^n)$, определенной в окрестности точки $y_0 = = (y_0^1, \dots, y_0^n) = \big(f^1(x_0), \dots, f^n(x_0)\big) = f(x_0)$, соотношение

$$F\left(f^1(x^1, \dots, x^m), \dots, f^n(x^1, \dots, x^m)\right) \equiv 0$$

в окрестности точки x_0 возможно только в случае, когда $F(y^1, \dots, y^n) \equiv \equiv 0$ в окрестности точки y_0.

Линейная независимость, рассматривавшаяся в алгебре, есть независимость по отношению к линейным соотношениям

$$F(y^1, \ldots, y^n) = \lambda_1 y^1 + \ldots + \lambda_n y^n.$$

Если система не является функционально независимой, то ее называют *функционально зависимой.*

В случае линейной зависимости векторов один из них, очевидно, является линейной комбинацией остальных. Аналогичная ситуация имеет место и в отношении функционально зависимой системы гладких функций.

Утверждение 1. *Если система $f^i(x^1, \ldots, x^m)$ $(i = 1, \ldots, n)$ гладких функций, определенных в окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbb{R}^m$, такова, что ранг матрицы*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}(x)$$

в любой точке $x \in U$ один и тот же и равен k, то

a) *при $k = n$ система функционально независима в окрестности x_0;*

b) *при $k < n$ найдутся окрестность точки x_0 и такие k функций системы, пусть $f^1, \ldots, f^k$, что остальные $n - k$ функций системы в этой окрестности представляются в виде*

$$f^i(x^1, \ldots, x^m) = g^i\left(f^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, f^k(x^1, \ldots, x^m)\right),$$

где $g^i(y^1, \ldots, y^k)$ — гладкие функции, определенные в окрестности точки $y_0 = \left(f^1(x_0), \ldots, f^n(x_0)\right)$ и зависящие только от k координат текущей точки $y = (y^1, \ldots, y^n)$.

◀ В самом деле, если $k = n$, то в силу замечания 1 к теореме о ранге при отображении

$$\begin{aligned} y^1 &= f^1(x^1, \ldots, x^m), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^n &= f^n(x^1, \ldots, x^m) \end{aligned} \tag{15}$$

образ окрестности рассматриваемой точки x_0 содержит целую окрестность точки $y_0 = f(x_0)$. Но тогда соотношение

$$F(f^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, f^n(x^1, \ldots, x^m)) \equiv 0$$

в окрестности x_0 возможно только при условии, что

$$F(y^1, \dots, y^n) \equiv 0$$

в окрестности точки y_0. Этим утверждение a) доказано.

Если же $k < n$ и ранг k отображения (15) реализуется уже на функциях $f^1, \dots, f^k$, то в силу замечания 2 к теореме о ранге найдется такая окрестность точки $y_0 = f(x_0)$ и $n - k$ определенных в ней функций $g^i(y) = g^i(y^1, \dots, y^k)$ $(i = k+1, \dots, n)$ того же порядка гладкости, как и функции системы, что в некоторой окрестности точки x_0 будут выполнены соотношения (14). Этим доказано утверждение b). ►

Мы показали, что если $k < n$, то найдутся $n - k$ специальных функций $F^i(y) = y^i - g^i(y^1, \dots, y^k)$ $(i = k+1, \dots, n)$, устанавливающих соотношения

$$F(f^1(x), \dots, f^k(x), f^i(x)) \equiv 0 \qquad (i = k+1, \dots, n)$$

между функциями системы $f^1, \dots, f^k, \dots, f^n$ в окрестности точки x_0.

4. Локальное разложение диффеоморфизма в композицию простейших. Здесь мы покажем, как, используя теорему об обратной функции, можно локально представить диффеоморфное отображение в виде композиции таких диффеоморфизмов, каждый из которых меняет только одну из координат.

Определение 3. Диффеоморфизм $g\colon U \to \mathbb{R}^m$ открытого множества $U \subset \mathbb{R}^m$ будем называть *простейшим*, если его координатное представление имеет вид

$$\begin{cases} y^i = x^i, & i \in \{1, \dots, m\}, \quad i \neq j, \\ y^j = g^j(x^1, \dots, x^m), \end{cases}$$

т. е. при диффеоморфизме $g\colon U \to \mathbb{R}^m$ меняется только одна из координат отображаемой точки.

Утверждение 2. *Если $f\colon G \to \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм открытого множества $G \subset \mathbb{R}^m$, то для любой точки $x_0 \in G$ найдется такая ее окрестность, в которой справедливо представление $f = g_1 \circ \ldots \circ g_n$, где $g_1, \dots, g_n$ — простейшие диффеоморфизмы.*

◀ Проверим это по индукции.

Если исходное отображение f само является простейшим, то для него утверждение тривиально справедливо.

Предположим, что утверждение справедливо для диффеоморфизмов, меняющих не более чем $(k-1)$ координату, где $k-1<n$.

Рассмотрим теперь диффеоморфизм $f\colon G\to\mathbb{R}^m$, меняющий k координат:

$$\begin{aligned} y^1 &= f^1(x^1,\dots,x^m),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\\ y^k &= f^k(x^1,\dots,x^m),\\ y^{k+1} &= x^{k+1},\\ &\dots\dots\\ y^m &= x^m. \end{aligned} \tag{16}$$

Мы приняли, что меняются именно первые k координат, чего можно достичь линейными преобразованиями. Значит, это не умаляет общности рассуждений.

Поскольку f — диффеоморфизм, то его матрица Якоби $f'(x)$ в любой точке $x\in G$ невырожденная, ибо

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \left[f'(x)\right]^{-1}.$$

Фиксируем $x_0\in G$ и вычислим определитель матрицы $f'(x_0)$:

$$\left|\begin{array}{ccc:ccc} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^k} & \frac{\partial f^1}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f^k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^k}{\partial x^k} & \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \frac{\partial f^k}{\partial x^m}\\ \hdashline & & & 1 & & 0\\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & 1 \end{array}\right|(x_0) = \left|\begin{array}{ccc} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^k}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f^k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^k}{\partial x^k} \end{array}\right|(x_0)\neq 0.$$

Таким образом, один из миноров порядка $k-1$ последнего определителя должен быть отличен от нуля. Опять для упрощения записи будем считать, что таким является главный минор порядка $k-1$. Рассмотрим тогда вспомогательное отображение $g\colon G \to \mathbb{R}^m$, определяемое равенствами

$$\begin{aligned} u^1 &= f^1(x^1, \dots, x^m), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u^{k-1} &= f^{k-1}(x^1, \dots, x^m), \\ u^k &= x^k, \\ &\dots\dots\dots \\ u^m &= x^m. \end{aligned} \tag{17}$$

Поскольку якобиан

$$\left|\begin{array}{ccc:ccc} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^{k-1}} & \frac{\partial f^1}{\partial x^k} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^{k-1}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^{k-1}}{\partial x^{k-1}} & \frac{\partial f^{k-1}}{\partial x^k} & \cdots & \frac{\partial f^{k-1}}{\partial x^m} \\ \hdashline & & & 1 & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & 1 \end{array}\right|(x_0) = \left|\begin{array}{ccc} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^{k-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^{k-1}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \end{array}\right|(x_0) \neq 0$$

отображения $g\colon G \to \mathbb{R}^m$ в точке $x_0 \in G$ отличен от нуля, отображение g является диффеоморфизмом в некоторой окрестности точки x_0.

Тогда в некоторой окрестности точки $u_0 = g(x_0)$ определено обратное к g отображение $x = g^{-1}(u)$, которое позволяет ввести в окрестности x_0 новые координаты $(u^1, \dots, u^m)$.

Пусть $h = f \circ g^{-1}$. Иными словами, отображение $y = h(u)$ есть наше отображение (16) $y = f(x)$, записанное в координатах u. Отображение h, как композиция диффеоморфизмов, является диффеоморфизмом некоторой окрестности точки u_0. Его координатная запись, очевидно, имеет вид

$$\begin{aligned} y^1 &= f^1 \circ g^{-1}(u) &&= u^1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{k-1} &= f^{k-1} \circ g^{-1}(u) &&= u^{k-1}, \\ y^k &= f^k \circ g^{-1}(u), \\ y^{k+1} &= u^{k+1}, \\ &\dots\dots\dots \\ y^m &= u^m, \end{aligned}$$

т. е. h — простейший диффеоморфизм.

Но $f = h \circ g$, а по предположению индукции отображение g, определенное формулами (17), раскладывается в композицию простейших диффеоморфизмов. Таким образом, диффеоморфизм f, меняющий k координат, в некоторой окрестности точки x_0 тоже раскладывается в композицию простейших диффеоморфизмов, что и завершает индукцию. ►

5. Лемма Морса. К рассматриваемому кругу идей принадлежит также красивая сама по себе и важная в приложениях лемма Морса[1)] о локальном приведении гладкой вещественнозначной функции к каноническому виду в окрестности невырожденной критической точки.

Определение 4. Пусть x_0 — критическая точка функции $f \in C^{(2)}(U;\mathbb{R})$, определенной в окрестности U этой точки.

Критическая точка x_0 называется *невырожденной критической точкой функции* f, если гессиан функции в этой точке (т. е. матрица $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)$, составленная из частных производных второго порядка) имеет отличный от нуля определитель.

Если x_0 — критическая точка функции, т. е. $f'(x_0) = 0$, то по формуле Тейлора

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2!}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + o\left(\|x - x_0\|^2\right). \quad (18)$$

Лемма Морса утверждает, что локально можно сделать такую замену $x = g(y)$ координат, что в координатах y функция f будет иметь вид

$$(f \circ g)(y) - f(x_0) = -(y^1)^2 - \ldots - (y^k)^2 + (y^{k+1})^2 + \ldots + (y^m)^2.$$

Если бы в правой части равенства (18) отсутствовал остаточный член $o\left(\|x - x_0\|^2\right)$, т. е. разность $f(x) - f(x_0)$ была бы просто квадратичной формой, то, как известно из алгебры, линейным преобразованием ее можно было бы привести к указанному каноническому виду. Таким образом, утверждение, которое мы собираемся доказать, есть локальный вариант теоремы о приведении квадратичной формы к каноническому

[1)] Х. К. М. Морс (1892 – 1977) — американский математик; основные труды посвящены применению топологических методов к различным разделам анализа.

виду. Доказательство его будет использовать идею доказательства этой алгебраической теоремы. Мы будем опираться также на теорему об обратной функции и следующее предложение.

Лемма Адамара. *Пусть $f\colon U\to\mathbb{R}$ — функция класса $C^{(p)}(U;\mathbb{R})$, $p\geqslant 1$, определенная в выпуклой окрестности U точки $0=(0,\dots,0)\in\mathbb{R}^m$ и такая, что $f(0)=0$. Тогда существуют функции $g_i\in C^{(p-1)}(U;\mathbb{R})$ $(i=1,\dots,m)$ такие, что в U имеет место равенство*

$$f(x^1,\dots,x^m)=\sum_{i=1}^{m}x^i g_i(x^1,\dots,x^m), \tag{19}$$

причем $g_i(0)=\dfrac{\partial f}{\partial x^i}(0)$.

◀ Равенство (19) — это, в сущности, иная полезная запись уже известной нам формулы Тейлора с интегральным видом остаточного члена. Оно вытекает из равенств

$$f(x^1,\dots,x^m)=\int\limits_0^1\frac{df(tx^1,\dots,tx^m)}{dt}\,dt=\sum_{i=1}^{m}x^i\int\limits_0^1\frac{\partial f}{\partial x^i}(tx^1,\dots,tx^m)\,dt,$$

если положить

$$g_i(x^1,\dots,x^m)=\int\limits_0^1\frac{\partial f}{\partial x^i}(tx^1,\dots,tx^m)\,dt\qquad(i=1,\dots,m).$$

То, что $g_i(0)=\dfrac{\partial f}{\partial x^i}(0)$ $(i=1,\dots,m)$, очевидно, а то, что $g_i\in C^{(p-1)}(U;\mathbb{R})$, тоже нетрудно проверить. Но мы не будем сейчас заниматься этой проверкой, поскольку в свое время будет доказано общее правило дифференцирования интеграла, зависящего от параметра, из которого нужное нам свойство функций g_i будет непосредственно вытекать.

Таким образом, с точностью до указанной проверки, формула Адамара (19) установлена. ▶

Лемма Морса. *Если $f\colon G\to\mathbb{R}$ — функция класса $C^{(3)}(G;\mathbb{R})$, определенная на открытом множестве $G\subset\mathbb{R}^m$, а $x_0\in G$ — невырожденная критическая точка этой функции, то найдется такой диффеоморфизм*

$g\colon V \to U$ некоторой окрестности начала координат 0 пространства $\mathbb{R}^m$ на окрестность U точки x_0, что для всех точек $y \in V$

$$(f \circ g)(y) = f(x_0) - \Big[(y^1)^2 + \ldots + (y^k)^2\Big] + \Big[(y^{k+1})^2 + \ldots + (y^m)^2\Big].$$

◀ Линейными заменами вопрос сводится к случаю, когда $x_0 = 0$ и $f(x_0) = 0$, что мы в дальнейшем и будем считать выполненным.

Поскольку $x_0 = 0$ — критическая точка функции f, то в формуле (19) $g_i(0) = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$. Тогда по той же лемме Адамара

$$g_i(x^1, \ldots, x^m) = \sum_{j=1}^{m} x^j h_{ij}(x^1, \ldots, x^m),$$

где h_{ij} — гладкие функции в окрестности точки 0, и, следовательно,

$$f(x^1, \ldots, x^m) = \sum_{i,j=1}^{m} x^i x^j h_{ij}(x^1, \ldots, x^m). \tag{20}$$

Подставляя здесь, если нужно, вместо h_{ij} функции $\tilde{h}_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$, можем считать, что $h_{ij} = h_{ji}$. Заметим также, что, в силу единственности тейлоровского разложения, из непрерывности функций h_{ij} следует, что $h_{ij}(0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(0)$ и, значит, матрица $(h_{ij}(0))$ невырожденная.

Теперь функция f записана подобно квадратичной форме и мы хотим, так сказать, привести ее к диагональному виду.

Как и в классическом случае, будем действовать по индукции.

Предположим, что существуют координаты $u^1, \ldots, u^m$ в окрестности U_1 точки $0 \in \mathbb{R}^m$, т. е. диффеоморфизм $x = \varphi(u)$ такой, что в координатах $u^1, \ldots, u^m$

$$(f \circ \varphi)(u) = \pm \left(u^1\right)^2 \pm \ldots \pm \left(u^{r-1}\right)^2 + \sum_{i,j=r}^{m} u^i u^j H_{ij}(u^1, \ldots, u^m), \tag{21}$$

где $r \geqslant 1$, а $H_{ij} = H_{ji}$.

Заметим, что при $r = 1$ соотношение (21) имеет место, что видно из формулы (20), где $H_{ij} = h_{ij}$.

По условию леммы, квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{m} x^i x^j h_{ij}(0)$ невырожденная, т. е. $\det(h_{ij}(0)) \neq 0$. Замена переменных $x = \varphi(u)$ осуществляется диффеоморфизмом, поэтому $\det \varphi'(0) \neq 0$. Но тогда и матрица формы $\pm(u^1)^2 \pm \ldots \pm (u^{r-1})^2 + \sum\limits_{i,j=r}^{m} u^i u^j H_{ij}(0)$, получаемая из матрицы $(h_{ij}(0))$ домножением справа на матрицу $\varphi'(0)$ и слева на транспонированную по отношению к $\varphi'(0)$ матрицу, тоже невырожденная. Следовательно, по крайней мере одно из чисел $H_{ij}(0)$ $(i, j = r, \ldots, m)$ отлично от нуля. Линейной заменой переменных форму $\sum\limits_{i,j=r}^{m} u^i u^j H_{ij}(0)$ можно привести к диагональному виду, поэтому можно считать, что в равенстве (21) $H_{rr}(0) \neq 0$. Ввиду непрерывности функций $H_{ij}(u)$ неравенство $H_{rr}(u) \neq 0$ будет выполнено также в некоторой окрестности точки $u = 0$.

Положим $\psi(u^1, \ldots, u^m) = \sqrt{|H_{rr}(u)|}$. Тогда функция ψ принадлежит классу $C^{(1)}(U_2; \mathbb{R})$ в некоторой окрестности $U_2 \subset U_1$ точки $u = 0$. Сделаем теперь переход к координатам $(v^1, \ldots, v^m)$ по формулам

$$\begin{aligned} &v^i = u^i, \qquad i \neq r, \\ &v^r = \psi(u^1, \ldots, u^m)\left(u^r + \sum_{i>r} \frac{u^i H_{ir}(u^1, \ldots, u^m)}{H_{rr}(u^1, \ldots, u^m)}\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Якобиан преобразования (22) в точке $u = 0$, очевидно, равен $\psi(0)$, т. е. отличен от нуля. Тогда в силу теоремы об обратной функции можно утверждать, что в некоторой окрестности $U_3 \subset U_2$ точки $u = 0$ отображение $v = \psi(u)$, заданное соотношениями (22), является диффеоморфизмом класса $C^{(1)}(U_3; \mathbb{R}^m)$ и потому переменные $(v^1, \ldots, v^m)$ действительно могут служить координатами точек U_3.

Выделим в правой части равенства (21) все члены

$$u^r u^r H_{rr}(u^1, \ldots, u^m) + 2 \sum_{j=r+1}^{m} u^r u^j H_{rj}(u^1, \ldots, u^m), \tag{23}$$

содержащие u^r. В записи (23) суммы этих членов мы использовали то, что $H_{ij} = H_{ji}$.

Сравнивая (22) и (23), видим, что выражение (23) можно переписать в виде

$$\pm\, v^r v^r - \frac{1}{H_{rr}} \left(\sum_{i>r} u^i H_{ir}(u^1, \ldots, u^m)\right)^2.$$

Знак $\pm$ перед $v^r v^r$ появляется в связи с тем, что $H_{rr} = \pm(\psi)^2$, причем берется знак плюс, если $H_{rr} > 0$, и знак минус, если $H_{rr} < 0$.

Таким образом, после замены $v = \psi(u)$ выражение (21) преобразуется в равенство

$$\left(f \circ \varphi \circ \psi^{-1}\right)(v) = \sum_{i=1}^{r} \left[\pm(v^i)^2\right] + \sum_{i,j>r} v^i v^j \widetilde{H}_{ij}(v^1, \ldots, v^m),$$

где $\widetilde{H}_{ij}$ — некоторые новые гладкие функции, симметричные по индексам i, j. Отображение $\varphi \circ \psi^{-1}$ является диффеоморфизмом. Таким образом, завершен индуктивный переход от $r-1$ к r и лемма Морса доказана. ►

Задачи и упражнения

1. Вычислите якобиан перехода (6) от полярных координат к декартовым координатам в $\mathbb{R}^m$.

2. a) Пусть x_0 — некритическая точка гладкой функции $F\colon U \to \mathbb{R}$, определенной в окрестности U точки $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^m) \in \mathbb{R}^m$. Покажите, что в некоторой окрестности $\widetilde{U} \subset U$ точки x_0 можно так ввести криволинейные координаты $(\xi^1, \ldots, \xi^m)$, что множество точек, выделяемое условием $F(x) = F(x_0)$, в этих новых координатах будет задаваться уравнением $\xi^m = 0$.

b) Пусть $\varphi, \psi \in C^{(k)}(D;\mathbb{R})$ и пусть в области D $(\varphi(x) = 0) \Rightarrow (\psi(x) = 0)$. Покажите, что если $\operatorname{grad}\varphi \neq 0$, то в D справедливо разложение $\psi = \theta \cdot \varphi$, где $\theta \in C^{(k-1)}(D;\mathbb{R})$.

3. Пусть $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — гладкое отображение, удовлетворяющее системе уравнений Коши – Римана

$$\frac{\partial f^1}{\partial x^1} = \frac{\partial f^2}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial f^1}{\partial x^2} = -\frac{\partial f^2}{\partial x^1}.$$

a) Покажите, что якобиан такого отображения равен нулю в некоторой точке тогда и только тогда, когда матрица $f'(x)$ в этой точке нулевая.

b) Покажите, что если $f'(x) \neq 0$, то в окрестности точки x определено обратное к f отображение f^{-1}, которое также удовлетворяет системе уравнений Коши – Римана.

4. *Зависимость функций* (прямое доказательство).

a) Покажите, что функции $\pi^i(x) = x^i$ $(i = 1, \ldots, m)$ как функции точки $x = (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m$ образуют независимую систему функций в окрестности любой точки пространства $\mathbb{R}^m$.

b) Покажите, что, какова бы ни была функция $f \in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, система $\pi^1, \ldots, \pi^m, f$ функционально зависима.

c) Если система гладких функций $f^1, \ldots, f^k$, $k < m$, такова, что ранг отображения $f = (f^1, \ldots, f^k)$ в точке $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^m) \in \mathbb{R}^m$ равен k, то в некоторой окрестности этой точки ее можно дополнить до независимой системы $f^1, \ldots, f^m$, состоящей из m гладких функций.

d) Если система

$$\xi^i = f^i(x^1, \ldots, x^m) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

гладких функций такова, что осуществляемое ею отображение $f = (f^1, \ldots, f^m)$ имеет в точке $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^m)$ ранг m, то переменные $(\xi^1, \ldots, \xi^m)$ могут служить криволинейными координатами в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и любая функция $\varphi\colon U(x_0) \to \mathbb{R}$ может быть записана в виде $\varphi(x) = F(f^1(x), \ldots, f^m(x))$, где $F = \varphi \circ f^{-1}$.

e) Ранг отображения, осуществляемого системой гладких функций, называют также *рангом* этой системы. Покажите, что если ранг системы гладких функций $f^i(x^1, \ldots, x^m)$ $(i = 1, \ldots, k)$ равен k и ранг системы $f^1, \ldots, f^m, \varphi$ тоже равен k в некоторой точке $x_0 \in \mathbb{R}^m$, то в окрестности этой точки $\varphi(x) = F(f^1(x), \ldots, f^k(x))$.

Указание. Используйте c), d) и покажите, что

$$F(f^1, \ldots, f^m) = F(f^1, \ldots, f^k).$$

5. Покажите, что ранг гладкого отображения $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ является функцией, полунепрерывной снизу, т. е. $\operatorname{rang} f(x) \geqslant \operatorname{rang} f(x_0)$ в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^m$.

6. a) Дайте прямое доказательство леммы Морса для функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Выясните, применима ли лемма Морса в начале координат к функциям

$$f(x) = x^3; \qquad f(x) = x \sin\frac{1}{x}; \qquad f(x) = e^{-1/x^2} \sin^2\frac{1}{x};$$
$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2; \qquad f(x, y) = x^2.$$

c) Покажите, что невырожденные критические точки функции $f \in C^{(3)}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ являются изолированными: каждая из них имеет такую окрестность, в которой нет других критических точек функции f, кроме самой этой точки.

d) Покажите, что число k отрицательных квадратов в каноническом представлении функции в окрестности невырожденной критической точки не зависит от способа приведения, т. е. от системы координат, в которой функция имеет канонический вид. Это число называется *индексом критической точки.*

§ 7. Поверхность в $\mathbb{R}^n$ и теория условного экстремума

Для неформального понимания важной в приложениях теории условного экстремума весьма полезно иметь некоторые начальные сведения о поверхностях (многообразиях) в пространстве $\mathbb{R}^n$.

1. Поверхность размерности k в $\mathbb{R}^n$. Обобщая понятие закона движения $x = x(t)$ материальной точки, мы в свое время ввели понятие пути в $\mathbb{R}^n$ как непрерывного отображения $\Gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ промежутка $I \subset \mathbb{R}$. Степень гладкости пути определялась как степень гладкости этого отображения. Носитель $\Gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ пути мог быть довольно причудливым множеством в $\mathbb{R}^n$, которое иногда только с очень большой натяжкой можно было бы назвать линией. Например, носитель пути мог оказаться просто точкой.

Аналогично, непрерывное или гладкое отображение $f\colon I^k \to \mathbb{R}^n$ k-мерного промежутка $I^k \subset \mathbb{R}^k$, называемое *k-путем в* $\mathbb{R}^n$, может иметь в качестве образа $f(I^k)$ совсем не то, что хотелось бы назвать k-мерной поверхностью в $\mathbb{R}^n$. Например, это снова может быть точка.

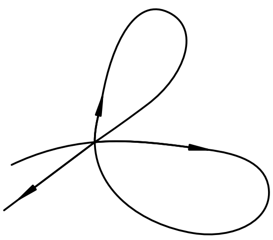


Рис. 61.

Чтобы гладкое отображение $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ области $G \subset \mathbb{R}^k$ определяло в $\mathbb{R}^n$ k-мерную геометрическую фигуру, точки которой описываются k независимыми параметрами $(t^1, \ldots, t^k) \in G$, достаточно, как мы знаем из предыдущего параграфа, потребовать, чтобы в каждой точке $t \in G$ ранг отображения $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ был равен k (разумеется, $k \leqslant n$). В этом случае отображение $f\colon G \to f(G)$ локально (т. е. в окрестности любой точки $t \in G$) является взаимно однозначным.

Действительно, пусть $\operatorname{rang} f(t_0) = k$ и он реализуется, например, на первых k из n функций

$$\left\{\begin{array}{l} x^1 = f^1(t^1, \ldots, t^k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n = f^n(t^1, \ldots, t^k), \end{array}\right. \tag{1}$$

задающих координатную запись отображения $f\colon G \to \mathbb{R}^n$.

Тогда по теореме об обратной функции переменные $t^1, \ldots, t^k$ в некоторой окрестности $U(t_0)$ точки t_0 можно выразить через переменные $x^1, \ldots, x^k$. Значит, множество $f(U(t_0))$ может быть записано в виде

$$x^{k+1} = \varphi^{k+1}(x^1, \ldots, x^k), \quad \ldots, \quad x^n = \varphi^n(x^1, \ldots, x^k)$$

(т. е. оно взаимно однозначно проектируется на координатную плоскость $x^1, \ldots, x^k$), и потому отображение $f\colon U(t_0) \to f(U(t_0))$ действительно взаимно однозначное.

Однако уже на примере одномерного гладкого пути (рис. 61) ясно, что подобная локальная взаимная однозначность отображения $f\colon G \to \to \mathbb{R}^n$ из области G параметров в пространство $\mathbb{R}^n$ вовсе не обязана быть взаимной однозначностью в целом. Траектория может иметь многократные самопересечения, поэтому если мы желаем определить гладкую k-мерную поверхность в $\mathbb{R}^n$ и видеть ее как множество, которое около каждой своей точки устроено как несколько деформированный кусок k-мерной плоскости (k-мерного подпространства пространства $\mathbb{R}^n$), то нам не достаточно регулярно отображать канонический кусок $G \subset \mathbb{R}^k$ k-мерной поверхности в пространство $\mathbb{R}^n$, но необходимо также следить за тем, как он в целом оказывается вложенным в это пространство.

Определение 1. Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ будем называть *k-мерной гладкой поверхностью* в пространстве $\mathbb{R}^n$ (или *k-мерным подмногообразием* $\mathbb{R}^n$), если для любой точки $x_0 \in S$ найдутся окрестность $U(x_0)$ в $\mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм $\varphi\colon U(x_0) \to I^n$ этой окрестности на стандартный n-мерный промежуток $I^n = \{t \in \mathbb{R}^n \mid |t^i| < 1,\ i = 1, \ldots, n\}$ пространства $\mathbb{R}^n$, при котором образ множества $S \cap U(x_0)$ совпадает с лежащей в I частью k-мерной плоскости пространства $\mathbb{R}^n$, задаваемой соотношениями $t^{k+1} = 0, \ldots, t^n = 0$ (рис. 62).

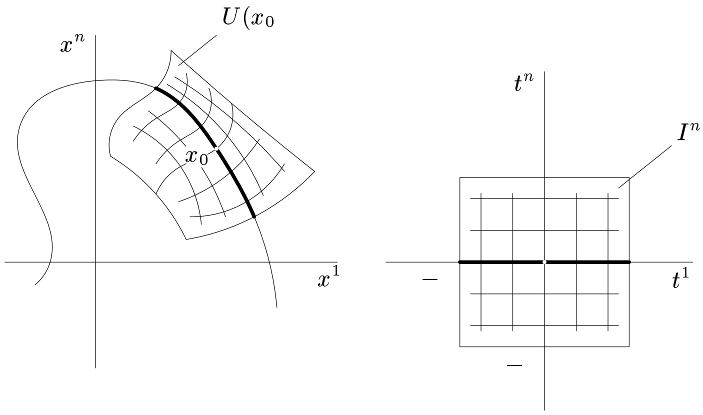


Рис. 62.

Степень гладкости поверхности S будем измерять степенью гладкости диффеоморфизма φ.

Если смотреть на переменные $t^1, \ldots, t^n$ как на новые координаты в окрестности $U(x_0)$, то определение 1 в сокращенном варианте можно переформулировать следующим образом: множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется k-мерной поверхностью (k-мерным подмногообразием) в $\mathbb{R}^n$, если для любой точки $x_0 \in S$ можно указать окрестность $U(x_0)$ и такие координаты $t^1, \dots, t^n$ в ней, что множество $S \cap U(x_0)$ в этих координатах задается соотношениями

$$t^{k+1} = \ldots = t^n = 0.$$

Роль стандартного промежутка в определении 1 чисто условная и примерно такая же, как роль стандартного размера или формы страницы в географическом атласе. Каноническое расположение промежутка в системе координат $t^1, \dots, t^n$ также относится к области стандартизации и не более того, поскольку любой куб в $\mathbb{R}^n$ дополнительным линейным диффеоморфизмом всегда можно преобразовать в стандартный n-мерный промежуток.

Этим замечанием мы часто будем пользоваться, сокращая проверку того, что некоторое множество $S \subset \mathbb{R}^n$ является поверхностью в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Само пространство $\mathbb{R}^n$ является n-мерной поверхностью класса $C^{(\infty)}$. В качестве отображения $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to I^n$ здесь можно взять, например, отображение

$$\xi^i = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x^i \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Пример 2. Построенное в примере 1 отображение заодно устанавливает, что подпространство векторного пространства $\mathbb{R}^n$, задаваемое условиями $x^{k+1} = \ldots = x^n = 0$, является k-мерной поверхностью в $\mathbb{R}^n$ (или k-мерным подмногообразием $\mathbb{R}^n$).

Пример 3. Множество в $\mathbb{R}^n$, задаваемое системой соотношений

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + \ldots + a_k^1 x^k + a_{k+1}^1 x^{k+1} + \ldots + a_n^1 x^n = 0, \\ \dotfill \\ a_1^{n-k} x^1 + \ldots + a_k^{n-k} x^k + a_{k+1}^{n-k} x^{k+1} + \ldots + a_n^{n-k} x^n = 0 \end{cases}$$

при условии, что ранг этой системы равен $n - k$, является k-мерным подмногообразием $\mathbb{R}^n$.

Действительно, пусть, например, определитель

$$\begin{vmatrix} a_{k+1}^1 & \ldots & a_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k+1}^{n-k} & \ldots & a_n^{n-k} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Тогда линейное преобразование

$$\begin{aligned}
t^1 &= x^1, \\
&\dots\dots\dots \\
t^k &= x^k, \\
t^{k+1} &= a_1^1 x^1 + \ldots + a_n^1 x^n, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
t^n &= a_1^{n-k} x^1 + \ldots + a_n^{n-k} x^n,
\end{aligned}$$

очевидно, является невырожденным. В координатах $t^1, \ldots, t^n$ наше множество задается условиями $t^{k+1} = \ldots = t^n = 0$, уже рассмотренными в примере 2.

Пример 4. График определенной в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ гладкой функции $x^n = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$ является гладкой $(n-1)$-мерной поверхностью в $\mathbb{R}^n$.

Действительно, полагая

$$\begin{cases} t^i &= x^i \qquad (i = 1, \ldots, n-1), \\ t^n &= x^n - f(x^1, \ldots, x^{n-1}), \end{cases}$$

мы получаем систему координат, в которой график нашей функции имеет уравнение $t^n = 0$.

Пример 5. Окружность $x^2 + y^2 = 1$ в $\mathbb{R}^2$ является одномерным подмногообразием в $\mathbb{R}^2$, что устанавливается разобранным в предыдущем параграфе локально обратимым переходом к полярным координатам (ρ, φ), в которых окружность имеет уравнение $\rho = 1$.

Пример 6. Этот пример является обобщением примера 3 и вместе с тем, как видно из определения 1, дает общую форму координатной записи подмногообразий пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть $F^i(x^1, \ldots, x^n)$ $(i = 1, \ldots, n-k)$ — система гладких функций ранга $n - k$. Покажем, что соотношения

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F^{n-k}(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

задают в $\mathbb{R}^n$ подмногообразие S размерности k.

Пусть в точке $x_0 \in S$ выполнено условие

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial F^1}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F^{n-k}}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial F^{n-k}}{\partial x^n} \end{vmatrix} (x_0) \neq 0. \tag{3}$$

Тогда преобразование

$$\begin{cases} t^i = x^i & (i = 1, \ldots, k), \\ t^i = F^{i-k}(x^1, \ldots, x^n) & (i = k+1, \ldots, n) \end{cases}$$

в силу теоремы об обратной функции является диффеоморфизмом некоторой окрестности рассматриваемой точки.

В новых координатах $t^1, \ldots, t^n$ исходная система будет иметь вид $t^{k+1} = \ldots = t^n = 0$; таким образом, S является k-мерной гладкой поверхностью в $\mathbb{R}^n$.

Пример 7. Множество E точек плоскости $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющих уравнению $x^2 - y^2 = 0$, состоит из двух прямых, пересекающихся в начале координат. Это множество не является одномерным подмногообразием $\mathbb{R}^2$ (проверьте!) именно из-за указанной точки пересечения.

Если удалить из E начало координат $0 \in \mathbb{R}^2$, то множество $E \setminus 0$ уже, очевидно, будет удовлетворять определению 1. Заметим, что множество $E \setminus 0$ несвязно. Оно состоит из четырех не имеющих общих точек лучей.

Таким образом, удовлетворяющая определению 1 k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$ может оказаться несвязным подмножеством, состоящим из некоторого числа связных компонент (и уже эти компоненты являются связными k-мерными поверхностями). Часто под поверхностью в $\mathbb{R}^n$ понимают именно связную k-мерную поверхность. Сейчас нас будут интересовать проблемы отыскания экстремумов функций, заданных на поверхностях. Это локальные проблемы, поэтому в них условие связности поверхности не проявляется.

Пример 8. Если гладкое отображение $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ области $G \subset \mathbb{R}^n$, задаваемое в координатном виде соотношениями (1), имеет в точке $t_0 \in G$ ранг k, то найдется такая окрестность $U(t_0) \subset G$ этой точки, образ $f(U(t_0)) \subset \mathbb{R}^n$ которой является гладкой поверхностью в $\mathbb{R}^n$.

Действительно, как уже отмечалось выше, в этом случае соотношения (1) могут быть в некоторой окрестности $U(t_0)$ точки $t_0 \in G$ заменены эквивалентной им системой соотношений

$$\begin{cases} x^{k+1} &= \varphi^{k+1}(x^1, \ldots, x^k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x^n &= \varphi^n(x^1, \ldots, x^k) \end{cases} \tag{4}$$

(для упрощения записи мы считаем, что уже система функций $f^1, \ldots, f^k$ имеет ранг k). Полагая

$$F^i(x^1, \ldots, x^n) = x^{k+i} - \varphi^{k+i}(x^1, \ldots, x^k) \qquad (i = 1, \ldots, n-k),$$

записываем систему (4) в виде (2). Поскольку соотношение (3) выполнено, то в силу примера 6 множество $f(U(t_0))$ действительно является k-мерной гладкой поверхностью в $\mathbb{R}^n$.

2. Касательное пространство. При рассмотрении закона движения $x = x(t)$ материальной частицы в $\mathbb{R}^3$, исходя из соотношения

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + o(t) \quad \text{при } t \to 0 \tag{5}$$

и считая, что точка $t = 0$ не является критической для отображения $\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^3$, т. е. $x'(0) \neq 0$, мы определили прямую, касательную к траектории в точке $x(0)$, как линейное подмножество в $\mathbb{R}^3$, задаваемое в параметрическом виде уравнением

$$x - x_0 = x'(0)t \tag{6}$$

или уравнением

$$x - x_0 = \xi \cdot t, \tag{7}$$

где $x_0 = x(0)$, а $\xi = x'(0)$ — направляющий вектор прямой.

В сущности, аналогичную вещь мы делали, определяя плоскость, касательную к графику функции $z = f(x, y)$ в $\mathbb{R}^3$. Действительно, дополнив соотношение $z = f(x, y)$ тривиальными равенствами $x = x$, $y = y$, мы получаем отображение $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$, касательным к которому в точке (x_0, y_0) является линейное отображение

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f'_x(x_0, y_0) & f'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Полагая здесь $t = (x-x_0, y-y_0)$, $x = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ и обозначая через $x'(0)$ указанную в (8) матрицу Якоби рассматриваемого отображения, замечаем, что ее ранг равен двум и что в этих обозначениях соотношение (8) имеет вид (6).

Особенность соотношения (8) состоит в том, что из трех равенств:

$$\begin{cases} x - x_0 = x - x_0, \\ y - y_0 = y - y_0, \\ z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \end{cases} \tag{9}$$

совокупности которых оно равносильно, только последнее нетривиально. Поэтому именно оно осталось у нас как уравнение, задающее плоскость, касательную к графику функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0).

Сделанное наблюдение можно использовать, чтобы теперь дать определение k-мерной плоскости, касательной к k-мерной гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$.

Из определения 1 поверхности видно, что в окрестности любой своей точки $x_0 \in S$ k-мерная поверхность S может быть задана параметрически, т. е. с помощью отображения $I^k \ni (t^1, \ldots, t^k) \mapsto (x^1, \ldots, x^n) \in$ $\in S$. В качестве такового может выступать ограничение отображения $\varphi^{-1}\colon I^n \to U(x_0)$ на k-мерную плоскость $t^{k+1} = \ldots = t^n = 0$ (см. рис. 62).

Поскольку φ^{-1} — диффеоморфизм, то якобиан отображения φ^{-1} : $I^n \to U(x_0)$ в любой точке куба I^n отличен от нуля. Но тогда ранг отображения $I^k \ni (t^1, \ldots, t^k) \mapsto (x^1, \ldots, x^n) \in S$, полученного ограничением φ^{-1} на указанную плоскость, должен быть равен k в любой точке куба I^k.

Полагая теперь $(t^1, \ldots, t^k) = t \in I^k$ и обозначая отображение $I^k \ni t \mapsto$ $\mapsto x \in S$ через $x = x(t)$, получаем локальное параметрическое представление поверхности S, обладающее свойством, выраженным равенством (5), на основании которого уравнение (6) принимаем в качестве уравнения касательного пространства или касательной плоскости к поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$ в точке $x_0 \in S$.

Итак, мы принимаем следующее

Определение 2. Если k-мерная поверхность $S \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leqslant k \leqslant n$, в окрестности точки $x_0 \in S$ задана параметрически с помощью гладкого отображения $(t^1, \ldots, t^k) = t \mapsto x = (x^1, \ldots, x^n)$ такого, что $x_0 = x(0)$ и матрица $x'(0)$ имеет ранг k, то k-мерная плоскость в $\mathbb{R}^n$, задаваемая параметрически матричным равенством (6), называется *касательной плоскостью* или *касательным пространством к поверхности S в точке $x_0 \in S$.*

В координатной записи равенству (6) соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x^1 - x_0^1 = \dfrac{\partial x^1}{\partial t^1}(0)t^1 + \ldots + \dfrac{\partial x^1}{\partial t^k}(0)t^k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n - x_0^n = \dfrac{\partial x^n}{\partial t^1}(0)t^1 + \ldots + \dfrac{\partial x^n}{\partial t^k}(0)t^k. \end{cases} \tag{10}$$

Пространство, касательное к поверхности S в точке $x \in S$, будем, как и прежде, обозначать[1)] символом TS_x.

Важным и полезным упражнением, которое читатель может проделать самостоятельно, является доказательство инвариантности определения касательного пространства и проверка того, что линейное отображение $t \mapsto x'(0)t$, касательное к отображению $t \mapsto x(t)$, задающему локально поверхность S, осуществляет отображение пространства $\mathbb{R}^k = T\mathbb{R}^k_0$ на плоскость $TS_{x(0)}$ (см. задачу 3 в конце параграфа).

Выясним теперь, как выглядит уравнение касательной плоскости к k-мерной поверхности S, заданной в $\mathbb{R}^n$ системой (2). Будем для определенности считать, что в окрестности рассматриваемой точки $x_0 \in S$ выполнено условие (3).

Полагая $(x^1, \ldots, x^k) = u$, $(x^{k+1}, \ldots, x^n) = v$, $(F^1, \ldots, F^{n-k}) = F$, запишем систему (2) в виде

$$F(u, v) = 0, \tag{11}$$

а условие (3) — в виде

$$\det F'_v(u, v) \neq 0. \tag{12}$$

В окрестности точки $(u_0, v_0) = (x_0^1, \ldots, x_0^k, x_0^{k+1}, \ldots, x_0^n)$ по теореме о неявной функции перейдем от соотношения (11) к эквивалентному ему соотношению

$$v = f(u), \tag{13}$$

[1)] Это — небольшое отклонение от наиболее распространенного обозначения T_xS или $T_x(S)$.

дополняя которое тождеством $u = u$, получаем параметрическое представление поверхности S в окрестности точки $x_0 \in S$:

$$\begin{cases} u = u, \\ v = f(u). \end{cases} \tag{14}$$

На основании определения 2, из (14) получаем параметрическое уравнение

$$\begin{cases} u - u_0 = E \cdot t, \\ v - v_0 = f'(u_0) \cdot t \end{cases} \tag{15}$$

касательной плоскости; здесь E — единичная матрица, а $t = u - u_0$.

Подобно тому, как это было в случае системы (9), в системе (15) оставляем только нетривиальное уравнение

$$v - v_0 = f'(u_0)(u - u_0), \tag{16}$$

которое и содержит в себе связи переменных $x^1, \ldots, x^k$ с переменными $x^{k+1}, \ldots, x^n$, выделяющие касательное пространство.

Пользуясь тем, что по теореме о неявной функции

$$f'(u_0) = -\left[F'_v(u_0, v_0)\right]^{-1}\left[F'_u(u_0, v_0)\right],$$

перепишем (16) в виде

$$F'_u(u_0, v_0)(u - u_0) + F'_v(u_0, v_0)(v - v_0) = 0,$$

откуда после возвращения к переменным $(x^1, \ldots, x^n) = x$ получаем искомое уравнение

$$F'_x(x_0)(x - x_0) = 0 \tag{17}$$

касательного пространства $TS_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$.

В координатном представлении уравнение (17) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F^1}{\partial x^1}(x_0)(x^1 - x_0^1) + \ldots + \dfrac{\partial F^1}{\partial x^n}(x_0)(x^n - x_0^n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial F^{n-k}}{\partial x^1}(x_0)(x^1 - x_0^1) + \ldots + \dfrac{\partial F^{n-k}}{\partial x^n}(x_0)(x^n - x_0^n) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Ранг этой системы по условию равен $n-k$, поэтому она задает k-мерную плоскость в $\mathbb{R}^n$.

Аффинное уравнение (17) эквивалентно (если указана точка x_0) векторному уравнению
$$F'_x(x_0) \cdot \xi = 0, \tag{19}$$
в котором $\xi = x - x_0$.

Значит, вектор ξ лежит в плоскости TS_{x_0}, касательной в точке $x_0 \in S$ к поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$, заданной уравнением $F(x) = 0$, в том и только в том случае, когда он удовлетворяет условию (19). Таким образом, TS_{x_0} можно рассматривать как векторное пространство векторов ξ, удовлетворяющих уравнению (19).

Именно с этим обстоятельством и связан сам термин *касательное пространство.*

Докажем теперь следующее, уже встречавшееся нам в его частном случае (см. § 4, п. 6)

Утверждение. *Пространство TS_{x_0}, касательное к гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$ в точке $x_0 \in S$, состоит из векторов, касательных в точке x_0 к гладким кривым, лежащим на поверхности S и проходящим через точку x_0.*

◀ Пусть поверхность S в окрестности точки $x_0 \in S$ задана в виде системы уравнений (2), которую мы коротко запишем как
$$F(x) = 0, \tag{20}$$
где $F = (F^1, \ldots, F^{n-k})$, $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Пусть $\Gamma\colon I \to S$ — произвольный гладкий путь с носителем на S. Взяв $I = \{t \in \mathbb{R} \mid |t| < 1\}$, будем считать, что $x(0) = x_0$. Поскольку $x(t) \in S$ при $t \in I$, то после подстановки $x(t)$ в уравнение (20) получаем
$$F(x(t)) \equiv 0 \tag{21}$$
при $t \in I$. Дифференцируя это тождество по t, находим, что
$$F'_x(x(t)) \cdot x'(t) \equiv 0.$$

В частности, при $t = 0$, полагая $\xi = x'(0)$, получаем
$$F'_x(x_0)\xi = 0,$$
т. е. вектор ξ, касательный к траектории в точке x_0 (в момент $t = 0$), удовлетворяет уравнению (19) касательного пространства TS_{x_0}.

Покажем теперь, что для любого вектора ξ, удовлетворяющего уравнению (19), найдется гладкий путь $\Gamma\colon I \to S$, который задает кривую на поверхности S, проходит при $t = 0$ через точку x_0 и имеет вектор ξ своим вектором скорости в момент $t = 0$.

Этим заодно будет установлено само существование гладких кривых, проходящих на S через точку x_0, которое мы неявно предполагали в уже проведенной первой части доказательства утверждения.

Пусть для определенности выполнено условие (3). Тогда, зная первые k координат $\xi^1, \ldots, \xi^k$ вектора $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^k, \xi^{k+1}, \ldots, \xi^n)$, мы из уравнения (19) (равносильного системе (18)) однозначно определим остальные его координаты $\xi^{k+1}, \ldots, \xi^n$. Таким образом, если для некоторого вектора $\tilde{\xi} = (\xi^1, \ldots, \xi^k, \tilde{\xi}^{k+1}, \ldots, \tilde{\xi}^n)$ будет установлено, что он удовлетворяет уравнению (19), то можно заключить, что $\tilde{\xi} = \xi$. Воспользуемся этим.

Вновь, как это было сделано выше, введем для удобства обозначения $u = (x^1, \ldots, x^k)$, $v = (x^{k+1}, \ldots, x^n)$, $x = (x^1, \ldots, x^n) = (u, v)$, $F(x) = F(u, v)$. Тогда уравнение (20) будет иметь вид (11), а условие (3) — вид (12). В подпространстве $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ переменных $x^1, \ldots, x^k$ возьмем параметрически заданную прямую

$$\begin{cases} x^1 - x_0^1 = \xi^1 t, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^k - x_0^k = \xi^k t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

с направляющим вектором $(\xi^1, \ldots, \xi^k)$, который мы обозначим через ξ_u. В более коротких обозначениях эта прямая может быть записана в виде

$$u = u_0 + \xi_u t. \tag{22}$$

Решая уравнение (11) относительно v, в силу теоремы о неявной функции получим гладкую функцию (13), подставляя в аргумент которой правую часть равенства (22), с учетом самого равенства (22), получим гладкую кривую в $\mathbb{R}^n$, заданную в следующем виде:

$$\begin{cases} u = u_0 + \xi_u t, \\ v = f(u_0 + \xi_u t), \end{cases} \qquad t \in U(0) \subset \mathbb{R}. \tag{23}$$

Поскольку $F(u, f(u)) \equiv 0$, то, очевидно, эта кривая лежит на поверхности S. Кроме того, из равенств (23) видно, что при $t = 0$ кривая проходит через точку $(u_0, v_0) = (x_0^1, \ldots, x_0^k, x_0^{k+1}, \ldots, x_0^n) = x_0 \in S$.

Дифференцируя по t тождество

$$F(u(t), v(t)) = F(u_0 + \xi_u t, f(u_0 + \xi_u t)) \equiv 0,$$

при $t = 0$ получаем

$$F'_u(u_0, v_0)\xi_u + F'_v(u_0, v_0)\tilde{\xi}_v = 0,$$

где $\tilde{\xi}_v = v'(0) = (\tilde{\xi}^{k+1}, \dots, \tilde{\xi}^n)$. Это равенство показывает, что вектор $\tilde{\xi} = (\xi_u, \tilde{\xi}_v) = (\xi^1, \dots, \xi^k, \tilde{\xi}^{k+1}, \dots, \tilde{\xi}^n)$ удовлетворяет уравнению (19). Таким образом, в силу сделанного выше замечания заключаем, что $\xi = \tilde{\xi}$. Но вектор $\tilde{\xi}$ является вектором скорости при $t = 0$ для траектории (23). Тем самым высказанное утверждение доказано полностью. ▶

3. Условный экстремум

a. Постановка вопроса. Одним из наиболее ярких и популярных достижений дифференциального исчисления являются предлагаемые им рецепты отыскания экстремумов функций. Необходимые условия и достаточные дифференциальные признаки экстремума, которые мы получили из формулы Тейлора, относятся, как уже отмечалось, к внутренним экстремумам.

Иными словами, эти результаты применимы только к исследованию поведения функции $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ тогда, когда аргумент x может принимать любое значение из некоторой окрестности в $\mathbb{R}^n$ точки x_0.

Часто возникает более сложная и с практической точки зрения даже более интересная ситуация, когда ищется экстремум функции при некоторых условиях, ограничивающих область изменения аргумента. Типичным примером может служить изопериметрическая задача, когда ищется тело, имеющее максимальный объем при условии, что ограничивающая его поверхность имеет заданную площадь. Чтобы получить доступную нам математическую запись такой задачи, упростим постановку и будем считать, что задача состоит в том, чтобы среди прямоугольников, имеющих заданный периметр $2p$, найти тот, который имеет наибольшую площадь σ. Обозначив через x и y длины сторон прямоугольника, запишем, что

$$\sigma(x, y) = x \cdot y,$$
$$x + y = p.$$

Итак, надо найти экстремум функции $\sigma(x, y)$ при условии, что переменные x, y связаны соотношением $x+y=p$. Таким образом, экстремум функции ищется только на множестве тех точек плоскости $\mathbb{R}^2$, которые удовлетворяют указанному соотношению. Эта конкретная задача, конечно, решается без труда: достаточно, записав, что $y = p - x$, подставить это выражение в формулу для $\sigma(x, y)$ и найти обычными методами максимум функции $x(p-x)$. Она нам была нужна лишь для пояснения самой постановки вопроса.

В общем случае задача на условный экстремум обычно состоит в том, чтобы найти экстремум вещественнозначной функции

$$y = f(x^1, \ldots, x^n) \tag{24}$$

от n переменных при условии, что эти переменные удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^m(x^1, \ldots, x^n) = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Поскольку мы собираемся получать дифференциальные условия экстремума, мы будем предполагать, что все рассматриваемые функции дифференцируемы и даже непрерывно дифференцируемы. Если ранг системы функций $F^1, \ldots, F^m$ равен $n-k$, то условия (25) задают в $\mathbb{R}^n$ некоторую k-мерную гладкую поверхность S и с геометрической точки зрения задача на условный экстремум состоит в отыскании экстремума функции f на поверхности S. Более точно, рассматривается ограничение $f|_S$ функции f на поверхность S и ищется экстремум функции $f|_S$.

Смысл самого понятия точки локального экстремума при этом, конечно, остается прежним, т. е. точка $x_0 \in S$ считается точкой локального экстремума функции f на S или, короче, функции $f|_S$, если найдется такая окрестность $U_S(x_0)$ точки x_0 в множестве[1)] $S \subset \mathbb{R}^n$, что для любой точки $x \in U_S(x_0)$ выполнено неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$ (тогда x_0 — точка локального минимума) или $f(x) \leqslant f(x_0)$ (тогда x_0 — точка локального максимума). Если при $x \in U_S(x_0) \setminus x_0$ указанные неравенства являются строгими, то экстремум, как и прежде, будем называть строгим.

b. Необходимый признак условного экстремума

[1)] Напомним, что $U_S(x_0) = S \cap U(x_0)$, где $U(x_0)$ — окрестность точки x_0 в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Пусть* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *— функция, определенная на открытом множестве* $D \subset \mathbb{R}^n$ *и принадлежащая классу* $C^{(1)}(D;\mathbb{R})$. *Пусть* S *— гладкая поверхность в* D.

Для того чтобы точка $x_0 \in S$, *некритическая для функции* f, *была точкой локального экстремума функции* $f|_S$, *необходимо выполнение условия*

$$\boxed{TS_{x_0} \subset TN_{x_0},} \tag{26}$$

где TS_{x_0} *— пространство, касательное к поверхности* S *в точке* x_0, *а* TN_{x_0} *— пространство, касательное к поверхности* $N = \{x \in D \mid f(x) = f(x_0)\}$ *уровня функции* f, *которому принадлежит* x_0.

Заметим прежде всего, что требование, чтобы точка x_0 была некритической для функции f, в контексте обсуждаемой задачи отыскания условного экстремума не является существенным ограничением. Действительно, если уж точка $x_0 \in D$ является критической точкой функции $f\colon D \to \mathbb{R}$ или точкой экстремума этой функции, то ясно, что она будет подозрительной точкой или соответственно точкой экстремума и для функции $f|_S$. Таким образом, новый элемент в рассматриваемой задаче состоит именно в том, что функция $f|_S$ может иметь критические точки и экстремумы, отличные от критических точек и экстремумов функции f.

◀ Возьмем произвольный вектор $\xi \in TS_{x_0}$ и такой гладкий путь $x = x(t)$ на S, который проходит через точку x_0 при $t = 0$ и для которого вектор ξ является вектором скорости при $t = 0$, т. е.

$$\frac{dx}{dt}(0) = \xi. \tag{27}$$

Если x_0 — точка экстремума функции $f|_S$, то гладкая функция $f(x(t))$ должна при $t = 0$ иметь экстремум. По необходимому условию экстремума ее производная при $t = 0$ должна обращаться в нуль, т. е. должно выполняться условие

$$f'(x_0) \cdot \xi = 0, \tag{28}$$

где

$$f'(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)(x_0), \qquad \xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n).$$

Поскольку x_0 — некритическая точка функции f, условие (28) равносильно тому, что $\xi \in TN_{x_0}$, ибо именно соотношение (28) является уравнением касательного пространства TN_{x_0}.

Таким образом, доказано, что $TS_{x_0} \subset TN_{x_0}$. ▶

Если поверхность S в окрестности точки x_0 задана системой уравнений (25), то пространство TS_{x_0}, как нам известно, задается системой линейных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F^1}{\partial x^1}(x_0)\xi^1 + \ldots + \dfrac{\partial F^1}{\partial x^n}(x_0)\xi^n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial F^m}{\partial x^1}(x_0)\xi^1 + \ldots + \dfrac{\partial F^m}{\partial x^n}(x_0)\xi^n = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Пространство TN_{x_0} задается уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)\xi^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)\xi^n = 0, \tag{30}$$

и, поскольку всякое решение системы (29) является решением уравнения (30), последнее уравнение является следствием системы (29).

Из этих соображений вытекает, что соотношение $TS_{x_0} \subset TN_{x_0}$ в аналитической записи равносильно тому, что вектор $\operatorname{grad} f(x_0)$ является линейной комбинацией векторов $\operatorname{grad} F^i(x_0)$ $(i = 1, \ldots, m)$, т. е.

$$\boxed{\operatorname{grad} f(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad} F^i(x_0).} \tag{31}$$

Учитывая эту форму записи необходимого признака экстремума функции (24), переменные которой связаны соотношениями (25), Лагранж предложил при отыскании условного экстремума использовать следующую вспомогательную функцию:

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F^i(x) \tag{32}$$

от $n + m$ переменных $(x, \lambda) = (x^1, \ldots, x^n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$.

Эту функцию называют *функцией Лагранжа*, а метод ее использования — *методом множителей Лагранжа.*

Функция (32) удобна тем, что необходимые условия ее экстремума как функции переменных $(x, \lambda) = (x^1, \dots, x^n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ в точности совпадают с условиями (31) и (25).

Действительно,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x^j}(x, \lambda) = \dfrac{\partial f}{\partial x^j}(x) - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial F^i}{\partial x^j}(x) = 0 & (j = 1, \dots, n), \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x, \lambda) = -F^i(x) = 0 & (i = 1, \dots, m). \end{cases} \tag{33}$$

Таким образом, при отыскании экстремума функции (24), переменные которой подчинены связям (25), можно написать с неопределенными множителями функцию Лагранжа (32) и искать уже ее критические точки. Если есть возможность из системы (33) найти $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$, не находя $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, то с точки зрения исходной задачи именно это и следует делать.

Как видно из соотношения (31), множители λ_i $(i = 1, \dots, m)$ определяются однозначно, если только векторы $\operatorname{grad} F^i(x_0)$ $(i = 1, \dots, m)$ линейно независимы. Независимость этих векторов равносильна тому, что ранг системы (29) равен m, т. е. что все уравнения этой системы существенны (ни одно из них не является следствием остальных).

Это обычно выполнено, ибо считается, что все соотношения (25) независимы и ранг системы функций $F^1, \dots, F^m$ в любой точке $x \in S$ равен m.

Функцию Лагранжа часто записывают в виде

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F^i(x),$$

который отличается от прежнего только несущественной заменой λ_i на $-\lambda_i$.[1)]

Пример 9. Найдем экстремумы симметрической квадратичной формы

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^i x^j \qquad (a_{ij} = a_{ji}) \tag{34}$$

[1)]По поводу необходимого признака условного экстремума см. также задачу 6 к § 7 гл. X (часть II).

на сфере

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(x^i\right)^2 - 1 = 0. \tag{35}$$

Запишем функцию Лагранжа данной задачи:

$$L(x, \lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^i x^j - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x^i\right)^2 - 1 \right)$$

и, с учетом того, что $a_{ij} = a_{ji}$, необходимые условия экстремума функции $L(x, \lambda)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x^i}(x, \lambda) = 2 \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^j - \lambda x^i \right) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x, \lambda) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(x^i\right)^2 - 1 \right) = 0. \end{cases} \tag{36}$$

Домножая первое уравнение на x^i и суммируя затем все первые соотношения, с учетом второго уравнения получим, что в точке экстремума должно быть выполнено равенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^i x^j - \lambda = 0. \tag{37}$$

Систему (36) без последнего уравнения можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x^j = \lambda x^i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{38}$$

откуда следует, что λ — собственное значение линейного преобразования A, задаваемого матрицей (a_{ij}), а $x = (x^1, \ldots, x^n)$ — собственный вектор этого преобразования, отвечающий этому собственному значению.

Поскольку непрерывная на компакте $S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n | \sum\limits_{i=1}^{n} \left(x^i\right)^2 = 1 \right\}$ функция (34) обязана принимать в некоторой его точке максимальное значение, система (36), а значит и система (38), должна иметь решение.

Таким образом, мы попутно установили, что любая вещественная симметрическая матрица (a_{ij}) имеет по крайней мере одно вещественное собственное значение. Это хорошо известный вам из линейной алгебры результат, являющийся основным в доказательстве существования базиса из собственных векторов симметрического оператора.

Чтобы указать геометрический смысл собственного значения λ, заметим, что если $\lambda > 0$, то, переходя к координатам $t^i = x^i/\sqrt{\lambda}$, вместо (37) получим

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t^i t^j = 1, \tag{39}$$

а вместо (35) —

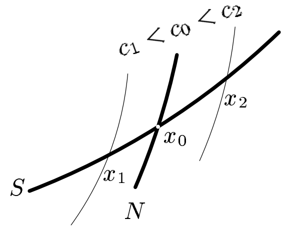
$$\sum_{i=1}^{n} \left(t^i\right)^2 = \frac{1}{\lambda}. \tag{40}$$

Но $\sum\limits_{i=1}^{n} (t^i)^2$ есть квадрат расстояния от точки $t = (t^1, \ldots, t^n)$ квадрики (39) до начала координат. Таким образом, если, например, соотношение (39) задает эллипсоид, то величина $1/\lambda$, обратная к собственному значению λ, является квадратом величины одной из его полуосей.

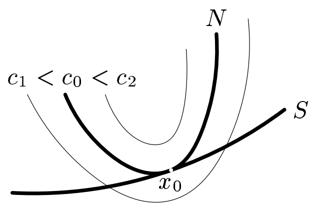
Это полезное наблюдение. Оно, в частности, показывает, что соотношения (36), необходимые для условного экстремума, еще не являются достаточными: ведь, например, в $\mathbb{R}^3$ эллипсоид кроме наибольшей и наименьшей полуосей может иметь промежуточную по величине полуось, в любой окрестности конца которой есть как точки более близкие к началу координат, так и более далекие от него в сравнении с расстоянием от конца полуоси до начала координат. Последнее становится совсем очевидным, если рассмотреть эллипсы, получающиеся в сечении исходного эллипсоида двумя плоскостями, проходящими через промежуточную полуось и меньшую или большую полуоси эллипсоида соответственно. В одном из этих случаев промежуточная полуось будет большей из двух полуосей эллипса сечения, а в другом случае — меньшей полуосью.

К сказанному следует добавить, что если $1/\sqrt{\lambda}$ есть величина этой промежуточной полуоси, то, как видно из канонического уравнения эллипсоида, величина λ, очевидно, будет собственным значением преобразования A, поэтому система (36), выражающая необходимые условия экстремума функции $f|_S$, действительно будет иметь решение, не дающее экстремума этой функции.

Полученный в теореме 1 результат (необходимый признак условного экстремума) проиллюстрирован на рис. 63, a, b.



a.



b.

Рис. 63.

Первый из этих рисунков поясняет, почему точка x_0 поверхности S не может быть точкой экстремума функции $f|_S$, если S не касается поверхности $N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = f(x_0) = c_0\}$ в точке x_0. При этом предполагается, что $\operatorname{grad} f(x_0) \neq 0$. Последнее условие гарантирует то, что в окрестности точки x_0 имеются точки как более высокого c_2-уровня функции f, так и точки более низкого c_1-уровня этой функции.

Поскольку гладкая поверхность S пересекает поверхность N, т. е. c_0-уровень гладкой функции f, то S будет пересекать как более высокие, так и более низкие уровни функции f в окрестности точки x_0. Но это и означает, что x_0 не может быть точкой экстремума функции $f|_S$.

Второй рисунок показывает, почему при касании N и S в точке x_0 эта точка может оказаться точкой экстремума. На рисунке x_0 — точка локального максимума функции $f|_S$.

Эти же соображения позволяют нарисовать картинку, аналитическая запись которой может показать, что необходимый признак условного экстремума не является достаточным.

Действительно, в соответствии с рис. 64 положим, например,

$$f(x, y) = y, \qquad F(x, y) = x^3 - y = 0.$$

Тогда очевидно, что на кривой $S \subset \mathbb{R}^2$, заданной уравнением $y = x^3$, величина y не имеет экстремума в точке $(0, 0)$, хотя эта кривая касается линии уровня $f(x, y) = 0$ функции f в этой точке. Заметим, что $\operatorname{grad} f(0, 0) = (0, 1) \neq 0$.

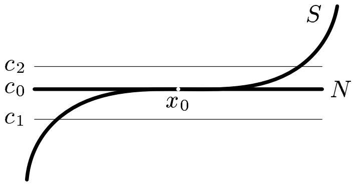


Рис. 64.

Очевидно, это по существу тот же пример, который нам в свое время служил для иллюстрации различия между необходимым и достаточным условиями классического внутреннего экстремума функции.

c. Достаточный признак условного экстремума. Докажем теперь следующий достаточный признак наличия или отсутствия условного экстремума.

Теорема 2. *Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ и принадлежащая классу $C^{(2)}(D;\mathbb{R})$; S — поверхность в D, заданная системой уравнений (25), где $F^i \in C^{(2)}(D;\mathbb{R})$ $(i = 1, \ldots, m)$ и ранг системы функций $\{F^1, \ldots, F^m\}$ в любой точке области D равен m.*

Пусть в функции Лагранжа

$$L(x) = L(x;\lambda) = f(x^1, \ldots, x^n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F^i(x^1, \ldots, x^n)$$

параметры $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ выбраны в соответствии с необходимым признаком (31) условного экстремума функции $f|_S$ в точке $x_0 \in S$.[1)]

Для того чтобы при этом точка x_0 была точкой экстремума функции $f|_S$, достаточно, чтобы квадратичная форма

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)\xi^i \xi^j \tag{41}$$

была знакоопределенной для векторов $\xi \in TS_{x_0}$.

Если форма (41) положительно определена на TS_{x_0}, то x_0 — точка строгого локального минимума функции $f|_S$; если форма (41) отрицательно определена на TS_{x_0}, то x_0 — точка строгого локального максимума функции $f|_S$.

Для того чтобы точка x_0 не была точкой экстремума функции $f|_S$, достаточно, чтобы форма (41) принимала на TS_{x_0} значения разных знаков.

◀ Отметим прежде всего, что $L(x) \equiv f(x)$ для $x \in S$, поэтому, показав, что точка $x_0 \in S$ является точкой экстремума функции $L|_S$, мы одновременно покажем, что она является точкой экстремума функции $f|_S$.

[1)] Фиксировав λ, мы получаем из $L(x;\lambda)$ функцию, зависящую только от x; мы позволили себе обозначать ее через $L(x)$.

По условию необходимый признак (31) экстремума функции $f|_S$ в точке $x_0 \in S$ выполнен, поэтому в этой точке $\operatorname{grad} L(x_0) = 0$. Значит, тейлоровское разложение функции $L(x)$ в окрестности точки $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ имеет вид

$$L(x) - L(x_0) = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)\left(x^i - x_0^i\right)\left(x^j - x_0^j\right) + o\left(\|x - x_0\|^2\right) \quad (42)$$

при $x \to x_0$.

Напомним теперь, что, мотивируя определение 2, мы отметили возможность локального (например, в окрестности точки $x_0 \in S$) параметрического задания гладкой k-мерной поверхности S (в нашем случае $k = n - m$).

Иными словами, существует гладкое отображение

$$\mathbb{R} \ni (t^1, \dots, t^k) = t \mapsto x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$$

(мы будем его, как и прежде, записывать в виде $x = x(t)$), при котором окрестность точки $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k$ биективно преобразуется в некоторую окрестность точки x_0 на поверхности S, причем $x_0 = x(0)$.

Заметим, что соотношение

$$x(t) - x(0) = x'(0)t + (\|t\|) \quad \text{при} \ \ t \to 0,$$

выражающее дифференцируемость отображения $t \mapsto x(t)$ в точке $t = 0$, равносильно n координатным равенствам

$$x^i(t) - x^i(0) = \frac{\partial x^i}{\partial t^\alpha}(0)t^\alpha + o\left(\|t\|\right) \qquad (i = 1, \dots, n), \quad (43)$$

в которых индекс α пробегает целые значения от 1 до k и по нему происходит суммирование.

Из этих числовых равенств следует, что

$$|x^i(t) - x^i(0)| = O\left(\|t\|\right) \quad \text{при} \ \ t \to 0$$

и, значит,

$$\|x(t) - x(0)\|_{\mathbb{R}^n} = O\left(\|t\|_{\mathbb{R}^k}\right) \quad \text{при} \ \ t \to 0. \quad (44)$$

Используя соотношения (43), (44), из равенства (42) получаем, что при $t \to 0$

$$L(x(t)) - L(x(0)) = \frac{1}{2!}\partial_{ij}L(x_0)\partial_\alpha x^i(0)\partial_\beta x^j(0)t^\alpha t^\beta + o\left(\|t\|^2\right). \quad (42')$$

Отсюда при условии знакоопределенности формы

$$\partial_{ij}L(x_0)\partial_\alpha x^i(0)\partial_\beta x^j(0)t^\alpha t^\beta \tag{45}$$

следует, что функция $L(x(t))$ имеет при $t = 0$ экстремум. Если же форма (45) принимает значения разных знаков, то $L(x(t))$ при $t = 0$ экстремума не имеет. Но, поскольку при отображении $t \mapsto x(t)$ некоторая окрестность точки $0 \in \mathbb{R}^k$ преобразуется в окрестность точки $x(0) = x_0 \in S$ на поверхности S, можно заключить, что тогда и функция $L|_S$ в точке x_0 либо будет иметь экстремум, причем того же характера, что и функция $L(x(t))$, либо, как и $L(x(t))$, не будет иметь экстремума.

Итак, остается проверить, что для векторов $\xi \in TS_{x_0}$ выражения (41) и (45) просто являются разными записями одного и того же объекта.

Действительно, полагая

$$\xi = x'(0)t,$$

мы получаем вектор ξ, касательный к S в точке x_0, и если $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$, $x(t) = (x^1, \dots, x^n)(t)$, $t = (t^1, \dots, t^k)$, то

$$\xi^j = \partial_\beta x^j(0)\, t^\beta \qquad (j = 1, \dots, n),$$

откуда и следует совпадение величин (41), (45). ►

Отметим, что практическое использование теоремы 2 затруднено тем, что среди координат вектора $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in TS_{x_0}$ только $k = n - m$ независимых, поскольку координаты вектора ξ должны удовлетворять системе (29), определяющей пространство TS_{x_0}. Таким образом, непосредственное применение к форме (41) критерия Сильвестра в нашем случае, вообще говоря, ничего не дает: форма (41) может не быть определенной на $T\mathbb{R}^n_{x_0}$, но оказаться определенной на TS_{x_0}. Если же из соотношений (29) выразить m координат вектора ξ через остальные k координат и полученные линейные формы подставить в (41), то мы придем к квадратичной форме относительно k переменных, определенность которой уже можно исследовать с помощью критерия Сильвестра.

Поясним сказанное простейшими примерами.

Пример 10. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами x, y, z задана функция

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2.$$

Ищется экстремум этой функции на плоскости S, заданной уравнением

$$F(x, y, z) = 2x - y - 3 = 0.$$

Записав функцию Лагранжа

$$L(x, y, z) = \left(x^2 - y^2 + z^2\right) - \lambda(2x - y - 3)$$

и необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -2y + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -(2x - y - 3) = 0, \end{cases}$$

находим подозрительную точку $p = (2, 1, 0)$.

Далее находим форму (41):

$$\frac{1}{2}\partial_{ij} L \xi^i \xi^j = \left(\xi^1\right)^2 - \left(\xi^2\right)^2 + \left(\xi^3\right)^2. \tag{46}$$

Отметим, что в данном случае параметр λ не вошел в эту квадратичную форму, поэтому мы его и не вычисляли.

Записываем теперь условие $\xi \in TS_p$:

$$2\xi^1 - \xi^2 = 0. \tag{47}$$

Из этого равенства находим $\xi^2 = 2\xi^1$ и подставляем в форму (46), после чего она приобретает вид

$$-3\left(\xi^1\right)^2 + \left(\xi^3\right)^2,$$

где на сей раз ξ^1 и ξ^3 — независимые переменные.

Последняя форма, очевидно, может принимать значения разных знаков, поэтому в точке $p \in S$ функция $f|_S$ экстремума не имеет.

Пример 11. В условиях примера 10 заменим $\mathbb{R}^3$ на $\mathbb{R}^2$ и функцию f на

$$f(x, y) = x^2 - y^2,$$

сохранив условие

$$2x - y - 3 = 0,$$

которое теперь задает прямую S в плоскости $\mathbb{R}^2$.

В качестве подозрительной найдем точку $p = (2, 1)$.

Вместо формы (46) получим форму

$$\left(\xi^1\right)^2 - \left(\xi^2\right)^2 \tag{48}$$

с прежним соотношением (47) между ξ^1 и ξ^2.

Таким образом, на TS_p форма (48) теперь имеет вид

$$-3\left(\xi^1\right)^2,$$

т. е. является отрицательно определенной. Отсюда заключаем, что точка $p = (2, 1)$ является точкой локального максимума функции $f|_S$.

Весьма поучительны во многих аспектах следующие простые примеры, на которых можно отчетливо рассмотреть механизм работы как необходимых, так и достаточных условий экстремума, в том числе роль параметра и неформальную роль самой функции Лагранжа.

Пример 12. На плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами (x, y) дана функция

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Найдем экстремумы этой функции на эллипсе, заданном каноническим соотношением

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

где $0 < a < b$.

Из геометрических соображений очевидно, что $\min f|_S = a^2$, $\max f|_S = b^2$. Получим это, опираясь на рекомендации теорем 1 и 2.

Записав функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = \left(x^2 + y^2\right) - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

и решая уравнение $dL = 0$, т. е. систему $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$, находим ее решения:

$$(x, y, \lambda) = (\pm a, 0, a^2), \quad (0, \pm b, b^2).$$

Теперь в соответствии с теоремой 2 выпишем и исследуем квадратичную форму $\frac{1}{2}d^2L\boldsymbol{\xi}^2$ — второй член тейлоровского разложения функции Лагранжа в окрестности соответствующих точек:

$$\frac{1}{2}d^2L\boldsymbol{\xi}^2 = \left(1 - \frac{\lambda}{a^2}\right)\left(\xi^1\right)^2 + \left(1 - \frac{\lambda}{b^2}\right)\left(\xi^2\right)^2.$$

В точках $(\pm a, 0)$ эллипса S касательный вектор $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2)$ имеет вид $(0, \xi^2)$, а квадратичная форма при $\lambda = a^2$ принимает вид

$$\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)\left(\xi^2\right)^2.$$

Учитывая условие $0 < a < b$, заключаем, что эта форма положительно определена и, значит, в точках $(\pm a, 0) \in S$ имеется строгий локальный (а здесь, очевидно, и глобальный) минимум функции $f|_S$, т. е. $\min f|_S = a^2$.

Аналогично находим форму

$$\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\left(\xi^1\right)^2,$$

отвечающую точкам $(0, \pm b) \in S$, и получаем $\max f|_S = b^2$.

Замечание. Обратите здесь внимание на роль функции Лагранжа в сравнении с ролью функции f. В соответствующих точках на указанных касательных векторах дифференциал функции f (как и дифференциал L) обращается в нуль, а квадратичная форма $\frac{1}{2}d^2f\boldsymbol{\xi}^2 = \left(\xi^1\right)^2 + \left(\xi^2\right)^2$ положительно определена, в какой бы из этих точек ее ни вычислять. Тем не менее функция $f|_S$ в точках $(\pm a, 0)$ имеет строгий минимум, а в точках $(0, \pm b)$ — строгий максимум.

Чтобы понять, в чем тут дело, просмотрите еще раз доказательство теоремы 2 и попробуйте провести его, заменив L на f. Несмотря на то, что функции L и f на поверхности S совпадают, и на то, что $f'(x_0)\xi = 0$, как и $L'(x_0)\xi = 0$, при $\xi \in T_{x_0}S$, доказательство наткнется на существенное препятствие. Оно состоит в том, что в отличие от $dL(x_0)$ дифференциал $df(x_0)$ функции f в точке x_0 не есть тождественный нуль, хотя на касательном пространстве $T_{x_0}S$ он действительно нулевой. Это приводит к появлению довесков, препятствующих получению равенств (42), (42′), в которых L замено на f.

Пример 13. Найдем экстремумы функции

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

на эллипсоиде S, заданном соотношением

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

где $0 < a < b < c$.

Записав функцию Лагранжа

$$L(x, y, z, \lambda) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right) - \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right),$$

в соответствии с необходимым признаком экстремума находим решения уравнения $dL = 0$, т. е. системы $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$:

$$(x, y, z, \lambda) = (\pm a, 0, 0, a^2), \quad (0, \pm b, 0, b^2), \quad (0, 0, \pm c, c^2).$$

Квадратичная форма

$$\frac{1}{2} d^2 L \boldsymbol{\xi}^2 = \left(1 - \frac{\lambda}{a^2}\right) \left(\xi^1\right)^2 + \left(1 - \frac{\lambda}{b^2}\right) \left(\xi^2\right)^2 + \left(1 - \frac{\lambda}{c^2}\right) \left(\xi^3\right)^2$$

в каждом из этих случаев на соответствующей касательной плоскости имеет вид

$$\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \left(\xi^2\right)^2 + \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right) \left(\xi^3\right)^2, \tag{a}$$

$$\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \left(\xi^1\right)^2 + \left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right) \left(\xi^3\right)^2, \tag{b}$$

$$\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) \left(\xi^1\right)^2 + \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) \left(\xi^2\right)^2. \tag{c}$$

Поскольку $0 < a < b < c$, то на основании теоремы 2, дающей достаточный признак наличия или отсутствия условного экстремума, можно заключить, что в случаях (a) и (c) мы нашли соответственно $\min f|_S = a^2$ и $\max f|_S = c^2$, а в точках $(0, \pm b, 0) \in S$, отвечающих случаю (b), функция $f|_S$ экстремума не имеет. Это вполне согласуется с очевидными геометрическими соображениями, высказанными по этому поводу при обсуждении необходимого признака условного экстремума.

Некоторые дальнейшие, порой весьма полезные стороны встретившихся в этом параграфе понятий анализа и геометрии, в том числе физическая интерпретация самой задачи об условном экстремуме, а также его необходимого признака (31) как разложения сил в точке равновесия и интерпретация множителей Лагранжа как величин реакций идеальных связей, представлены в приведенных ниже задачах и упражнениях.

Задачи и упражнения

1. *Путь и поверхность.*

a) Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}^2$ — отображение класса $C^{(1)}(I; \mathbb{R}^2)$ интервала $I \subset \mathbb{R}$. Рассматривая это отображение как путь в $\mathbb{R}^2$, покажите на примере, что его носитель $f(I)$ может не быть подмногообразием в $\mathbb{R}^2$, а вот график этого отображения в $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2$ всегда является одномерным подмногообразием $\mathbb{R}^3$, проекцией которого в $\mathbb{R}^2$ является носитель $f(I)$ указанного пути.

b) Решите задачу a) в случае, когда I — промежуток в $\mathbb{R}^k$, а $f \in C^{(1)}(I; \mathbb{R}^n)$. Покажите, что в этом случае график отображения $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ является гладкой k-мерной поверхностью в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, проекция которой на подпространство $\mathbb{R}^n$ совпадает с $f(I)$.

c) Проверьте, что если $f_1\colon I_1 \to S$ и $f_2\colon I_2 \to S$ — две гладкие параметризации одной и той же k-мерной поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$, причем ни f_1 в I_1, ни f_2 в I_2 не имеют критических точек, то определенные при этих условиях отображения

$$f_1^{-1} \circ f_2\colon I_2 \to I_1, \qquad f_2^{-1} \circ f_1\colon I_1 \to I_2$$

являются гладкими.

2. *Сфера в* $\mathbb{R}^n$.

a) На сфере $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ укажите какую-нибудь максимальную область действия криволинейных координат (φ, ψ), полученных из полярных координат в $\mathbb{R}^3$ (см. формулу (5) предыдущего параграфа) при $\rho = 1$.

b) Ответьте на вопрос a) в случае $(m-1)$-мерной сферы

$$S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| = 1\}$$

в $\mathbb{R}^m$ и координат $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1})$ на ней, получаемых из полярных координат в $\mathbb{R}^n$ (см. формулы (6) предыдущего параграфа) при $\rho = 1$.

c) Можно ли сферу $S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ задать одной системой координат $(t^1, \ldots, t^k)$, т. е. одним диффеоморфизмом $f\colon G \to \mathbb{R}^{k+1}$ области $G \subset \mathbb{R}^k$?

d) Какое наименьшее количество карт должно быть в атласе поверхности Земли?

e) Расстояние между точками сферы $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ будем измерять длиной кратчайшей кривой, лежащей на сфере S^2 и соединяющей эти точки. Такой кривой является дуга соответствующего большого круга. Может ли существовать такая локальная плоская карта сферы, что все расстояния между точками сферы были бы пропорциональны (с одним и тем же коэффициентом пропорциональности) расстояниям между их изображениями на карте?

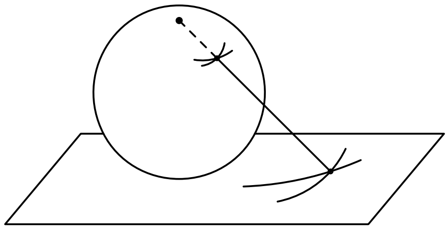


Рис. 65.

f) Углом между кривыми (лежащими или не лежащими на сфере) в точке их пересечения называется угол между касательными к этим кривым в этой точке.

Покажите, что существуют локальные плоские карты сферы, в которых углы между кривыми на сфере и соответствующими кривыми на карте одинаковы (см. рис. 65, изображающий так называемую *стереографическую проекцию*).

3. *Касательное пространство.*

a) Проверьте прямым расчетом, что касательное к гладкой k-мерной поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$ в точке $x_0 \in S$ многообразие TS_{x_0} не зависит от выбора системы координат в $\mathbb{R}^n$.

b) Покажите, что если при диффеоморфизме $f\colon D \to D'$ области $D \subset \mathbb{R}^n$ на область $D' \subset \mathbb{R}^n$ гладкая поверхность $S \subset D$ отображается на гладкую поверхность $S' \subset D'$, а точка $x_0 \in S$ переходит в $x'_0 \in S'$, то при линейном отображении $f'(x_0)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, касательном к f в точке $x_0 \in D$, векторное пространство TS_{x_0} изоморфно преобразуется в векторное пространство $TS'_{x'_0}$.

c) Если в условиях предыдущей задачи отображение $f\colon D \to D'$ является любым отображением класса $C^{(1)}(D; D')$, при котором $f(S) \subset S'$, то $f'(TS_{x_0}) \subset TS'_{x'_0}$.

d) Покажите, что ортогональная проекция гладкой k-мерной поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$ на касательную к ней в точке $x_0 \in S$ k-мерную плоскость TS_{x_0} является отображением, взаимно однозначным в некоторой окрестности точки касания x_0.

e) Пусть в условиях предыдущей задачи $\xi \in TS_{x_0}$ и $\|\xi\| = 1$.

Уравнение $x - x_0 = \xi t$ прямой в $\mathbb{R}^n$, лежащей в TS_{x_0}, можно использовать, чтобы каждую точку $x \in TS_{x_0} \setminus x_0$ характеризовать парой (t, ξ). Это по существу полярные координаты в TS_{x_0}.

Покажите, что прямым $x - x_0 = \xi t$ на поверхности S в окрестности точки x_0 отвечают гладкие кривые, пересекающиеся только в точке x_0. Проверьте, что, сохраняя в качестве параметра на этих кривых величину t, мы получаем пути, скорость вдоль которых при $t = 0$ совпадает с вектором $\xi \in TS_{x_0}$, определяющим прямую $x - x_0 = \xi t$, из которой получена данная кривая на S.

Таким образом, пары (t, ξ), где $\xi \in TS_{x_0}$, $\|\xi\| = 1$, а t — вещественные числа из некоторой окрестности $U(0)$ нуля в $\mathbb{R}$, могут служить аналогом полярных координат в некоторой окрестности точки $x_0 \in S$ на поверхности S.

4. Пусть функция $F \in C^{(1)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, не имеющая критических точек, такова, что уравнение $F(x^1, \dots, x^n) = 0$ задает в $\mathbb{R}^n$ компактную поверхность S (т. е. S как подмножество $\mathbb{R}^n$ является компактом). Для любой точки $x \in S$ находим вектор $\boldsymbol{\eta}(x) = \operatorname{grad} F(x)$, нормальный к S в точке x. Если каждую точку $x \in S$ заставить двигаться равномерно со своей скоростью $\boldsymbol{\eta}(x)$, то возникает зависящее от времени t отображение $S \ni x \mapsto x + \boldsymbol{\eta}(x)t \in \mathbb{R}^n$.

a) Покажите, что при достаточно близких к нулю значениях t это отображение биективно и при каждом таком значении t из S получается гладкая поверхность $\widetilde{S}_t$.

b) Пусть E — множество в $\mathbb{R}^n$; δ-окрестностью множества E назовем совокупность тех точек $\mathbb{R}^n$, расстояние которых до E меньше δ.

Покажите, что при значениях t, близких к нулю, уравнение

$$F(x^1, \dots, x^n) = t$$

задает компактную поверхность $S_t \subset \mathbb{R}^n$, и покажите, что поверхность $\widetilde{S}_t$ лежит в $\delta(t)$-окрестности поверхности S_t, где $\delta(t) = o(t)$ при $t \to 0$.

c) С каждой точкой x поверхности $S = S_0$ свяжем единичный вектор нормали

$$\boldsymbol{n}(x) = \frac{\boldsymbol{\eta}(x)}{\|\boldsymbol{\eta}(x)\|}$$

и рассмотрим новое отображение $S \ni x \mapsto x + \boldsymbol{n}(x)t \in \mathbb{R}^n$.

Покажите, что при всех достаточно близких к нулю значениях t это отображение биективно, получающаяся из S при конкретном значении t поверхность $\widetilde{\widetilde{S}}_t$ гладкая и если $t_1 \neq t_2$, то $\widetilde{\widetilde{S}}_{t_1} \cap \widetilde{\widetilde{S}}_{t_2} = \varnothing$.

d) Опираясь на результат предыдущей задачи, покажите, что найдется число $\delta > 0$ такое, что между точками δ-окрестности поверхности S и парами (t, x), где $t \in \,]-\delta, \delta[\, \subset \mathbb{R}$, $x \in S$, имеется взаимно однозначное соответствие; если $(t^1, \dots, t^k)$ — локальные координаты на поверхности S в окрестности $U_S(x_0)$ точки x_0, то величины $(t, t^1, \dots, t^k)$ могут служить локальными координатами в некоторой пространственной окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

e) Покажите, что при $|t| < \delta$ точка $x \in S$ является ближайшей к $(x + \boldsymbol{n}(x)t) \in \mathbb{R}^n$ точкой поверхности S. Таким образом, поверхность $\widetilde{\widetilde{S}}_t$ при $|t| < \delta$ есть геометрическое место точек пространства $\mathbb{R}^n$, удаленных от поверхности S на расстояние $|t|$.

5. a) Пусть $d_p\colon S \to \mathbb{R}$ — функция на k-мерной гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$, определенная равенством $d_p(x) = \|p - x\|^2$, где p — фиксированная точка $\mathbb{R}^n$, x — точка S, а $\|p - x\|$ — расстояние в $\mathbb{R}^n$ между этими точками.

Покажите, что в точках экстремума функции $d_p(x)$ вектор $p - x$ ортогонален поверхности S.

b) Покажите, что на любой прямой, ортогонально пересекающей поверхность S в точке $q \in S$, имеется не более k таких точек p, что функция $d_p(x)$ имеет q своей вырожденной критической точкой (т. е. точкой, в которой гессиан функции обращается в нуль).

c) Покажите, что в случае кривой S ($k = 1$) на плоскости $\mathbb{R}^2$ ($n = 2$) точка p, для которой точка $q \in S$ является вырожденной критической точкой функции $d_p(x)$, совпадает с центром кривизны кривой S в точке $q \in S$.

6. Постройте в плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами x, y линии уровня функции $f(x, y) = xy$ и кривую

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Используя полученную картинку, проведите полное исследование задачи об экстремуме функции $f|_S$.

7. На плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами x, y определены следующие функции класса $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$:

$$f(x, y) = x^2 - y; \qquad F(x, y) = \begin{cases} x^2 - y + e^{-1/x^2} \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ x^2 - y, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

a) Нарисуйте линии уровня функции $f(x, y)$ и линию S, заданную соотношением $F(x, y) = 0$.

b) Исследуйте на экстремум функцию $f|_S$.

c) Покажите, что условие определенности формы $\partial_{ij} f(x_0)\xi^i\xi^j$ на TS_{x_0}, в отличие от условия определенности формы $\partial_{ij} L(x_0)\xi^i\xi^j$ на TS_{x_0}, приведенного в теореме 2, еще не является достаточным для того, чтобы подозрительная точка $x_0 \in S$ была точкой экстремума функции $f|_S$.

d) Проверьте, является ли точка $x_0 = (0, 0)$ критической для функции f и можно ли исследовать поведение f в окрестности этой точки только с помощью второго (квадратичного) члена формулы Тейлора, как это подразумевалось в c).

e) На примере пары функций $F(x, y) = 2x^2 + y$, $f(x, y) = x^2 + y$ покажите, что f может иметь строгий максимум в точке кривой $F(x, y) = 0$, хотя на касательной к этой кривой в этой точке функция f имеет строгий минимум. Это еще раз подчеркивает роль функции Лагранжа в формулировке доказанного выше достаточного признака условного экстремума.

f) На примере пары функций $F(x, y) = x^2 - y^3$, $f(x, y) = y$ покажите, что при $L(x, y) = f(x, y) + \lambda F$ уравнение $dL = 0$ может не иметь решения, когда экстремум f достигается в особой точке кривой $F(x, y) = 0$. Это можно учесть, рассматривая вместо L функцию $\tilde{L}(x, y) = \lambda_0 f + \lambda F$, допуская возможность $\lambda_0 = 0$.

8. В дифференциальной геометрии при определении главных кривизн и главных направлений бывает полезно уметь искать экстремум одной квадратичной формы $h_{ij}u^i u^j$ при условии постоянства другой (положительно определенной) формы $g_{ij}u^i u^j$. Решите эту задачу по аналогии с разобранным выше примером 9.

9. Пусть $A = \left[a^i_j\right]$ — квадратная матрица порядка n такая, что

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a^i_j\right)^2 = H_j \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

где $H_1, \ldots, H_n$ — фиксированный набор из n неотрицательных действительных чисел.

a) Покажите, что $\det^2 A$ при указанных условиях на матрицу A может иметь экстремум, только если строки матрицы A являются попарно ортогональными векторами в $\mathbb{R}^n$.

b) Исходя из равенства

$$\det{}^2 A = \det A \cdot \det A^*,$$

где A^* — транспонированная по отношению к A матрица, покажите, что при указанных выше условиях

$$\max_A \det{}^2 A = H_1 \ldots H_n.$$

c) Докажите, что для любой матрицы $\left[a^i_j\right]$ имеет место *неравенство Адамара*

$$\det{}^2 \left(a^i_j\right) \leqslant \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a^i_j\right)^2 \right).$$

d) Дайте наглядно-геометрическое истолкование неравенства Адамара.

10. a) Нарисуйте поверхности уровня функции f и плоскость S в примере 10. Объясните на рисунке результат, полученный в этом примере.

b) Нарисуйте линии уровня функции f и прямую S в примере 11. Объясните на рисунке результат, полученный в этом примере.

11. В примере 6 из § 4 главы V, исходя из принципа Ферма, был получен закон Снеллиуса преломления света на поверхности раздела двух сред в случае, когда эта поверхность — плоскость. Остается ли этот закон в силе для произвольной гладкой поверхности раздела?

12. a) Материальная точка в потенциальном поле сил может находиться в положении равновесия (называемом также состоянием покоя или стационарным состоянием) только в критических (стационарных) точках потенциала. При этом строгому локальному минимуму потенциала отвечает положение устойчивого равновесия, а локальному максимуму — неустойчивого. Проверьте это.

b) К какой задаче на условный экстремум (которую и решал Лагранж) сводится вопрос о положении равновесия материальной точки, находящейся в потенциальном поле сил (например, тяжести) и стесненной идеальными связями (например, точка не может покидать некоторой гладкой поверхности, или бусинка — гладкой нити, или шарик — желоба)? Связь идеальна (нет трения); это значит, что ее воздействие на точку (*реакция связи*) происходит только в нормальном к связи направлении.

c) Какой физический (механический) смысл имеют в этом случае разложение (31) — необходимый признак условного экстремума и множители Лагранжа?

Кстати, каждую из функций системы (25) можно поделить на модуль ее градиента, что, очевидно, приводит к равносильной системе (если ее ранг всюду равен m). Значит, все векторы $\operatorname{grad} F^i(x_0)$ в правой части соотношения (31) можно считать единичными нормалями к соответствующей поверхности.

d) Не становится ли после приведенной физической интерпретации самоочевидным и естественным сам метод Лагранжа отыскания условного экстремума?

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ КОЛЛОКВИУМОВ

Введение в анализ (число, функция, предел)

1. Длину стягивающего земной шар по экватору обруча увеличили на 1 метр. Образовался зазор. Достаточен ли он для прохода муравья? Каковы величины абсолютного и относительного увеличения радиуса Земли при таком увеличении длины экватора? (Радиус Земли ≈ 6400 км.)

2. Как связаны полнота (непрерывность) действительных чисел, неограниченность натурального ряда и принцип Архимеда? Почему любое действительное число можно сколь угодно точно приблизить рациональным? Объясните на модели рациональных дробей (рациональных функций), что принцип Архимеда может быть нарушен и что в таких числовых системах натуральный ряд ограничен и имеются бесконечно малые числа.

3. Четыре букашки, сидевшие в вершинах единичного квадрата, стали двигаться друг за другом с единичной скоростью, держа курс на преследуемого. Нарисуйте траектории их движения. Какова длина каждой траектории? Каков закон движения (в декартовых и полярных координатах)?

4. Нарисуйте диаграмму вычисления $\sqrt{a}$ $(a > 0)$ итерационным процессом

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Как находить $\sqrt[n]{a}$?

Как связано решение уравнений с отысканием неподвижных точек? Верно ли, что каждое непрерывное отображение $f\colon [0,1] \to [0,1]$ имеет неподвижную точку?

5. Пусть $g(x) = f(x) + o(f(x))$ при $x \to \infty$. Верно ли, что тогда и $f(x) = g(x) + o(g(x))$ при $x \to \infty$?

Пусть известно, что $o(f(x)) = O(g(x))$ при $x \to \infty$. Верно ли, что тогда и $O(g(x)) = o(f(x))$ при $x \to \infty$ (например, когда $f = g$)?

Известно, что всегда $O(f)+o(f) = O(f)$, и $o(f)+o(f) = o(f)$, и $2o(f) = o(f)$ при фиксированной базе. Следует ли отсюда, что $o(f) \equiv 0$?

6. Известно, что произведение двух или любого конечного числа бесконечно малых является функцией бесконечно малой. Приведите пример, показывающий, что для бесконечных произведений это уже не всегда так.

7. Зная степенное разложение функции e^x, найдите методом неопределенных коэффициентов (или иначе) несколько первых членов (или все) степенного разложения функции $\ln(1+x)$.

8. Вычислите $\exp A$, когда A — одна из матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. Сколько членов ряда для e^x надо взять, чтобы получить многочлен, позволяющий вычислять e^x на отрезке $[-1, 2]$ с точностью до 10^{-3}?

10. Зная степенные разложения функций $\sin x$ и $\cos x$, найдите методом неопределенных коэффициентов (или иначе) несколько первых членов (или все) степенного разложения функции $\operatorname{tg} x$ в окрестности точки $x = 0$.

11. Длину стягивающего земной шар по экватору пояска увеличили на 1 метр, после чего поясок натянули, подперев вертикальным столбиком. Какова примерно высота столбика, если радиус Земли ≈ 6400 км.?

12. Вычислите

$$\lim_{x\to\infty} \left(e \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} \right)^x.$$

13. Нарисуйте эскизы графиков следующих функций:

a) $\log_{\cos x} \sin x$; b) $\operatorname{arctg} \dfrac{x^3}{(1-x)(1+x)^2}$.

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

1. Покажите, что если вектор ускорения $\boldsymbol{a}(t)$ в любой момент t ортогонален вектору $\boldsymbol{v}(t)$ скорости движения, то величина $|\boldsymbol{v}(t)|$ остается постоянной.

2. Пусть (x, t) и $(\tilde{x}, \tilde{t})$ — соответственно координата и время движущейся точки в двух системах отсчета. Считая известными формулы $\tilde{x} = \alpha x + \beta t$, $\tilde{t} = \gamma x + \delta t$ перехода из одной системы отсчета в другую, найдите формулу преобразования скоростей, т. е. связь между $v = \dfrac{dx}{dt}$ и $\tilde{v} = \dfrac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}$.

3. Функция $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ дифференцируема на $\mathbb{R}$, но f' разрывна при $x = 0$ (проверьте). «Докажем», однако, что если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

дифференцируема на $\mathbb{R}$, то f' непрерывна в любой точке $a \in \mathbb{R}$. По теореме Лагранжа

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi),$$

где ξ — точка между a и x. Тогда если $x \to a$, то $\xi \to a$. По определению,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

и поскольку этот предел существует, то существует и равен ему предел правой части формулы Лагранжа, т. е. $f'(\xi) \to f'(a)$ при $\xi \to a$. Непрерывность f' в точке a «доказана». Где ошибка?

4. Пусть функция f имеет $n+1$ производную в точке x_0, и пусть $\xi = x_0 + \theta_x(x - x_0)$ — средняя точка в формуле Лагранжа остаточного члена $\frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x - x_0)^n$, так что $0 < \theta_x < 1$. Покажите, что $\theta_x \to \frac{1}{n+1}$ при $x \to x_0$, если $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$.

5. a) Если функция $f \in C^{(n)}([a,b], \mathbb{R})$ в $n+1$ точке отрезка $[a,b]$ имеет нули, то на этом отрезке имеется по крайней мере один нуль функции $f^{(n)}$ — производной f порядка n.

b) Покажите, что полином $P_n(x) = \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ на отрезке $[-1,1]$ имеет n корней. (Указание: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ и $P_n^{(k)}(-1) = P_n^{(k)}(1) = 0$ при $k = 0, \ldots, n-1$.)

6. Вспомните геометрический смысл производной и покажите, что если функция f определена и дифференцируема на интервале I и $[a,b] \subset I$, то функция f' (даже не будучи непрерывной!) принимает на отрезке $[a,b]$ все значения между $f'(a)$ и $f'(b)$.

7. Докажите неравенство

$$a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n,$$

где числа $a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ неотрицательны и $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$.

8. Покажите, что

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i \sin y) \qquad (z = x + iy),$$

поэтому естественно считать, что $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ (формула Эйлера) и

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

9. Найдите форму поверхности жидкости, равномерно вращающейся в стакане.

10. Покажите, что касательная к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точке (x_0, y_0) имеет уравнение $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ и что световые лучи от источника, помещенного в одном из фокусов $F_1=\left(-\sqrt{a^2-b^2}, 0\right)$, $F_2=\left(\sqrt{a^2-b^2}, 0\right)$ эллипса с полуосями $a>b>0$, собираются эллиптическим зеркалом в другом фокусе.

11. Частица без предварительного разгона под действием силы тяжести начинает скатываться с вершины ледяной горки эллиптического профиля. Уравнение профиля: $x^2+5y^2=1$, $y \geqslant 0$. Рассчитайте траекторию движения частицы до ее приземления.

12. Средним порядка α чисел x_1, x_2, …, x_n называют величину

$$s_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\left(\frac{x_1^\alpha+x_2^\alpha+\ldots+x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}.$$

В частности, при $\alpha=1,2,-1$ получаем соответственно *среднее арифметическое*, *среднее квадратичное* и *среднее гармоническое* этих чисел.

Будем считать, что все числа x_1, x_2, …, x_n неотрицательны, а если степень $\alpha<0$, то будем предполагать, что они даже положительны.

a) Используя неравенство Гёльдера, покажите, что если $\alpha<\beta$, то

$$s_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant s_\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

причем равенство имеет место, лишь когда $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

b) Покажите, что при стремлении α к нулю величина $s_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ стремится к $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$, т. е. к *среднему геометрическому* этих чисел.

С учетом результата задачи a) отсюда, например, следует классическое неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим неотрицательных чисел (напишите его).

c) Если $\alpha \to +\infty$, то $s_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, а при $\alpha \to -\infty$ величина $s_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ стремится к меньшему из рассматриваемых чисел, т. е. к $\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Докажите это.

13. Пусть $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ — закон движения точки (т. е. ее радиус-вектор как функция времени). Считаем, что это непрерывно дифференцируемая функция на промежутке $a \leqslant t \leqslant b$.

a) Можно ли, ссылаясь на теорему Лагранжа о среднем, утверждать, что на $[a, b]$ найдется момент ξ, такой что $\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)=\boldsymbol{r}'(\xi)\cdot(b-a)$? Поясните ответ примерами.

b) Пусть $\operatorname{Convex}\{\boldsymbol{r}'\}$ — выпуклая оболочка множества (концов) векторов $\boldsymbol{r}'(t)$, $t \in [a, b]$. Покажите, что найдется вектор $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Convex}\{\boldsymbol{r}'\}$, такой что $\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)=\boldsymbol{v}\cdot(b-a)$.

c) Соотношение $|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)| \leqslant \sup|\boldsymbol{r}'(t)|\cdot|b-a|$, где верхняя грань берется по $t \in [a, b]$, имеет очевидный физический смысл. Какой? Докажите это неравенство как общий математический факт, развивающий классическую теорему Лагранжа о конечном приращении.

Интеграл и введение в многомерный анализ

1. Зная неравенства Гчльдера, Минковского и Иенсена для сумм, получите соответствующие неравенства для интегралов.

2. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$ с относительной погрешностью в пределах 10 %.

3. Функция $\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-x}^{x} e^{-t^2}\,dt$, называемая *интегралом вероятности ошибок*, имеет пределом 1 при $x \to +\infty$. Изобразите график этой функции и найдите ее производную. Покажите, что при $x \to +\infty$

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2 x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 x^7} + o\left(\frac{1}{x^7}\right) \right).$$

Как продолжить эту асимптотическую формулу до ряда? Сходится ли этот ряд хотя бы при каком-то значении $x \in \mathbb{R}$?

4. Зависит ли длина пути от закона движения (от параметризации)?

5. Вы держите один конец резинового шнура длиной 1 км. От второго его конца, который закреплен, к вам со скоростью 1 см/с ползет жук. Каждый раз, как только он проползает 1 см, вы удлиняете резинку на 1 км. Доползет ли жук до вашей руки? Если да, то приблизительно сколько ему на это потребуется времени? (Задача Л. Б. Окуня, предложенная им А. Д. Сахарову.)

6. Подсчитайте работу по перемещению массы в гравитационном поле Земли и покажите, что эта работа зависит только от уровней высот исходного и конечного положений. Найдите для Земли работу выхода из ее гравитационного поля и соответствующую (вторую) космическую скорость.

7. На примере маятника и двойного маятника поясните, как на множестве соответствующих конфигураций можно ввести локальные координаты и окрестности и как при этом возникает естественная топология, превращающая его в конфигурационное пространство механической системы. Можно ли метризовать это пространство в рассмотренных случаях?

8. Является ли компактом единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, в $\mathbb{R}_0^\infty$, в $C[a,b]$?

9. Подмножество данного множества называется его *ε-сетью*, если любая точка множества находится на расстоянии меньшем чем ε от какой-либо точки этого подмножества. Обозначим через $N(\varepsilon)$ наименьшее возможное число точек в ε-сети данного множества. Оцените *ε-энтропию* $\log_2 N(\varepsilon)$ отрезка, квадрата, куба и ограниченной области в пространстве $\mathbb{R}^n$. Дает ли величина $\frac{\log_2 N(\varepsilon)}{\log_2(1/\varepsilon)}$ при $\varepsilon \to 0$ представление о размерности рассматриваемого множества? Проверьте, что эта *энтропийная* размерность стандартного канторова подмножества отрезка $[0,1]$ равна $\log_3 2$.

10. На поверхности единичной сферы S в $\mathbb{R}^3$ температура T как функция точки меняется непрерывно. Обязаны ли на сфере быть точки минимума и максимума температуры? При наличии точек с двумя фиксированными значениями температуры должны ли быть точки и с промежуточными ее значениями? Что из этого верно в случае, когда единичная сфера S берется в пространстве $C[a, b]$, а температура в точке $f \in S$ выражается формулой

$$T(f) = \left(\int\limits_a^b |f|(x)\, dx \right)^{-1} ?$$

11. a) Взяв 1,5 в качестве исходного приближения для $\sqrt{2}$, проведите две итерации по методу Ньютона и посмотрите, сколько верных знаков получилось на каждом из двух шагов.

b) Найдите итерационным процессом функцию f, удовлетворяющую уравнению

$$f(x) = x + \int\limits_0^x f(t)\, dt.$$

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

1. Локальная линеаризация. Рассмотрите и продемонстрируйте ее на следующих примерах: мгновенная скорость и перемещение; упрощение уравнения движения при малых колебаниях маятника; вычисление линейных поправок к значениям величин A^{-1}, $\exp(E)$, $\det(E)$, $\langle a, b\rangle$ при малом изменении аргументов (здесь A — обратимая, E — единичная матрицы; a, b — векторы; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение).

2. a) Какова относительная погрешность $\delta = \dfrac{|\Delta f|}{|f|}$ при вычислении значения функции $f(x, y, z)$ в точке (x, y, z), координаты которой даны с абсолютными погрешностями Δx, Δy, Δz соответственно?

b) Какова относительная ошибка в вычислении объема комнаты, размеры которой таковы: длина $x = 5 \pm 0{,}05$ м, ширина $y = 4 \pm 0{,}04$ м, высота $z = 3 \pm 0{,}03$ м?

c) Верно ли, что относительная погрешность значения линейной функции совпадает с относительной погрешностью значения ее аргумента?

d) Верно ли, что дифференциал линейной функции совпадает с ней самой?

e) Верно ли, что для линейной функции f справедливо соотношение $f' = f$?

3. a) Одна из частных производных функции двух переменных, заданной в круге, равна нулю во всех точках круга. Значит ли это, что функция не зависит от соответствующей переменной в этом круге?

b) Изменится ли ответ, если вместо круга взять произвольную выпуклую область?

c) А если взять вообще произвольную область?

d) Пусть $x = x(t)$ — закон движения точки в плоскости (или в $\mathbb{R}^n$) в промежутке времени $t \in [a,b]$; $\boldsymbol{v}(t)$ — ее скорость как функция времени, а $C = \mathrm{Convex}\{\boldsymbol{v}(t) \mid t \in [a,b]\}$ — наименьшее выпуклое множество, содержащее все векторы $\boldsymbol{v}(t)$ (называемое обычно *выпуклой оболочкой* того множества, на которое оболочка натягивается). Покажите, что в C найдется такой вектор $\boldsymbol{v}$, что $x(b) - x(a) = \boldsymbol{v} \cdot (b-a)$.

4. a) Пусть $F(x,y,z) = 0$. Верно ли, что $\dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial z} = -1$? Проверьте это на зависимости $\dfrac{xy}{z} - 1 = 0$ (соответствующей уравнению Клапейрона $\dfrac{PV}{T} = R$ состояния идеального газа).

b) Пусть теперь $F(x,y) = 0$. Верно ли, что $\dfrac{\partial y}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial y} = 1$?

c) Что можно утверждать в общем случае зависимости $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$?

d) Как, зная первые несколько членов тейлоровского разложения функции $F(x,y)$ в окрестности точки (x_0, y_0), где $F(x_0, y_0) = 0$, а $F'_y(x_0, y_0)$ обратима, найти первые несколько членов тейлоровского разложения неявной функции $y = f(x)$, определяемой в окрестности (x_0, y_0) уравнением $F(x,y) = 0$?

5. a) Проверьте, что плоскость, касательная к эллипсоиду $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ в точке (x_0, y_0, z_0), может быть задана уравнением $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} + \dfrac{zz_0}{c^2} = 1$.

b) Точка $P(t) = \left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{b}{\sqrt{3}}, \dfrac{c}{\sqrt{3}}\right) \cdot t$ в момент времени $t = 1$ стартовала с эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Пусть $p(t)$ — точка того же эллипсоида, ближайшая к $P(t)$ в момент времени t. Найдите предельное положение точки $p(t)$ при $t \to +\infty$.

6. Если в векторном пространстве V имеется невырожденная билинейная форма $B(x,y)$, то каждой линейной функции $g^* \in V^*$ на этом пространстве отвечает единственный вектор g, такой что $g^*(v) = B(g,v)$ для любого вектора $v \in V$.

a) Проверьте, что если $V = \mathbb{R}^n$, $B(x,y) = b_{ij}x^i x^j$, $g^* v = g_i v^i$, то вектор g имеет координаты $g^j = b^{ij} g_i$, где (b^{ij}) — матрица, обратная матрице (b_{ij}).

Чаще всего в качестве билинейной формы $B(\cdot,\cdot)$ выступает стандартное симметричное скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в евклидовой геометрии или кососкалярное произведение $\omega(\cdot,\cdot)$ (когда форма B кососимметрична) в симплектической геометрии.

b) Пусть $B(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} v_1^1 & v_1^2 \\ v_2^1 & v_2^2 \end{vmatrix}$ — ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на векторы $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Найдите вектор $g = (g^1, g^2)$, отвечающий относительно B линейной функции $g^* = (g_1, g_2)$, заданной своими коэффициентами.

c) Вектор, соответствующий дифференциалу функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке x относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, как известно, называется градиентом функции f в этой точке и обозначается $\operatorname{grad} f(x)$. Итак, $df(x)v =: \langle \operatorname{grad} f(x), v\rangle$ для любого приложенного к x вектора $v \in T_x\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}^n$.

Значит,

$$f'(x)v = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x)v^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x)v^n = \langle \operatorname{grad} f(x), v\rangle = |\operatorname{grad} f(x)| \cdot |v| \cos\varphi.$$

• Убедитесь, что в стандартном ортонормированном базисе, т. е. в декартовых координатах, $\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)(x)$.

• Убедитесь, что скорость роста функции f при движении из точки x с единичной скоростью максимальна, когда направление движения совпадает с направлением градиента функции в этой точке, и равна $|\operatorname{grad} f(x)|$. При движении в направлении, перпендикулярном вектору $\operatorname{grad} f(x)$, функция не меняется.

• Как изменятся координаты вектора $\operatorname{grad} f(x)$, если в $\mathbb{R}^2$ вместо ортонормированного базиса (e_1, e_2) взять ортогональный базис $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = (\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2)$?

• Как вычислять $\operatorname{grad} f$ в полярных координатах? Ответ: $\left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)$.

d) Выше в упражнении b) была рассмотрена кососимметрическая форма $B(v_1, v_2)$ ориентированной площади параллелограмма в $\mathbb{R}^2$.

Если вектор, отвечающий $df(x)$ относительно симметричной формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ называют градиентом $\operatorname{grad} f(x)$, то вектор, отвечающий $df(x)$ относительно кососимметричной формы B называют косым градиентом и обозначают $\operatorname{sgrad} f(x)$ (от английского «skew» — косой). Запишите $\operatorname{grad} f(x)$ и $\operatorname{sgrad} f(x)$ в декартовых координатах $\mathbb{R}^2$.

7. a) Покажите, что в $\mathbb{R}^3$ (и вообще в $\mathbb{R}^{2n+1}$) нет невырожденной кососимметрической билинейной формы.

b) В ориентированном $\mathbb{R}^2$, как мы видели, есть невырожденная кососимметрическая билинейная форма (ориентированная площадь параллелограмма). В $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $(x^1, \ldots, x^n, \ldots, x^{2n}) = (p^1, \ldots, p^n, q^1, \ldots, q^n)$ такая билинейная форма ω тоже есть: если $v_i = (p_i^1, \ldots, p_i^n, q_i^1, \ldots, q_i^n)$ $(i = 1, 2)$, то

$$\omega(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} p_1^1 & q_1^1 \\ p_2^1 & q_2^1 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} p_1^n & q_1^n \\ p_2^n & q_2^n \end{vmatrix}.$$

Т. е. $\omega(v_1, v_2)$ — это сумма ориентированных площадей проекций натянутого на v_1, v_2 параллелограмма в координатные плоскости (p^j, q^j) $(j = 1, \ldots, n)$.

• Пусть g^* — линейная функция в $\mathbb{R}^{2n}$, заданная своими коэффициентами $g^* = (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$. Найдите координаты вектора g, сопоставляемого функции g^* посредством формы ω.

• Дифференциалу функции $f\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ в точке $x \in \mathbb{R}^{2n}$ посредством кососимметрической формы ω сопоставляется вектор, называемый, как уже было сказано, косым градиентом функции f в этой точке и обозначаемый $\operatorname{sgrad} f(x)$. Найдите выражение $\operatorname{sgrad} f(x)$ в канонических декартовых координатах пространства $\mathbb{R}^{2n}$.

• Найдите скалярное произведение $\langle \operatorname{grad} f(x), \operatorname{sgrad} f(x) \rangle$.

• Покажите, что вектор $\operatorname{sgrad} f(x)$ направлен вдоль поверхности уровня функции f.

• Закон движения $x = x(t)$ точки в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ таков, что $\dot{x}(t) = \operatorname{sgrad} f(x(t))$. Покажите, что $f(x(t)) = \mathrm{const}$.

• Запишите уравнение $\dot{x} = \operatorname{sgrad} f(x)$ в канонических обозначениях $(p^1, \ldots, p^n, q^1, \ldots, q^n)$ для координат и $H = H(p, q)$ для функции f. Полученная система, называемая системой уравнений Гамильтона, является одним из центральных объектов механики.

8. Канонические переменные и система уравнений Гамильтона.

a) В вариационном исчислении и фундаментальных вариационных принципах классической механики важную роль играет следующая *система уравнений Эйлера – Лагранжа:*

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial v}\right)(t, x, v) = 0, \\ v = \dot{x}(t), \end{cases}$$

где $L(t, x, v)$ — заданная функция переменных t, x, v, среди которых t обычно является временем, x — координатой, а v — скоростью. Это система двух уравнений на три переменные. Из нее обычно желают найти зависимости $x = x(t)$ и $v = v(t)$, что по существу сводится к отысканию закона движения $x = x(t)$, ибо $v = \dot{x}(t)$.

Запишите подробно первое уравнение системы, раскрыв производную $\frac{d}{dt}$, с учетом того, что $x = x(t)$ и $v = v(t)$.

b) Покажите, что если от переменных t, x, v, L перейти к так называемым *каноническим* переменным t, x, p, H, сделав преобразование Лежандра

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial L}{\partial v}, \\ H = pv - L \end{cases}$$

по переменным v, L, заменяя их на переменные p, H, то система Эйлера – Лагранжа приобретет симметричный вид

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

c) В механике чаще всего вместо x и $v = \dot{x}$ используют обозначения q и $\dot{q}$.

В многомерном случае, когда $L(t, q, \dot{q}) = L(t, q^1, \dots, q^m, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^m)$, система уравнений Эйлера – Лагранжа имеет вид

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)(t, q, \dot{q}) = 0 \quad (i = 1, \dots, m)\ .$$

Сделав преобразование Лежандра по переменным $\dot{q}, L$, перейдите от переменных $t, q, \dot{q}, L$ к каноническим переменным t, q, p, H и покажите, что при этом система уравнений Эйлера – Лагранжа перейдет в следующую систему уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \qquad \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, \dots, m)\ .$$

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

I семестр

Введение в анализ (число, функция, предел)

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

1. Действительные числа. Ограниченные (сверху, снизу) числовые множества. Аксиома полноты и существование верхней (нижней) грани множества. Неограниченность множества натуральных чисел, принцип Архимеда и всюду плотность множества рациональных чисел.

2. Основные леммы, связанные с полнотой множества действительных чисел $\mathbb{R}$ (вложенные отрезки, конечное покрытие, предельная точка).

3. Предел последовательности и критерий Коши его существования. Критерий существования предела монотонной последовательности.

4. Ряд и его сумма. Геометрическая прогрессия. Критерий Коши и необходимое условие сходимости ряда. Гармонический ряд. Абсолютная сходимость.

5. Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами. Теорема сравнения. Ряд $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$.

6. Предел функции. Основные базы предельного перехода. Определение предела функции при произвольной базе и его расшифровка в конкретных случаях. Бесконечно малые функции и их свойства. Сравнение финального поведения функций, асимптотические формулы и основные операции с символами $o(\cdot)$, $O(\cdot)$.

7. Взаимосвязь предельного перехода с арифметическими операциями и отношением порядка в $\mathbb{R}$. Предел $\dfrac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$.

8. Предел композиции функций и монотонной функции. Предел $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \infty$.

9. Критерий Коши существования предела функции.

10. Непрерывность функции в точке. Локальные свойства непрерывных функций (локальная ограниченность, сохранение знака, арифметические операции, непрерывность композиции). Непрерывность многочлена, рациональной функции и тригонометрических функций.

11. Глобальные свойства непрерывных функций (промежуточные значения, максимумы, равномерная непрерывность).

12. Разрывы монотонной функции. Теорема об обратной функции. Непрерывность обратных тригонометрических функций.

13. Закон движения, перемещение за малое время, вектор мгновенной скорости, траектория и касательная к ней. Определение дифференцируемости функции в точке. Дифференциал, его область определения и область значений. Единственность дифференциала. Производная вещественнозначной функции вещественного переменного и ее геометрический смысл. Дифференцируемость функций $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln|x|$, x^α.

14. Дифференцируемость и арифметические операции. Дифференцирование многочлена, рациональной функции, тангенса и котангенса.

15. Дифференциал композиции функций и обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций.

16. Локальный экстремум функции. Необходимое условие внутреннего экстремума дифференцируемой функции (лемма Ферма).

17. Теорема Ролля. Теоремы Лагранжа и Коши о конечном приращении (о среднем).

18. Формула Тейлора с остаточными членами в формах Коши и Лагранжа.

19. Ряд Тейлора. Тейлоровские разложения функций e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ (бином Ньютона).

20. Локальная формула Тейлора (с остаточным членом в форме Пеано).

21. Взаимосвязь характера монотонности дифференцируемой функции и положительности ее производной. Достаточные условия наличия или отсутствия локального экстремума в терминах первой, второй и высших производных.

22. Правило Лопиталя.

23. Выпуклая функция. Дифференциальные условия выпуклости. Расположение графика выпуклой функции по отношению к касательной.

24. Общее неравенство Иенсена для выпуклой функции. Выпуклость (вогнутость) логарифма. Классические неравенства Коши, Юнга, Гҷльдера и Минковского.

25. Преобразование Лежандра.

26. Комплексное число в алгебраической и тригонометрической записи. Сходимость последовательности комплексных чисел и ряда с комплексными членами. Критерий Коши. Абсолютная сходимость и достаточные признаки абсолютной сходимости ряда с комплексными членами. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

27. Круг сходимости и радиус сходимости степенного ряда. Определение функций e^z, $\cos z$, $\sin z$ $(z \in \mathbb{C})$. Формула Эйлера и взаимосвязь элементарных функций.

28. Дифференциальные уравнения как математическая модель явления, примеры. Метод неопределенных коэффициентов и метод ломаных Эйлера.

29. Первообразная, основные общие приемы ее отыскания (почленное интегрирование слагаемых, интегрирование по частям, замена переменной). Первообразные основных элементарных функций.

II семестр

Интеграл (функции одной переменной)

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

1. Интеграл Римана на отрезке. Нижние и верхние суммы, их геометрический смысл, поведение при измельчении разбиения и взаимные оценки. Теорема Дарбу, верхний и нижний интегралы Дарбу и критерий интегрируемости по Риману вещественнозначной функции на отрезке(в терминах сумм колебаний). Примеры классов интегрируемых функций.

2. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману (формулировка). Множества меры нуль, их общие свойства, примеры. Пространство интегрируемых функций и допустимые операции над интегрируемыми функциями.

3. Линейность, аддитивность и общая оценка интеграла.

4. Оценки интеграла от вещественнозначной функции. Теорема о среднем (первая).

5. Интеграл с переменным верхним пределом, его свойства. Существование первообразной у непрерывной функции. Обобщенная первообразная и ее общий вид.

6. Формула Ньютона – Лейбница. Замена переменной в интеграле.

7. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Формула Тейлора с интегральным остатком. Вторая теорема о среднем.

8. Аддитивная функция ориентированного промежутка и интеграл. Общая схема появления интеграла в приложениях, примеры: длина пути (и ее независимость от параметризации), площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, работа, энергия.

9. Интеграл Римана – Стилтьеса. Условия сведения к интегралу Римана. Дельта-функция Дирака и понятие обобщенной функции. Дифференцирование обобщенных функций и производная функции Хевисайда.

10. Понятие несобственного интеграла. Канонические интегралы. Критерий Коши и теорема сравнения для исследования сходимости несобственного интеграла. Интегральный признак сходимости ряда.

11. Метрическое пространство, примеры. Открытые и замкнутые подмножества. Окрестность точки. Индуцированная метрика, подпространство. Топологическое пространство. Окрестность точки, отделимость (аксиома Хаусдорфа). Топология, индуцируемая на подмножествах. Замыкание множества и описание относительно замкнутых подмножеств.

12. Компакт, его абсолютность. Замкнутость компакта и компактность замкнутого подмножества компакта. Вложенные компакты. Метрические компакты, ε-сеть. Критерий метрического компакта и его конкретизация в пространстве $\mathbb{R}^n$.

13. Полное метрическое пространство. Полнота $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ и пространства $C[a,b]$ непрерывных функций относительно равномерной сходимости.

14. Критерий непрерывности отображения топологических пространств. Сохранение компактности и связности при непрерывном отображении. Классические теоремы об ограниченности, максимуме и промежуточном значении для непрерывных функций. Равномерная непрерывность на метрическом компакте.

15. Норма (длина, модуль) вектора в векторном пространстве; важнейшие примеры. Пространство $L(X,Y)$ линейных непрерывных операторов и норма в нем. Непрерывность линейного оператора и конечность его нормы.

16. Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал, его область определения и область значений. Координатная запись дифференциала отображения $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Соотношения между дифференцируемостью, непрерывностью и наличием частных производных.

17. Дифференцирование композиции функций и обратной функции. Координатная запись полученных законов применительно к различным случаям отображений $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

18. Производная по вектору и градиент. Геометрические и физические примеры использования градиента (уровни функций, градиентный спуск, касательная плоскость; потенциальные поля; уравнение Эйлера динамики идеальной жидкости, закон Бернулли, работа крыла).

19. Однородные функции и соотношение Эйлера. Метод размерностей.

20. Теорема о конечном приращении. Ее геометрический и физический смысл. Примеры приложений (достаточное условие дифференцируемости в терминах частных производных; условие постоянства функции в области).

21. Высшие производные и их симметричность.

22. Формула Тейлора.

23. Экстремумы функций (необходимые и достаточные условия внутреннего экстремума).

24. Сжимающие отображения. Принцип Пикара – Банаха неподвижной точки.

25. Теорема о неявной функции.

26. Теорема об обратной функции. Криволинейные координаты и выпрямления. Гладкая поверхность размерности k в $\mathbb{R}^n$ и касательная плоскость к ней.

Способы задания поверхности и соответствующие им уравнения касательного пространства.

27. Теорема о ранге и зависимость функций.

28. Разложение диффеоморфизма в композицию простейших.

29. Условный экстремум (необходимый признак). Геометрическая, алгебраическая и физическая интерпретации метода Лагранжа.

30. Достаточный признак условного экстремума.

ДОПОЛНЕНИЕ 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
(вводная лекция для первого курса)

Два слова о математике

Математика — наука абстрактная. Например, она учит сложению, не спрашивая, считаем ли мы ворон, капитал или что-то еще. Поэтому математика одна из самых универсальных и общеупотребительных прикладных наук. В ней как науке, конечно, есть и еще много чего, почему к математике обычно относятся с уважением, например, она учит слышать аргумент и ценить истину.

Ломоносов считал, что математика ум в порядок приводит, а Галилей без обиняков сказал: «Великая книга природы написана языком математики». Подтверждения этому очевидны: все, кто желает читать эту книгу, изучают математику. Тут не только представители естественных наук или технических специальностей, но и гуманитарии. Например, на экономическом факультете МГУ есть кафедра математики, а в системе Академии наук есть Экономико-математический институт. Бытует даже мнение, что в науке столько от науки, сколько в ней математики. Хотя сказано слишком сильно, но в общем-то это довольно точное наблюдение.

Имея атрибуты языка, математика, конечно, не сводится к собственно языку (иначе ее изучали бы скорее филологи). Математика умеет не только перевести вопрос на математический язык, но обычно доставляет и метод решения сформулированной математической задачи.

Умение правильно поставить вопрос — большое искусство исследователя вообще и математика в частности.

Анри Пуанкаре — замечательный ученый, с именем которого студенты-математики встречаются почти в каждом математическом курсе, не без доли юмора подметил: «Математика — это искусство называть разные вещи одинаковыми именами». Например, точка — это и едва различимая в микроскоп частица, и самолет на планшете диспетчера, и город на карте, и планета на небосводе, и вообще все то, размерами чего можно пренебречь в рассматриваемых масштабах.

Итак, абстрактные понятия математики и их взаимосвязи, подобно числу, обслуживают громадную сферу конкретных явлений и закономерностей.

Число, функция, закон

К чудесам люди привыкают быстро и «Не может быть???» вскоре незаметно превращается в «Не может быть иначе!!!».

Мы уже настолько свыклись с тем, что $2 + 3 = 5$, что не видим тут никакого чуда. А ведь тут не сказано, что два яблока и еще три яблока будет пять яблок, а сказано, что это так и для яблок, и для слонов, и для всего прочего. Это мы уже отметили.

Потом мы свыкаемся с тем, что $a+b = b+a$, где теперь уже символы a и b могут означать и 2, и 3, и любые целые числа.

Функция, или функциональная зависимость, — это очередное математическое чудо. Оно сравнительно молодо: ему, как научному понятию, всего три с небольшим сотни лет, хотя в природе и даже в быту мы с ним сталкиваемся никак не реже, чем со слонами или даже с теми же яблоками.

Каждая наука или область человеческой деятельности относится к какой-то конкретной сфере объектов и их взаимосвязей. Эти связи, зависимости, законы математика описывает и изучает в отвлеченном и потому общеполезном виде, объединяя их термином *функция* или *функциональная зависимость* $y = f(x)$ *состояния* (значения) *одной величины* (y) *от состояния* (значения) *другой* (x).

Особенно важно то, что теперь уже речь не о постоянных, а о переменных величинах x и y, связанных законом f. Функция приспособлена к описанию развивающихся процессов и явлений, к описанию характера изменения их состояний и вообще к описанию зависимостей переменных величин.

Иногда закон f связи известен (дан) (например, государством или технологическим процессом) и тогда в условиях действия закона f мы, например, часто стараемся так выбрать стратегию, т. е. состояние (значение) доступной нашему выбору независимой переменной x, чтобы получить наиболее благоприятное для нас в том или ином отношении состояние (значение) нужной нам величины y (учитывая, что $y = f(x)$).

В других случаях (и это даже интереснее) ищется сам закон природы f, связывающий явления. И хотя это дело конкретных наук, математика и здесь бывает удивительно полезна потому, что часто по казалось бы очень малой исходной конкретной информации, которой располагают те или иные профессионалы, она, подобно Шерлоку Холмсу, способна сама дальше найти закон f (решая или исследуя некоторые новые, так называемые *дифференциальные уравнения*, которых не было у древних математиков и которые возникли с появлением дифференциального и интегрального исчисления на рубеже XVII – XVIII веков усилиями Ньютона, Лейбница, их предшественников и последователей).

Итак, открываем букварь современной математики.

Математическая модель явления (дифференциальное уравнение, или учимся писать)

Одним из наиболее ярких и долго сохраняющихся впечатлений от школьной математики, конечно, является маленькое чудо, когда что-то вам неизвестное вы заколдовываете буквой x или там буквами x, y, потом пишете что-то вроде $a \cdot x = b$ или какую-нибудь систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x - y = 2, \end{cases}$$

после чего парой математических заклинаний открываете то, что было неизвестно: $x = 1$, $y = -1$.

Давайте попробуем научиться хотя бы писать уравнения в новой ситуации, когда нам надо найти не какое-то одно число, а неизвестный нам закон связи важных для нас переменных величин, т. е. когда мы ищем нужную функцию. Рассмотрим некоторые примеры.

Для определенности мы сначала будем говорить о биологии (размножении микроорганизмов, росте биомассы, экологических ограничениях и т. п.), но будет ясно, что при желании все это можно перенести в другие сферы и говорить о росте капитала, ядерной реакции, атмосферном давлении и так далее, и тому подобное.

Для разминки полушуточный вопрос:

Простейший организм, который ежесекундно размножается делением пополам (удвоением), положили в пустой стакан. Через одну минуту стакан наполнился. За какое время наполнится пустой стакан, если в него положить не один, а два этих простейших организма?

Теперь ближе к делу и обещанным примерам.

1. Известно, что в благоприятных условиях скорость размножения микроорганизмов, т. е. скорость роста биомассы, пропорциональна (с некоторым коэффициентом пропорциональности k) наличному количеству биомассы. Надо найти закон $x = x(t)$ изменения биомассы во времени, если известно ее начальное состояние $x(0) = x_0$.

По нашим представлениям, знай мы сам закон $x = x(t)$ изменения величины x, мы бы знали и скорость ее изменения в любой момент времени t. Не вдаваясь пока в обсуждение того, как именно по $x(t)$ находить эту скорость, обозначим ее через $x'(t)$. Поскольку функция $x' = x'(t)$ порождается функцией $x = x(t)$, ее в математике называют *производной* от функции $x = x(t)$. (Как находить производную функции и многому другому учит дифференциальное исчисление. Оно впереди.)

Теперь можно коротко записать, что нам дано:

$$x'(t) = k \cdot x(t), \tag{1}$$

причем $x(0) = x_0$. Хотим же мы найти саму зависимость $x = x(t)$.

Мы написали первое *дифференциальное уравнение* (1). Вообще, дифференциальными называют уравнения, содержащие производные (некоторые оговорки и уточнения здесь пока неуместны). Кстати, для упрощения текста в записи уравнения независимую переменную часто опускают. Например, уравнение (1) пишут в виде $x' = k \cdot x$. Если бы искомая функция была обозначена буквой f или u, то то же уравнение имело бы вид $f' = k \cdot f$ или $u' = k \cdot u$ соответственно.

Уже сейчас ясно, что если мы научимся не только писать, но и решать или исследовать дифференциальные уравнения, то мы сможем многое узнать и предвидеть. Именно поэтому сакраментальная фраза Ньютона, относившаяся к новому исчислению, звучала примерно так: «Полезно решать дифференциальные уравнения».

Упражнение. Свяжите написанное уравнение с рассмотренным примером размножения в стакане. Каковы тут коэффициент k, начальное условие $x(0) = x_0$ и сама зависимость $x = x(t)$?

Попробуем по горячим следам записать уравнением еще несколько конкретных вопросов.

2. Допустим теперь, как это всегда и случается, что еды не бесконечно много и среда может прокормить не более чем M особей или биомассу, не превышающую значения M. Тогда, надо полагать, скорость роста биомассы будет уменьшаться, например, пропорционально остающимся возможностям среды. За меру остающихся возможностей можно взять разность $M - x(t)$ или лучше взять безразмерную величину $1 - \frac{x(t)}{M}$. Этой ситуации вместо уравнения (1), очевидно, отвечает уравнение

$$x' = k \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{M}\right), \tag{2}$$

которое переходит в (1) на стадии, когда $x(t)$ еще много меньше M. Наоборот, когда $x(t)$ близко к M, скорость роста становится близкой к нулю, т. е. рост прекращается, что естественно. Как именно выглядит закон $x = x(t)$ в этом случае, мы найдем позже, овладев кое-какими навыками.

Упражнение. Тело, имевшее начальную температуру T_0, остывает в среде, имеющей постоянную температуру C. Пусть $T = T(t)$ закон изменения температуры тела во времени. Напишите уравнение, которому должна удовлетворять эта функция, считая, что скорость остывания пропорциональна разности температур тела и среды.

Скорость $v(t)$ изменения величины $x(t)$ мы назвали производной функции $x = x(t)$ и обозначили $x'(t)$. Ускорение $a(t)$, как известно, это скорость изменения скорости $v(t)$. Значит $a(t) = v'(t) = (x')'(t)$, т. е. по отношению к исходной функции это производная от ее производной. Она называется второй производной исходной функции и часто обозначается как $x''(t)$. (Другие обозначения появятся позже.) Если мы умеем находить первую производную, то, повторяя процедуру, можно определить производную $x^{(n)}(t)$ любого порядка n от исходной функции $x = x(t)$.

3. Пусть, например, $x = x(t)$ — закон движения точки массы m, т. е. координаты положения точки как функции времени. Для простоты будем считать, что движение происходит вдоль прямой (горизонтальной или вертикальной), тогда координата только одна.

Классический закон Ньютона $m \cdot a = F$, связывающий силу, действующую на точку массы m, с вызванной этим действием ускорением точки, теперь можно записать в виде

$$m \cdot x''(t) = F(t) \tag{3}$$

или, сокращенно, $m \cdot x'' = F$.

Если действующая сила $F(t)$ известна, то соотношение $m \cdot x'' = F$ можно рассматривать как дифференциальное уравнение (второго порядка) относительно функции $x(t)$.

Например, если F — это сила тяжести у поверхности Земли, то $F = mg$, где g — ускорение свободного падения. В этом случае наше уравнение приобретает вид $x''(t) = g$. Как вы знаете, еще Галилей нашел, что в свободном падении $x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$, где x_0 — начальное положение, а v_0 — начальная скорость точки.

Чтобы хотя бы проверить, что указанная функция удовлетворяет уравнению, уже надо уметь дифференцировать функцию, т. е. находить ее производную. В нашем случае нужна даже вторая производная.

Чуть ниже мы приведем табличку некоторых функций и их производных. Вывод ее будет сделан позже во время систематического изложения дифференциального исчисления. А сейчас попробуйте сами сделать следующее.

Упражнение. Напишите уравнение свободного падения в атмосфере. В этом случае возникает сила сопротивления. Считайте ее пропорциональной первой (или второй) степени скорости движения. (Скорость свободного падения не растет до бесконечности именно ввиду присутствия силы сопротивления.)

Итак, надо бы научиться вычислять производные.

Скорость, производная, дифференцирование

Рассмотрим сначала знакомую ситуацию, где мы можем обратиться к нашей интуиции (и сменим обозначение $x(t)$ на $s(t)$).

Пусть точка движется вдоль числовой оси, $s(t)$ — ее координата в момент t, а $v(t) = s'(t)$ — ее скорость в тот же момент t. За промежуток времени h, прошедший после момента t, точка сместится в положение $s(t+h)$. По нашим представлениям о скорости, величина $s(t+h) - s(t)$ перемещения точки за малый промежуток времени h, прошедший после момента t, и ее скорость $v(t)$ в момент t связаны соотношением

$$s(t+h) - s(t) \approx v(t) \cdot h \tag{4}$$

или, иначе, $v(t) \approx \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$, и это приближенное равенство тем точнее, чем меньше промежуток времени h, прошедший после момента t.

Значит, надо полагать,

$$v(t) := \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h},$$

т. е. мы определяем $v(t)$ как *предел* отношения приращения функции к приращению ее аргумента, когда последнее стремится к нулю.

Теперь нам ничего не стоит, копируя этот пример, дать общее определение значения $f'(x)$ *производной* f' *функции* f *в точке* x:

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{5}$$

т. е. $f'(x)$ есть предел отношения *приращения* $\Delta f = f(x+h) - f(x)$ *функции* к *приращению* $\Delta x = (x+h) - x$ *ее аргумента*, когда последнее стремится к нулю.

Соотношение (5) можно переписать в подобной (4) другой и, быть может, самой удобной и полезной форме:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h), \tag{6}$$

где $o(h)$ — некоторая *величина* (поправка), *малая по сравнению с* h *при стремлении* h *к нулю*. (Последнее означает, что отношение $o(h)/h$ стремится к нулю при стремлении h к нулю.)

Проделаем несколько пробных расчетов.

1. Пусть f — постоянная, т. е. $f(x) \equiv c$. Тогда, очевидно, $\Delta f = f(x+h) - f(x) \equiv 0$ и $f'(x) \equiv 0$, что естественно: скорость изменения равна нулю, если изменений нет.

2. Если $f(x) = x$, то $f(x+h) - f(x) = h$, поэтому $f'(x) \equiv 1$. А если $f(x) = kx$, то $f(x+h) - f(x) = kh$ и $f'(x) \equiv k$.

3. Кстати, тут можно сделать два очевидных, но весьма полезных общих наблюдения: если функция f имеет своей производной f', то функция cf, где c — числовой множитель, имеет своей производной cf', т. е. $(cf)' = cf'$; в этом же смысле $(f+g)' = f' + g'$, т. е. производная суммы функций равна сумме их производных, если последние определены.

4. Пусть $f(x) = x^2$. Тогда $f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = 2xh + h^2 = 2xh + o(h)$, поэтому $f'(x) = 2x$.

5. Аналогично, если $f(x) = x^3$, то

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^3 - x^3 = 3x^2h + 3xh^2 + h^3 = 3x^2h + o(h),$$

поэтому $f'(x) = 3x^2$.

6. Теперь понятно, что вообще, если $f(x) = x^n$, то поскольку

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^n - x^n = nx^{n-1}h + o(h),$$

имеем $f'(x) = nx^{n-1}$.

7. Значит, если имеем многочлен

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

то

$$P'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}.$$

Пробное прощупывание определения производной сделали. Разрабатывать и осваивать технику и практику дифференцирования надо будет отдельно. А сейчас для примера и вашего сведения приведем небольшую табличку функций и их производных. Потом мы ее получим, расширим и уточним.

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$\ldots$	$f^{(n)}(x)$
a^x	$a^x \ln a$	$a^x \ln^2 a$	$\ldots$	$a^x \ln^n a$
e^x	e^x	e^x	$\ldots$	e^x
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$\ldots$	$\sin(x + n\pi/2)$
$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\ldots$	$\cos(x + n\pi/2)$
$(1+x)^\alpha$	$\alpha(1+x)^{\alpha-1}$	$\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$	$\ldots$	?
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$	$\ldots$	?

Здесь e — число ($e = 2{,}7\ldots$), такое же вездесущее в анализе, как π в геометрии. Логарифм по основанию e вместо $\log_e$ часто обозначают через ln, что и отражено во второй строчке таблицы. Использование логарифмов по этому основанию, называемых натуральными логарифмами, упрощает многие формулы (что, например, видно из сравнения второй и третьей строк таблицы).

Упражнение. Считая, что столбец f' правильный, проверьте столбец $f^{(n)}$ и дозаполните таблицу, сняв вопросы.

После этого вычислите в каждом случае значение $f^{(n)}(0)$.

Упражнение. Попробуйте найти производную функции $f(x) = e^{kx}$ и решение уравнения (1). Выясните, за какое время начальное состояние x_0 (капитала, биомассы или еще чего-то, подчиняющегося этому уравнению) удвоится.

Высшие производные, зачем?

Замечательным и весьма полезным развитием центрального соотношения (6), которое можно переписать в виде

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h), \tag{7}$$

является следующая формула (формула Тейлора)

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{1!}f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x)h^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n + o(h^n). \tag{8}$$

Если положить здесь $x = 0$, а потом букву h заменить буквой x, то получим

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + o(x^n). \tag{9}$$

Например, если $f(x) = (1+x)^\alpha$, то вслед за Ньютоном найдем, что

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n). \tag{10}$$

Иногда в формуле (9) можно продолжить суммирование до бесконечности, ликвидировав при этом поправочный член.

В частности,

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots \tag{11}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + \ldots \tag{12}$$

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \ldots \tag{13}$$

Мы получили представление сравнительно сложных функций в виде суммы (бесконечной суммы — *ряда*) простейших функций, допускающих вычисления обычными действиями арифметики. Конечные куски этих сумм — полиномы. Они дают хорошие приближения раскладываемых в такой ряд функций.

Снова к числу

Мы все время молчаливо предполагали, что имеем дело с функциями, определенными на множестве *вещественных чисел*. Но правые части равенств (11), (12), (13) имеют смысл и при подстановке вместо x *комплексного числа* $z = x + iy$. Тогда мы сможем сказать, что бы значило e^z, $\cos z$, $\sin z$.

Упражнение. Откройте вслед за Эйлером связывающую элементарные функции формулу $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и вытекающее из нее замечательно красивое соотношение $e^{i\pi} + 1 = 0$, связывающее основные константы математических наук (арифметики, алгебры, анализа, геометрии и даже логики).

И что теперь?

Как говорится, «на пальцах», без подробностей и обоснований вам дано некоторое представление о дифференциальном исчислении — ядре первого семестра курса математического анализа. По дороге мы встретились с понятиями числа, функции, предела, производной, ряда …, которых пока коснулись только поверхностно.

Теперь, когда вы знаете, зачем что нужно, придется на время погрузиться в подробное, тщательное рассмотрение всех этих понятий и объектов. Понимание их необходимо для профессионального математика. Пользователю это не обязательно. Большинство водит автомобиль, не открывая капот. Но это только потому, что кто-то хорошо разбирается в двигателях и сделал надежно работающий аппарат.

ДОПОЛНЕНИЕ 2

НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Корни уравнений и неподвижные точки отображений

Заметим, что уравнение $f(x) = 0$, очевидно, равносильно уравнению $\alpha(x)f(x) = 0$, если $\alpha(x) \neq 0$. Последнее уравнение, в свою очередь, равносильно соотношению $x = x - \alpha(x)f(x)$, в котором x можно интерпретировать как неподвижную точку отображения $\varphi(x) := x - \alpha(x)f(x)$.

Таким образом, отыскание корней уравнений равносильно отысканию неподвижных точек соответствующих отображений.

Сжимающие отображения и итерационный процесс

Отображение $\varphi\colon X \to X$ множества $X \subset \mathbb{R}$ в себя будем называть *сжимающим отображением*, если существует такое число q, $0 \leqslant q < 1$, что для любой пары точек x', x'' и их образов $\varphi(x'), \varphi(x'')$ выполняется неравенство $|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leqslant q|x' - x''|$.

Ясно, что это определение без изменений распространяется на отображения любых множеств, где определено расстояние $d(x', x'')$ между точками; в нашем случае $d(x', x'') = |x' - x''|$.

Ясно также, что сжимающее отображение непрерывно и может иметь не более одной неподвижной точки.

Пусть $\varphi\colon [a, b] \to [a, b]$ — сжимающее отображение отрезка $[a, b]$ в себя. Покажем, что *итерационный процесс* $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, начинающийся в любой точке x_0 этого отрезка, приводит к точке $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, неподвижной для отображения φ.

Заметим сначала, что

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant q|x_n - x_{n-1}| \leqslant \ldots \leqslant q^n|x_1 - x_0|,$$

поэтому для любых натуральных m, n, таких что $m > n$, вставляя промежуточные точки и используя неравенство треугольника, получаем оценку

$$|x_m - x_n| \leqslant |x_m - x_{m-1}| + \ldots + |x_1 - x_0| \leqslant \\ \leqslant (q^m + \ldots + q^n)|x_1 - x_0| < \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|,$$

из которой следует, что последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальная (последовательность Коши).

Значит, по критерию Коши она сходится к некоторой точке x отрезка $[a, b]$. Эта точка — неподвижная точка отображения $\varphi\colon [a, b] \to [a, b]$, ибо переход к пределу при $n \to \infty$ в соотношении $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ дает равенство $x = \varphi(x)$.

(Здесь мы воспользовались тем очевидным фактом, что сжимающее отображение непрерывно; кстати, оно даже равномерно непрерывно.)

Переход к пределу при $m \to \infty$ в соотношении $|x_m - x_n| < \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$ дает оценку

$$|x - x_n| < \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$$

величины уклонения приближения x_n от неподвижной точки x отображения φ.

Метод касательных (метод Ньютона)

Доказывая теорему о том, что непрерывная на отрезке вещественнозначная функция, принимающая на концах отрезка значения разных знаков, имеет на этом отрезке по крайней один нуль (точку, где $f(x) = 0$), мы предъявили и простейший (но зато универсальный) алгоритм отыскания этой точки (деление отрезка пополам). Скорость сходимости тут порядка 2^{-n}.

В случае дифференцируемой выпуклой функции можно пользоваться значительно более эффективным в смысле скорости сходимости методом, предложенным еще Ньютоном.

Строим касательную к графику данной функции f в некоторой точке $(x_0, f(x_0))$, где $x_0 \in [a, b]$. Находим точку x_1, где эта касательная пересекает ось абсцисс. Повторяя процесс, получаем последовательность $\{x_n\}$ точек, которые быстро сходятся к точке x, в которой $f(x) = 0$. (Можно проверить, что каждая следующая итерация приводит к удвоению верных значащих цифр приближения к x.)

Аналитически, как легко проверить (проверьте!), метод касательных сводится к итерационному процессу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Например, решение уравнения $x^m - a = 0$, т.е. вычисление $\sqrt[m]{a}$, при этом сводится к итерационному процессу

$$x_{n+1} = \frac{1}{m}\left((m-1)x_n + \frac{a}{x_n^{m-1}}\right).$$

В частности, для вычисления $\sqrt{a}$ методом касательных получаем

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Метод Ньютона, как видно из приведенных формул, ищет неподвижные точки отображения $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Оно является специальным случаем рассмотренного в самом первом разделе отображения $\varphi(x) = x - \alpha(x)f(x)$ и получается из него при $\alpha(x) = \frac{1}{f'(x)}$.

Заметим, что в общем случае отображение $\varphi(x) = x - \alpha(x)f(x)$ и даже отображение $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, участвующее в методе касательных, не обязано быть сжимающим. Более того, как показывают простые примеры, в случае общей функции f даже метод касательных не всегда приводит к сходящемуся итерационному процессу.

Если же в выражении $\varphi(x) = x - \alpha(x)f(x)$ функцию $\alpha(x)$ удается выбрать так, что на рассматриваемом отрезке $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$, то отображение $\varphi\colon [a, b] \to [a, b]$, конечно, будет сжимающим.

В частности, если в качестве α взять постоянную $\frac{1}{f'(x_0)}$, то получим $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)}$ и $\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x_0)}$. Если производная функции f непрерывна по крайней мере в точке x_0, то в некоторой ее окрестности будем иметь $|\varphi'(x)| = \left|1 - \frac{f'(x)}{f'(x_0)}\right| \leqslant q < 1$. Если отображение φ переводит эту окрестность в себя (что не всегда так), то стандартный итерационный процесс, индуцированный сжимающим отображением φ этой окрестности, приведет к единственной в этой окрестности неподвижной точке отображения φ, в которой исходная функция f обращается в нуль.

ДОПОЛНЕНИЕ 3

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕЖАНДРА (первое обсуждение)

Начальное определение преобразования Лежандра и общее неравенство Юнга

Преобразованием Лежандра функции f переменной x называется новая функция f^* новой переменной x^*, определяемая соотношением

$$f^*(x^*) := \sup_x (x^* x - f(x)), \tag{1}$$

где верхняя грань берется по переменной x при фиксированном значении x^*.

Упражнения. 1. Проверьте, что функция f^* выпукла на своей области определения.

2. Нарисуйте график функции f, прямую x^*x и укажите геометрический смысл величины $f^*(x^*)$.

3. Найдите $f^*(x^*)$, когда $f(x) = |x|$ и когда $f(x) = x^2$.

4. Заметьте, что из (1), очевидно, следует, что

$$x^*x \leqslant f^*(x^*) + f(x) \tag{2}$$

при любых значениях аргументов x^*, x из областей определения функций f^* и f соответственно. Соотношение (2) обычно называется *общим неравенством Юнга* или *неравенством Юнга – Фенхеля*, а функцию f^*, например в выпуклом анализе, часто называют *двойственной по Юнгу* к функции f.

Конкретизация определения в случае выпуклых функций

Если бы верхняя грань, фигурирующая в определении (1), достигалась в некоторой внутренней точке x области определения функции f, а сама эта функция была бы гладкой (или по крайней мере дифференцируемой), то мы нашли бы, что

$$x^* = f'(x) \tag{3}$$

и при этом

$$f^*(x^*) = x^*x - f(x) = xf'(x) - f(x). \tag{4}$$

Тем самым в этом случае преобразование Лежандра конкретизируется в виде равенств (3), (4), из которых первое дает аргумент x^*, а второе — значение $f^*(x^*)$ функции f^* — преобразования Лежандра функции f. (Заметим, что оператор $xf'(x) - f(x)$ встречался уже у Эйлера.)

Если функция f к тому же еще и выпукла, то,

во-первых, условие (3) выделит не просто локальный экстремум, а локальный максимум (проверьте!), который в этом случае, очевидно, будет и абсолютным максимумом;

во-вторых, ввиду монотонного возрастания производной строго выпуклой функции уравнение (3) для такой функции однозначно разрешимо относительно x.

Если уравнение (3) допускает явное решение $x = x(x^*)$, то, подставляя его в (4), получим явное выражение $f^*(x^*)$.

Упражнения. 1. Найдите преобразование Лежандра функции $\frac{1}{\alpha}x^\alpha$ при $\alpha > 1$ и получите классическое неравенство Юнга

$$ab \leqslant \frac{1}{\alpha}a^\alpha + \frac{1}{\beta}b^\beta, \tag{5}$$

где $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

2. Какова область определения преобразования Лежандра гладкой строго выпуклой функции f, имеющей асимптотами прямые ax и bx при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$ соответственно?

3. Найдите преобразование Лежандра функции e^x и докажите неравенство

$$xt \leqslant e^x + t\ln\frac{t}{e}\ . \tag{6}$$

Инволютивность преобразования Лежандра выпуклой функции

Как уже было отмечено, соотношение (2) или эквивалентное ему неравенство

$$f(x) \geqslant xx^* - f^*(x^*) \tag{7}$$

выполнено при любых значениях аргументов x, x^* из областей определения функций f и f^* соответственно.

Вместе с тем, как показывают формулы (3), (4), если x и x^* связаны соотношением (3), то последнее неравенство (7) обращается в равенство, по крайней мере в случае гладкой строго выпуклой функции f. Вспоминая определение (1) преобразования Лежандра, заключаем, что в этом случае

$$(f^*)^* = f. \tag{8}$$

Итак, преобразование Лежандра гладкой строго выпуклой функции *инволютивно*, т. е. повторное его применение приводит к исходной функции.

Упражнения. 1. Верно ли, что $f^{**} = f$ для любой гладкой функции f?

2. Верно ли, что $f^{***} = f^*$ для любой гладкой функции f?

3. Дифференцируя соотношение (4), с учетом (3) и при условии, что $f''(x) \neq 0$, покажите, что $x = f^*(x^*)$ и, следовательно, $f(x) = xx^* - f^*(x^*)$ (инволютивность).

4. Проверьте, что в соответствующих точках x, x^*, связанных равенством (3), $f''(x) = 1/(f^*)''(x^*)$ и $f^{(3)}(x) = -(f^*)^{(3)}(x^*)/((f^*)'')^2(x^*)$.

5. Семейство прямых $px + p^4$, зависящих от параметра p, является семейством касательных к некоторой кривой (*огибающей* этого семейства). Найдите уравнение этой кривой.

Заключительные замечания и комментарий

В рамках разговора о выпуклых функциях мы дали начальные представления о преобразовании Лежандра на уровне функций одной переменной. Однако уже они облегчат восприятие этого преобразования и работу с ним в ряде важных более общих случаях применения преобразования Лежандра в теоретической механике, термодинамике, уравнениях математической физики, вариационном исчислении, выпуклом анализе, контактной геометрии, ... с которыми многим еще предстоит иметь дело.

Там будут проанализированы различные детали и возможные развития самого понятия преобразования Лежандра. Здесь же добавим только следующее. Как показывает равенство (3), аргументом преобразования Лежандра является производная или, равносильно тому, дифференциал исходной функции.

Если бы аргумент x был, например, вектором линейного пространства X со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, то обобщением определения (1), естественно, было бы соотношение

$$f^*(x^*) := \sup_x(\langle x^*, x\rangle - f(x)). \tag{9}$$

Если под x^* вообще понимать линейную функцию на пространстве X, т. е. считать, что x^* — элемент двойственного X пространства X^* и действие x^* на вектор x, т. е. $x^*(x)$, по-прежнему обозначать через $\langle x^*, x\rangle$, то определение (9) сохранится и будет совсем ясно, что если функция f была определена на области пространства X, то ее преобразование Лежандра f^* оказывается определенным в области пространства X^*, двойственного пространству X.

ДОПОЛНЕНИЕ 4

ИНТЕГРАЛ РИМАНА – СТИЛТЬЕСА, ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ И ИДЕЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ (начальные представления)

Интеграл Римана – Стилтьеса

Конкретная задача и наводящие соображения. Мы рассмотрели целый ряд примеров эффективного использования интеграла при вычислении площадей, объемов тел вращения, длин путей, работы сил, энергии... Обнаружили потенциальность гравитационного поля и подсчитали вторую космическую скорость для Земли. Располагая аппаратом интегрального исчисления, убедились, например, в том, что длина пути не зависит от его параметризации. Заодно отметили, что некоторые вычисления (например, длины эллипса) связаны с неэлементарными функциями (в данном случае с эллиптическими).

Все перечисленные выше величины (длины, площади, объемы, работа, ...), как и сам интеграл Римана, аддитивны. Мы знаем, что любая аддитивная функция $I[\alpha,\beta]$ ориентированного промежутка $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ имеет вид $I[\alpha,\beta]=F(\beta)-F(\alpha)$, если положить $F(x)=I[a,x]+C$. В частности, можно взять произвольную функцию F и по ней построить аддитивную функцию $I[\alpha,\beta]=F(\beta)-F(\alpha)$, считая $I[a,x]=F(x)$. Если функция F разрывна на отрезке $[a,b]$, то там разрывна и функция $I[a,x]$. Но тогда она не может быть представлена в виде интеграла Римана $\int\limits_a^x p(t)\,dt$ ни от какой интегрируемой по Риману функции (плотности p), т. к. такой интеграл, как мы знаем, непрерывен по x.

Пусть, например, отрезок $[-1,1]$ — нить, в середине которой закреплена бусинка массы 1. Если $I[\alpha,\beta]$ — масса, попавшая в промежуток $[\alpha,\beta] \subset [-1,1]$, то функция $I[-1,x]$ равна нулю, пока $-1 \leqslant x < 0$, и равна единице, когда $0 \leqslant x \leqslant 1$. Если попытаться описать такое распределение массы на отрезке в терминах плотности распределения (т. е. предела отношения массы, попавшей в окрестность точки, к величине окрестности, когда последняя стягивается к точке), то мы должны были бы считать, что $p(x) = 0$ при $x \neq 0$ и $p(x) = +\infty$ при $x = 0$. Физики, а теперь и все, вслед за Дираком называют эту «функцию» (такую плотность распределения) дельта-функцией, обозначают ее через δ и пишут, что $\int\limits_\alpha^\beta \delta(x)\,dx = 1$, если $\alpha < 0 < \beta$ и $\int\limits_\alpha^\beta \delta(x)\,dx = 0$, если $\alpha < \beta < 0$ или если $0 < \alpha < \beta$, каковы бы ни были числа α и β.

Разумеется, интеграл, понимаемый традиционно, например по Риману, здесь не имеет смысла (уже по одному тому, что под интегралом стоит неограниченная «функция»). Вольное употребление символа интеграла здесь — всего-навсего замена аддитивной функции $I[\alpha,\beta]$, рассмотренной выше, когда мы говорили о бусинке на нитке.

Пример (центр масс). Вспомним фундаментальное уравнение $m\ddot{r} = F$ движения точки массы m под действием силы F, где r — радиус-вектор точки. Если имеется система из n материальных точек, то для каждой из них имеется свое равенство $m_i\ddot{r}_i = F_i$. Суммируя эти равенства, получаем соотношение $\sum\limits_{i=1}^n m_i\ddot{r}_i = \sum\limits_{i=1}^n F_i$, которое можно переписать в виде $M \sum\limits_{i=1}^n \frac{m_i}{M}\ddot{r}_i = \sum\limits_{i=1}^n F_i$ или в форме $M\ddot{r}_M = F$, где $M = \sum\limits_{i=1}^n m_i$, $F = \sum\limits_{i=1}^n F_i$ и $r_M = \sum\limits_{i=1}^n \frac{m_i}{M} r_i$. То есть если совокупную массу системы поместить в точку пространства, радиус-вектор которой $r_M = \sum\limits_{i=1}^n \frac{m_i}{M} r_i$, то под воздействием силы $F = \sum\limits_{i=1}^n F_i$ она будет двигаться согласно закону Ньютона, какими бы сложными ни были взаимные движения отдельных частей системы.

Точка пространства, радиус-вектор которой $\sum\limits_{i=1}^n \frac{m_i}{M} r_i$ мы нашли, называется *центром масс системы материальных точек.*

Пусть теперь перед нами стоит задача найти центр масс материального тела, т. е. области D пространства, в которой как-то распределена масса. Пусть в элементе объема dv сосредоточена масса dm, и пусть M — общая масса тела D. Тогда, надо полагать, $M = \int\limits_D dm$, а центр масс надо бы находить по формуле $\frac{1}{M}\int\limits_D r\,dm$, где r — радиус-вектор элемента массы dm.

По объемам мы пока интегрировать не умеем, поэтому рассмотрим одномерный случай, который тоже вполне содержателен. Итак, вместо области D рассмотрим отрезок $[a, b]$ координатной оси $\mathbb{R}$.

Тогда $M = \int\limits_a^b dm$, а центр масс надо бы находить по формуле $\frac{1}{M}\int\limits_a^b x\,dm$, где x — координата элемента массы dm, который поэтому можно написать и поточнее как $dm(x)$.

Смысл написанного, по-видимому, должен быть следующим. Берем разбиение P отрезка $[a, b]$ с какими-то отмеченными точками $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Отрезку $[x_{i-1}, x_i]$ отвечает масса Δm_i. Составляем суммы $\sum\limits_i \Delta m_i$, $\sum\limits_i \xi_i \Delta m_i$ и, переходя к пределу, когда параметр $\lambda(P)$ разбиения стремится к нулю, находим соответственно то, что обозначено как $\int\limits_a^b dm$ и $\int\limits_a^b x\,dm$.

Мы приходим к следующему обобщению интеграла Римана.

Определение интеграла Римана – Стилтьеса. Пусть f и g — функции, вещественно-, комплексно- или векторнозначные на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Пусть $(P, \xi) = (a = x_0 \leqslant \xi_1 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant \xi_n \leqslant x_n = b)$ — разбиение этого отрезка с отмеченными точками и параметром $\lambda(P)$. Составим сумму $\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta g_i$, где $\Delta g_i = g(x_i) - g(x_{i-1})$.

Интегралом Римана – Стилтьеса функции f по функции g на отрезке $[a, b]$ называется величина

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) := \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta g_i, \tag{1}$$

если указанный предел существует.

В частности, когда $g(x) = x$, мы возвращаемся к стандартному интегралу Римана.

Случай сведения интеграла Римана – Стилтьеса к интегралу Римана. Отметим также, что если функция g гладкая, а f — функция, интегрируемая по Риману на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx, \tag{2}$$

т. е. в этом случае вычисление интеграла Римана – Стилтьеса сводится к вычислению интеграла Римана от функции fg' на рассматриваемом отрезке.

В самом деле, пользуясь гладкостью функции g и теоремой о среднем, перепишем сумму, стоящую в равенстве (1) справа, в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta g_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g'(\tilde{\xi}_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g'(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g'(\tilde{\xi}_i) - g'(\xi_i))\Delta x_i.$$

В силу равномерной непрерывности функции g' на отрезке $[a, b]$ и ограниченности функции f, последняя сумма стремится к нулю при $\lambda(P) \to \to 0$. Предпоследняя сумма есть обычная интегральная сумма для интеграла, стоящего в (2) справа. В силу сделанных предположений о функциях f и g, функция fg' интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$. Поэтому указанная сумма при $\lambda(P) \to 0$ стремится к значению этого интеграла, что и завершает доказательство равенства (2).

Задача. Мы провели доказательство, используя теорему о среднем, справедливую для вещественнозначных функций. Используя теорему о конечном приращении, проведите доказательство для векторнозначных (например, комплекснозначных) функций.

Функция Хевисайда и пример вычисления интеграла Римана – Стилтьеса. *Функция Хевисайда* $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определяется соотношениями $H(x) = 0$ при $x < 0$ и $H(x) = 1$ при $0 \leqslant x$.

Подсчитаем интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dH(x)$. По определению (1) составим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta H_i = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(H(x_i) - H(x_{i-1}))$. В силу определения функции Хевисайда эта сумма, очевидно, равна нулю, если отрезок $[a,b]$ не содержит точки 0, и равна $f(\xi_i)$, если точка 0 попала на некоторый отрезок $[x_{i-1}, x_i]$ (точнее, внутрь него или в его конец x_i). В первом случае интеграл, конечно, равен нулю.

Во втором случае при $\lambda(P) \to 0$ точка $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ стремится к 0, поэтому если функция f непрерывна в 0, то пределом рассматриваемых сумм будет величина $f(0)$.

Если же функция f разрывна в 0, то малым изменением значения ξ_i можно заметно менять значение $f(\xi_i)$ и, значит, интегральные суммы не будут иметь предела при $\lambda(P) \to 0$.

Ясно, что последнее наблюдение имеет общий характер: совпадение точек разрыва функций f и g, участвующих в интеграле Римана – Стилтьеса (1), неизбежно ведет к отсутствию предела, если такая точка оказалась внутри отрезка интегрирования.

Итак, проведенный подсчет показывает, что если, например, φ — функция класса $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, т. е. заданная на всей прямой непрерывная вещественнозначная функция, тождественно равная нулю вне некоторого ограниченного множества, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dH(x) = \varphi(0). \tag{3}$$

Обобщенные функции

Дельта-функция Дирака — эвристическое описание. Как уже было отмечено выше, физики, и не только они, вслед за Дираком используют дельта-функцию δ. Эта «функция» равна нулю всюду, кроме начала координат, где она бесконечна. Но вместе с тем (и это главное)

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \delta(x)\,dx = 1, \qquad \text{если } \alpha < 0 < \beta,$$

и
$$\int_{\alpha}^{\beta} \delta(x)\,dx = 0, \qquad \text{если } \alpha < \beta < 0 \text{ или если } 0 < \alpha < \beta,$$
каковы бы ни были числа α и β.

Естественно считать, что умножение подынтегральной функции на число приводит к умножению интеграла на это же число. Но тогда если некоторая функция φ непрерывна в начале координат, то, учитывая, что она почти постоянна в малой окрестности $U(0)$ начала координат, а интеграл $\int\limits_{U(0)} \delta(x)\,dx = 1$, заключаем, что должно быть
$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\delta(x)\,dx = \varphi(0). \tag{4}$$
Сравнивая соотношения (2), (3) и (4) и продолжая эту смелую цепочку заключений, приходим к выводу, что
$$H'(x) = \delta(x). \tag{5}$$
Разумеется, ни в какую классику это не укладывается. Но изложенные соображения вполне конструктивны, и если бы непременно надо было написать значение $H'(x)$, то мы написали бы именно то, что и сейчас: 0, если $x \neq 0$, и $+\infty$, если $x = 0$.

Соответствие функция — функционал. Один из способов выхода из сложившихся затруднений состоит в следующей идее расширения (обобщения) самого понятия «функция».

Будем смотреть на функцию через ее взаимодействие с другими функциями. (Ведь нас обычно не интересует внутреннее устройство аппарата, например человека, и мы считаем, что знаем объект, если знаем, как объект отвечает на входные воздействия, на те или иные входящие вопросы.)

Возьмем интегрируемую на отрезке $[a, b]$ функцию f и рассмотрим порождаемый ею функционал A_f (функцию на функциях)
$$A_f(\varphi) = \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{6}$$

Чтобы миновать технические затруднения, будем считать *пробные функции* φ гладкими и даже из класса $C_0^{(\infty)}[a,b]$ бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль в окрестности концов отрезка. Можно даже продолжить обе функции f, φ нулем вне отрезка $[a,b]$ и вместо интеграла по отрезку писать интеграл

$$A_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{7}$$

Зная значения функционала A_f на пробных функциях, мы, если надо, легко найдем значение $f(x)$ функции f в любой точке, где эта функция непрерывна.

Задача. a) Проверьте, что величина $\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)\,dt$ (интегральное среднее) при $\varepsilon \to +0$ стремится к $f(x)$ в любой точке x непрерывности интегрируемой функции f.

b) Покажите, что ступенчатую функцию $\bar{\delta}_\varepsilon$, равную нулю вне отрезка $[-\varepsilon, \varepsilon]$ и равную $\frac{1}{2\varepsilon}$ на самом этом отрезке (функция $\bar{\delta}_\varepsilon$ имитирует δ-функцию Дирака), можно аппроксимировать гладкой функцией δ_ε с теми же свойствами: $\delta_\varepsilon(x) \geqslant 0$ на $\mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon(x) = 0$ при $|x| \geqslant \varepsilon$ и $\int\limits_{\mathbb{R}} \delta_\varepsilon(x)\,dx = 1$, т. е. $\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)\,dx = 1$.

c) Покажите теперь, что если $\varepsilon \to 0$, то $\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)\delta_\varepsilon(x-t)\,dt \to f(x)$ в любой точке x непрерывности интегрируемой функции f.

Функционал как обобщенная функция. Итак, интегрируемая функция порождает линейный функционал A_f (линейную функцию на векторном пространстве функций $C_0^{(\infty)}[a,b]$ или на $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$), определенный формулами (6) или (7), причем по функционалу A_f сама интегрируемая функция восстанавливается во всех точках непрерывности (т. е. почти всюду). Таким образом, функционал A_f можно рассматривать как иную кодировку или интерпретацию функции f, рассматриваемой в зеркале функционалов.

Но в этом зеркале можно увидеть и иные линейные функционалы, которые не порождаются указанным способом никакой интегрируемой функцией. Примером может служить уже встретившийся нам функционал $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dH(x) = \varphi(0)$, который мы обозначим как A_δ (учитывая желание написать $\delta(x)\,dx$ вместо $dH(x)$).

Функционалы первого типа называют *регулярными*, а второго — *сингулярными.*

На функционалы и будем смотреть как на *обобщенные функции.* Множество рассмотренных функционалов содержит наши обычные функции в виде подмножества, состоящего из регулярных функционалов.

Итак, в связи с рассмотрением интеграла Римана и его обобщения в виде интеграла Стилтьеса мы дали представление об идее построения обобщенных функций. Не станем погружаться в детали теории обобщенных функций, связанные, например, с рассмотрением различных пространств пробных функций и построением линейных функционалов (обобщенных функций) на них. Лучше продемонстрируем правило дифференцирования обобщенных функций. А здесь, в качестве заключительного замечания, указывающего на полезную роль интеграла Стилтьеса, добавим, что на пространстве $C[a,b]$ функций φ, непрерывных на отрезке $[a,b]$, любой (как регулярный, так и сингулярный) линейный непрерывный функционал представляется в виде интеграла Стилтьеса $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dg(x)$ с некоторой, должным образом подобранной, функцией g.

(Подобно тому, как сингулярный функционал A_δ, представляющий обобщенную функцию δ, имеет вид $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dH(x)$, указанный в формуле (3).)

Мы начали с примера, где при отыскании центра масс нам встретился интеграл Стилтьеса $\int\limits_a^b x\,dm(x)$. Интеграл $M_n = \int\limits_a^b x^n\,dm(x)$ называется *моментом порядка n* соответственно меры (например, вероятностной) или массы, или заряда, распределенных на отрезке $[a,b]$. Особенно часто встречаются моменты M_0, M_1, M_2: M_0 — совокупная масса (мера, заряд); M_1/M_0 — дает центр масс в механике, а M_1 — математическое ожидание случайной величины в теории вероятностей; M_2 — момент инерции в механике и дисперсия случайной величины с математическим ожиданием $M_1 = 0$ в теории вероятностей. Одна из задач теории моментов — восстановление распределения по его моментам.

Дифференцирование обобщенных функций. Пусть A — обобщенная функция. Какую обобщенную функцию A' следовало бы считать производной от A?

Рассмотрим вопрос сначала для регулярной обобщенной функции, т. е. для функционала A_f, порожденного некоторой классической функцией f, например гладкой финитной функцией класса $C_0^{(1)}$. Тогда производной A'_f от A_f естественно считать функционал $A_{f'}$, порожденный функцией f' — производной исходной функции.

Используя интегрирование по частям, находим, что

$$A'_f(\varphi) := A_{f'}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)\,dx = f(x)\varphi(x)\big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx = \\ = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx =: -A_f(\varphi').$$

Итак, мы нашли, что в рассмотренном случае

$$A'_f(\varphi) = -A_f(\varphi') \tag{8}$$

Это дает основание принять следующее *определение*

$$A'(\varphi) := -A(\varphi'). \tag{9}$$

Здесь указано, как функционал A' действует на любую функцию $\varphi \in C_0^{(\infty)}$, и тем самым функционал A' полностью определен.

Действие линейного функционала A на функцию φ вместо $A(\varphi)$ часто записывают в удобном во многих отношениях виде $\langle A, \varphi\rangle$, напоминающем скалярное произведение и указывающем явно, что спаривание линейно по каждой из пары его переменных.

В этих обозначениях, если теперь f — любая обобщенная функция, то в соответствии с определением (9)

$$\langle f', \varphi\rangle := -\langle f, \varphi'\rangle. \tag{10}$$

Производные функции Хевисайда и дельта-функции. Подсчитаем, например, производную функции Хевисайда, рассматриваемой как обобщенную функцию, действующую по стандартному закону регулярной обобщенной функции

$$\langle H, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x)\,dx.$$

В соответствии с определением (9) или (10)

$$\langle H', \varphi\rangle := -\langle H, \varphi'\rangle := -\int\limits_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)\,dx = -\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx =$$
$$= -\varphi(x)\big|_0^{+\infty} = \varphi(0).$$

Мы показали, что $\langle H', \varphi\rangle = \varphi(0)$. Но ведь по определению обобщенной функции δ имеем $\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$. Значит, мы показали, что в смысле обобщенных функций имеет место равенство

$$H' = \delta.$$

Подсчитаем, например, еще δ' и δ'', т. е. укажем действие этих функционалов:

$$\langle \delta', \varphi\rangle := -\langle \delta, \varphi'\rangle := -\varphi'(0);$$
$$\langle \delta'', \varphi\rangle := -\langle \delta', \varphi'\rangle := \varphi''(0).$$

Ясно теперь, что вообще $\langle \delta^{(n)}, \varphi\rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$.

Мы видим, что обобщенные функции бесконечно дифференцируемы. Это их замечательное свойство имеет много разнообразных проявлений, разрешая операции, которые с обычными функциями возможны только при очень специальных ограничениях.

В заключение сделаем еще следующее замечание общего характера. Пусть X — векторное пространство, X^* — двойственное к X векторное пространство, состоящее из линейных функций на X, и пусть X^{**} — пространство, двойственное к пространству X^*. Значение $x^*(x)$ функции $x^* \in X^*$ на векторе $x \in X$ будем записывать, как и выше, в виде спаривания $\langle x^*, x\rangle$. Фиксируя здесь x, мы получаем линейную функцию относительно x^*. Таким образом, каждый элемент $x \in X$ можно трактовать как элемент пространства X^{**}, т. е. мы имеем вложение $I\colon X \to X^{**}$. В конечномерном случае все пространства X, X^*, X^{**} изоморфны и $I(X) = X^{**}$. В общем же случае $I(X) \Subset X^{**}$, т. е. $I(X)$ составляет только часть всего пространства X^{**}. Именно это и наблюдалось при переходе от функций (им отвечали регулярные функционалы) к обобщенным функциям, которых оказалось больше.

ДОПОЛНЕНИЕ 5

ТЕОРЕМА О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ
(альтернативное изложение)

Постановка вопроса

Постановка вопроса и наводящие соображения, конечно, обсуждались в реальной лекции, но здесь мы это опустим, поскольку соответствующий материал можно прочитать в § 5 главы VIII.

Мы продемонстрируем здесь иной подход к доказательству теоремы о неявной функции, отличный и независимый от изложенного в § 5 главы VIII. Он, несмотря на идейную простоту, красоту и общность, предполагает несколько более продвинутую аудиторию слушателей, которые уже ознакомлены с некоторыми общематематическими понятиями, изложенными в начале второй части учебника. Во всяком случае именно такие сведения позволяют оценить реальную общность метода, который, кстати, без потери общности можно демонстрировать уже на простейших наглядных примерах в знакомых всем пространствах.

Некоторые напоминания о численных методах решения уравнений

Фиксировав в соотношении $F(x, y) = 0$ одну из переменных, мы получаем уравнение относительно другой, поэтому сначала полезно вспомнить, как решают уравнение $f(x) = 0$.

1) В зависимости от свойств функции f предлагаются и способы решения.

Например, если f — вещественнозначна, непрерывна и на концах отрезка $[a, b]$ принимает значения разных знаков, то мы знаем, что на этом отрезке есть по крайней мере один корень уравнения $f(x) = 0$ и его можно искать последовательным делением отрезка. Разделив отрезок пополам, мы либо попадаем в корень, либо находим вдвое меньший отрезок, на концах которого функция имеет значения разных знаков. Продолжая процесс деления, получим последовательность (концов отрезков), которая сходится к корню уравнения.

2) Если f — гладкая выпуклая функция, то, следуя Ньютону, можно предложить значительно более эффективный в смысле скорости сходимости алгоритм отыскания единственного в этом случае корня.

Метод Ньютона, или *метод касательных*, состоит в следующем. Строим касательную в точке x_0, находим точку x_1 ее пересечения с осью абсцисс и, повторяя процесс, получаем рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = x_n - (f'(x_n))^{-1} f(x_n) \tag{1}$$

последовательность точек, быстро сходящуюся к корню. (Оцените скорость сходимости. Получите соотношение $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + a/x_n)$, позволяющее искать положительный корень уравнения $x^2 - a = 0$, $a > 0$. Найдите $\sqrt{2}$ по этой формуле с нужной вам точностью и проследите, сколько дополнительных верных знаков появляется на каждом шаге).

3) Соотношение (1) можно переписать в виде

$$x_{n+1} = g(x_n), \tag{2}$$

где $g(x) = x - (f'(x))^{-1} f(x)$. Тем самым отыскание корня уравнения $f(x)$ сводится к отысканию *неподвижной точки* отображения g, т. е. такой точки, что

$$x = g(x). \tag{3}$$

Эта редукция, как нам известно, относится не только к методу Ньютона. В самом деле, уравнение $f(x) = 0$ равносильно уравнению $\lambda f(x) = 0$ (если существует λ^{-1}), а последнее равносильно уравнению $x = x + \lambda f(x)$. Полагая $g(x) = x + \lambda f(x)$ (здесь λ может быть и переменной величиной), приходим к уравнению (3).

Процесс решения уравнения (3), т. е. отыскания неподвижной точки отображения g в соответствии с рекуррентной формулой (2), когда найденное на предыдущем шаге значение функции становится ее аргументом на следующем шаге, как мы уже знаем, называется *итерационным* *процессом* или *методом итераций*. Этот циклический процесс удобен для реализации на компьютере.

Если итерационный процесс (2) ведется в области, где $|g'(x)| \leqslant q < 1$, то последовательность

$$\begin{aligned}
&x_0,\\
&x_1 = g(x_0),\\
&x_2 = g(x_1) = g^2(x_0),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_{n+1} = g(x_n) = g^n(x_0)
\end{aligned}$$

всегда оказывается фундаментальной (последовательностью Коши). В самом деле, применяя теорему о конечном приращении, имеем

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant q|x_n - x_{n-1}| \leqslant \ldots \leqslant q^n|x_1 - x_0|, \tag{4}$$

откуда, применяя неравенство треугольника, находим

$$\begin{aligned}
|x_{n+m} - x_n| \leqslant |x_n - x_{n+1}| + \ldots + |x_{n+m-1} - x_{n+m}| \leqslant \\
\leqslant (q^n + \ldots + q^{n+m-1})|x_1 - x_0| \leqslant \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|.
\end{aligned} \tag{5}$$

Полезно заметить, что при $m \to \infty$ из последнего неравенства получаем оценку

$$|x - x_n| \leqslant \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \tag{6}$$

уклонения x_n от неподвижной точки x.

Задача. Нарисуйте несколько вариантов кривых $y = g(x)$, пересекающих прямую $y = x$, и изобразите диаграмму, имитирующую итерационный процесс $x_{n+1} = g(x_n)$ отыскания неподвижной точки.

Принцип неподвижной точки. Последние рассуждения (относящиеся к формулам (3) – (6)), очевидно, можно повторить в любом метрическом пространстве, в котором действует критерий Коши, т. е. где любая фундаментальная последовательность является сходящейся. Такие метрические пространства называются *полными метрическими пространствами*. Например, $\mathbb{R}$ — полное метрическое пространство по отношению к стандартному расстоянию $d(x', x'') = |x' - x''|$ между точками

$x', x'' \in \mathbb{R}$. Отрезок $I = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leqslant 1\}$ — также полное метрическое пространство относительно этой метрики. А если из $\mathbb{R}$ или из I удалить точку, то полученное метрическое пространство, очевидно, не будет полным.

Задача. 1. Проверьте полноту пространств $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$.

2. Покажите, что замкнутый шар $B(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) \leqslant r\}$ радиуса r с центром $a \in X$ в полном метрическом пространстве (X,d) сам является полным метрическим пространством относительно индуцированной вложением $B \subset X$ метрики d.

Напомним еще следующее

Определение. Отображение $g\colon X \to Y$ одного метрического пространства (X, d_X) в другое (Y, d_Y) называется *сжимающим*, если существует число $q \in [0, 1[$ такое, что для любых двух точек $x', x'' \in X$

$$d_Y(g(x'), g(x'')) \leqslant q\ d_X(x', x'').$$

Например, если дифференцируемая функция $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что всюду $|g'(x)| \leqslant q < 1$, то по теореме в конечном приращении $|g(x') - g(x'')| \leqslant q|x' - x''|$ и g осуществляет сжимающее отображение. Это же можно сказать и по отношению к дифференцируемому отображению $g\colon B \to Y$ выпуклого подмножества B нормированного пространства X (например, шара $B \subset \mathbb{R}^n$) в нормированное пространство Y, если $\|g'(x)\| \leqslant q$ в любой точке $x \in B$.

Теперь мы можем сформулировать следующий *принцип неподвижной точки.*

Сжимающее отображение $g\colon X \to X$ полного метрического пространства в себя имеет и притом единственную неподвижную точку x.

Эта точка может быть найдена итерационным процессом $x_{n+1} = g(x_n)$, начиная с любой точки $x_0 \in X$. Скорость сходимости и оценка погрешности приближения даются неравенством

$$d(x, x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0). \tag{6'}$$

Доказательство этого утверждения было дано выше при выводе формул (4) – (6), где теперь вместо $|x' - x''|$ всюду надо писать $d(x', x'')$.

Чтобы оценить пользу и масштаб действия сделанного обобщения, рассмотрим следующий важный пример.

Пример. Ищется функция $y = y(x)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $y' = f(x, y)$ и начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Пользуясь формулой Ньютона – Лейбница, перепишем задачу в виде следующего интегрального уравнения относительно неизвестной функции $y(x)$:

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt. \tag{7}$$

Справа стоит некоторое преобразование g, которое делается над функцией $y(x)$, и мы ищем неподвижную «точку» — функцию преобразования g.

Пусть, например, $f(x, y) = y$, $x_0 = 0$, а $y_0 = y(t)$. Тогда речь идет о решении уравнения $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$, а (7) принимает вид

$$y(x) = 1 + \int\limits_{0}^{x} y(t)\, dt. \tag{8}$$

Проведем итерационный процесс, начиная, положим, с функции $y_0(x) \equiv 0$. При этом последовательно получаем

$$\begin{aligned}
&y_1(x) \equiv 1,\\
&y_2(x) = 1 + \int_0^x y_1(t)dt = 1 + x,\\
&y_3(x) = 1 + \int_0^x y_2(t)dt = 1 + \int_0^x (1+t)dt = 1 + x + \frac{1}{2}x^2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y_n(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \ldots + \frac{1}{n!}x^n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Видно, что мы идем к функции $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$

Задача. Покажите, что если $\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leqslant M\|y_1 - y_2\|$, то в окрестности точки x_0 итерационный процесс применим и в случае общего уравнения (7).

Именно так Пикар (Emile Picard, 1856 – 1941) искал решение дифференциального уравнения $y'(x) = f(x, y(x))$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ как неподвижную точку преобразования (7).

Банах (Stephane Banach, 1882 – 1945) сформулировал принцип неподвижной точки в приведенной выше абстрактной форме, в которой он часто называется *принципом Банаха неподвижной точки* или *принципом Пикара – Банаха.* Истоки его, однако, как мы видели, можно связывать и с Ньютоном.

Теорема о неявной функции

Формулировка теоремы. Вернемся теперь к основному объекту нашего рассмотрения и покажем, что справедлива следующая *теорема о неявной функции.*

Теорема. *Пусть X, Y, Z — нормированные пространства (например, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ или даже $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$), причем Y — полное пространство относительно метрики, индуцированной нормой.*

Пусть $F\colon W \to Z$ – отображение, определенное в окрестности W точки $(x_0, y_0) \in X \times Y$, непрерывное в (x_0, y_0) вместе с частной производной $F'_y(x, y)$, которая предполагается существующей в W.

Если $F(x_0, y_0) = 0$ и существует $(F'_y(x_0, y_0))^{-1}$ (и $\|(F'_y(x_0, y_0))^{-1}\| < \infty$), то найдутся окрестность $U = U(x_0)$ точки x_0 в X, окрестность $V = V(y_0)$ точки y_0 в Y и такая функция $f\colon U \to V$, непрерывная в x_0, что $U \times V \subset W$ и

$$(F(x, y) = 0 \text{ в } U \times V) \Longleftrightarrow (y = f(x),\ x \in U). \tag{9}$$

Короче, при условиях теоремы заданное соотношением $F(x, y) = 0$ множество в пределах окрестности $U \times V$ является графиком функции $y = f(x)$.

Доказательство существования неявной функции.

◄ Без ограничения общности и для сокращения записи будем считать, что $(x_0, y_0) = (0, 0)$, чего всегда можно добиться, перейдя к новым переменным $x - x_0$ и $y - y_0$.

При фиксированном x будем решать уравнение $F(x, y) = 0$ относительно y. Решение будем искать как неподвижную точку отображения

$$g_x(y) = y - (F'_y(0, 0))^{-1} F(x, y) \tag{10}$$

— это упрощенный вариант формулы Ньютона (1), когда коэффициент λ (см. абзац после формулы (3)) постоянен. Непосредственно видно, что $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow g_x(y) = y$.

Отображение (10) является сжимающим, если x и y близки к 0 в X и Y. В самом деле,

$$\frac{dg_x}{dy}(y) = E - (F'_y(0,0))^{-1}F'_y(x,y). \tag{11}$$

Здесь E — тождественное (единичное) отображение, а поскольку $F'_y(x,y)$ непрерывно в точке (0,0), то найдется число $\Delta \in \mathbb{R}$ такое, что при $\|x\| < \Delta$ и $\|y\| < \Delta$

$$\left\|\frac{dg_x}{dy}\right\| < \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Заметим, наконец, что при любом $\varepsilon \in]0,\Delta[$ найдется $\delta \in]0,\Delta[$ такое, что если $\|x\| < \delta$, то отображение g_x переводит отрезок (шарик) $\|y\| \leqslant \varepsilon$ в себя.

Действительно, ведь $F(0,0) = 0$, значит, в силу (10), и $g_0(0) = 0$. Ввиду непрерывности F в точке (0,0) из (10) следует, что найдется число $\delta \in]0,\Delta[$ такое, что $\|g_x(0)\| < \frac{1}{2}\varepsilon$ при $\|x\| < \delta$.

Итак, при $\|x\| < \delta$ отображение $g_x\colon B(\varepsilon) \to Y$ отрезка (шара) $B(\varepsilon) = \{y \in Y \mid \|y\| \leqslant \varepsilon\}$ смещает его центр не более чем на $\frac{1}{2}\varepsilon$, при этом, в силу (12), сжимая $B(\varepsilon)$ по крайней мере вдвое. Значит, $g_x(B(\varepsilon)) \subset B(\varepsilon)$ при $\|x\| < \delta$.

По условию Y — полное пространство, поэтому и $B(\varepsilon) \subset Y$ тоже полное метрическое пространство (относительно индуцированной метрики).

Тогда, в силу принципа неподвижной точки, найдется, и притом единственная, точка $y = f(x) \in B(\varepsilon)$, неподвижная при отображении $g_x\colon B(\varepsilon) \to B(\varepsilon)$.

Тем самым при любом x таком, что $\|x\| < \delta$, мы нашли, и притом единственное в пределах $B(\varepsilon)$, значение $y = f(x)$ ($\|f(x)\| < \varepsilon$) такое, что $F(x, f(x)) = 0$.

(Сечение области $P = \{(x,y) \in X \times Y \mid \|x\| < \delta,\ \|y\| < \varepsilon\}$, проходящее через точку $(x,0)$, — это отрезок (шарик) $B(\varepsilon)$, в котором и находится соответствующая неподвижная точка $y = f(x)$.)

Итак, показано, что

$$(F(x,y) = 0 \text{ при } \|x\| < \delta \text{ и } \|y\| < \varepsilon) \Longleftrightarrow (y = f(x),\ \text{где } \|x\| < \delta). \tag{13}$$

Заметим, что мы не только получили соотношение (9), но, в силу конструкции, по любому $\varepsilon \in]0,\Delta[$ умеем подбирать $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось (13). Поскольку функция f уже найдена и фиксирована, это означает и то, что $f(0) = 0$, и то, что f *непрерывна при* $x = 0$. ►

Доказанную теорему можно рассматривать как теорему существования неявной функции $y = f(x)$.

Посмотрим теперь, какие свойства функции F и как наследуются функцией f.

Непрерывность неявной функции.

Если в дополнение к условиям теоремы известно, что функции F, F'_y *непрерывны не только в точке* (x_0, y_0), *но и в некоторой ее окрестности, то и неявная функция* f *непрерывна в некоторой окрестности* x_0.

◄ Действительно, в этом случае условия теоремы окажутся выполненными во всех близких к (x_0, y_0) точках множества $F(x, y) = 0$ и каждую из них можно было бы рассматривать как исходную (x_o, y_0). Функция же f уже найдена и фиксирована.

Внимание! Вспомните задачу: если отображение $A \to A^{-1}$ (например, для матриц A) определено в A, то определено и в окрестности A. ►

Дифференцируемость неявной функции.

Если в дополнение к условиям теоремы известно, что функция F *дифференцируема в точке* (x_0, y_0), *то неявная функция* f *дифференцируема в точке* x_0, *причем*

$$f'(x_0) = -(F'_y(x_0, y_0))^{-1} F'_x(x_0, y_0). \tag{14}$$

◄ Учитывая дифференцируемость F в точке (x_0, y_0), можно написать, что

$$\begin{aligned} &F(x, y) - F(x_0, y_0) = \\ &\qquad = F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(|x - x_0| + |y - y_0|). \end{aligned}$$

Полагая для упрощения записи $(x_0, y_0) = (0, 0)$ и считая, что мы перемещаемся только вдоль кривой $y = f(x)$, получаем

$$0 = F'_x(0, 0)x + F'_y(0, 0)y + o(|x| + |y|),$$

или
$$y = -(F'_y(0,0))^{-1}F'_x(0,0)x - (F'_y(0,0))^{-1}o(|x|+|y|). \tag{15}$$

Поскольку $y = f(x) = f(x) - f(0)$, то формула (14) будет оправдана, если мы покажем, что при $x \to 0$ второй член в правой части (15) есть $o(x)$.

Но
$$|(F'_y(0,0))^{-1}o(|x|+|y|)| \leqslant \|(F'_y(0,0))^{-1}\| \cdot |o(|x|+|y|)| = o(|x|+|y|).$$

Далее,
$$\|-(F'_y(0,0))^{-1}F'_x(0,0)\| \leqslant \|(F'_y(0,0))^{-1}\| \cdot \|F'_x(0,0)\| = a < \infty,$$
поэтому из (15) получаем, что $|y| \leqslant a|x| + \alpha(|x|+|y|)$, где $y = f(x) \to 0$ и $\alpha = \alpha(x) \to 0$ при $x \to 0$.

Значит,
$$|y| \leqslant \frac{a+\alpha}{1-\alpha}|x| < 2a|x|$$
при x, достаточно близких к 0. Учитывая это, из (15) получаем, что при $x \to 0$
$$f(x) = -(F'_y(0,0))^{-1}F'_x(0,0)x + o(x).$$

А это с учетом $f(0) = 0$ дает (14). ►

Непрерывная дифференцируемость неявной функции.

Если в дополнение к условиям теоремы известно, что функции F'_x и F'_y определены и непрерывны в окрестности точки (x_0, y_0), то и неявная функция f непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0.

Короче говоря, если $F \in C^{(1)}$, то и $f \in C^{(1)}$.

◄ В этом случае условия дифференцируемости f и формула (14) оказываются выполнены не только в (x_0, y_0), но и во всех точках «кривой» $F(x,y) = 0$, близких к (x_0, y_0). (См. выше предостерегающее «*Внимание!*».) Тогда в некоторой окрестности точки x_0 в соответствии с формулой (14)
$$f'(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1}F'_x(x, f(x)), \tag{14$'$}$$
откуда видно, что f' — непрерывна.

Внимание! Вспомните, что отображение $A \to A^{-1}$ непрерывно. ►

Высшие производные неявной функции.

Если в дополнение к условиям теоремы известно, что функция F *принадлежит классу* $C^{(k)}$ *в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0), *то и* f *принадлежит классу* $C^{(k)}$ *в окрестности* x_0.

◀ Пусть, например, $F \in C^{(2)}$. Поскольку $f \in C^{(1)}$, то правую часть равенства $(14')$ можно продифференцировать в соответствии с правилом дифференцирования композиции функций. Получается формула для $f''(x)$, из которой следует непрерывность $f''(x)$.

Более того, как в формуле $(14')$ для $f'(x)$ справа участвуют первые частные производные F и сама функция f (но не f'), так и в формуле для $f''(x)$ участвуют вторые частные производные F и функции f, f' (но не f'').

Значит, если $F \in C^{(3)}$, то $f''(x)$ снова можно дифференцировать и мы снова приходим к формуле, теперь уже для $f'''(x)$, в которой участвуют третьи частные производные F, а также производные функции f (f, f', f'') только меньшего порядка.

По индукции получаем то, что и утверждалось. ▶

Внимание! Вспомните, что отображение $A \to A^{-1}$ дифференцируемо и даже бесконечно дифференцируемо.

Задача. 1. Найдите $f''(x)$ (т. е. выпишите формулу для вычисления $f''(x)(h_1, h_2)$ при заданных векторах смещения h_1, h_2).

2. Как выглядит (упрощается) формула для $f''(x)$ в случае, когда x, y и $z = F(x, y)$ — числовые вещественные или комплексные переменные?

Задача (метод неопределенных коэффициентов)**.** Зная первые (или все) коэффициенты ряда Тейлора функции F, найдите первые (или все) коэффициенты ряда Тейлора неявной функции f.

Задача. 1. Запишите в координатной форме формулировку теоремы о неявной функции для случая $F\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, когда $m = n = 1$ и когда $n > 1$.

2. Пусть $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $(m > n)$ — линейное отображение максимального ранга $(= n)$. Какова размерность подпространства $F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^m$ и какова его коразмерность? Пусть теперь $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $(m > n)$ — произвольное гладкое отображение, $F(0) = 0$ и $\operatorname{rang} F'(x) = n$. Ответьте на те же вопросы ($\dim F^{-1}(0) =?$ $\operatorname{codim} F^{-1}(0) =?$) в отношении множества $F^{-1}(0)$.

ЛИТЕРАТУРА

I. Классика

1. Первоисточники

Ньютон И.

a. Математические начала натуральной философии. Пер. с лат. В кн.: Крылов А. Н. Собрание трудов. Т. 7. — Л. – М.: Изд-во АН СССР, 1936, с. 57 – 662.

b. Математические работы. — М. – Л.: ОНТИ, 1937.

Лейбниц Г. В. Избранные отрывки из математических сочинений. *Успехи матем. наук*, 1948. **3** (1), 165 – 205.

2. Важнейшие систематические изложения предмета

Эйлер Л.

a. Введение в анализ бесконечных. В 2-х т. — М.: Физматгиз, 1961.

b. Дифференциальное исчисление. — М. – Л.: Гостехиздат, 1949.

c. Интегральное исчисление. В 3-х т. — М.: Гостехиздат, 1956 – 1958.

Коши О. Л.

a. Алгебраический анализ. — Лейпциг: Бэр и Хэрманн, 1864.

b. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении. — СПб.: Имп. Акад. наук, 1831.

II. Учебники[1)]

А р х и п о в Г. И., С а д о в н и ч и й В. А., Ч у б а р и к о в В. Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Высшая школа, 2000.

И л ь и н В. А., С а д о в н и ч и й В. А., С е н д о в Б. Х. Математический анализ. В 2-х ч. Изд. 2-е, перераб. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985, 1987.

К а м ы н и н Л. И. Курс математического анализа. В 2-х ч. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993, 1995.

К у д р я в ц е в Л. Д. Курс математического анализа. В 3-х т. — М.: Высшая школа, 1988, 1989.

Н и к о л ь с к и й С. М. Курс математического анализа. В 2-х т. — М.: Наука, 1990.

III. Учебные пособия

В и н о г р а д о в а И. А., О л е х н и к С. Н., С а д о в н и ч и й В. А. Задачи и упражнения по математическому анализу. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

Д е м и д о в и ч Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: Наука, 1990.

М а к а р о в Б. М., Г о л у з и н а М. Г., Л о д к и н А. А., П о д к о р ы т о в А. Н. Избранные задачи по вещественному анализу. — М.: Наука, 1992.

Р е ш е т н я к Ю. Г. Курс математического анализа. — Новосибирск: Изд-во Инс-та матем. Ч. I, книги 1 и 2, 1999. Ч. II, книги 1 и 2, 2000, 2001.

Р у д и н У. Основы математического анализа. Изд. 2-е. — М.: Мир, 1976.

Ш и л о в Г. Е.

a. Математический анализ. Функции одного переменного. Ч. 1 – 2. — М.: Наука, 1969.
b. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. В 3-х ч. — М.: Наука, 1972.

Ф и х т е н г о л ь ц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х т. Изд. 7-е, стереотип. — М.: Наука, 1969.

[1)] Приведенные в этом разделе книги допущены Минвузом СССР, рекомендованы Комитетом по высшей школе Миннауки России или Министерством образования Российской Федерации в качестве учебников для студентов, обучающихся по специальностям «Математика», «Прикладная математика», «Механика», «Прикладная математика и информатика».

IV. Дополнительная литература

Александров П. С., Колмогоров А. Н. Введение в теорию функций действительного переменного. — М.: ГТТИ, 1938.

Альберт Эйнштейн и теория гравитации: Сб. статей. К 100-летию со дня рождения. — М.: Мир, 1979.

Арнольд В. И.

a. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук — первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов. — М.: Наука, 1989.

b. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.

Боос В. Лекции по математике. Анализ. — М.: Едиториал УРСС, 2004.

Бурбаки Н. Очерки по истории математики. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. (В частности, статья «Архитектура математики».)

Валле-Пуссен Ш. Ж. Курс анализа бесконечно малых. В 2-х т. — Л. – М.: ГТТИ, 1933.

Вейль Г. Математическое мышление. — М.: Наука, 1989.

Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. — М.: Мир, 1967.

Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. — М.: Добросвет, МЦНМО, 1998.

Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. — М.: Наука, 1986.

Дьедонне Ж. Основы современного анализа. — М.: Мир, 1964.

Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики. — М.: Наука, 1967.

Зорич В. А. Математический анализ задач естествознания. — М.: МЦНМО, 2008.

Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. — М.: Мир, 1971.

Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 4-е, перераб. — М.: Наука, 1976.

Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. — М.: Наука, 1986.

Кириллов А. А. Что такое число? — М.: Наука, 1993.

Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 2-х т. — М.: Наука, 1970.

Ландау Э. Основы анализа. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1947.

Манин Ю. И. Математика и физика. — М.: Знание, 1979. — (Новое в жизни, науке, технике. Серия: Математика, кибернетика; № 12.)

Милнор Дж. Теория Морса. — М.: Мир, 1965. — (Библиотека сборника «Математика».)

Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. — М.: Мир, 1971.

Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. В 2-х ч. Изд. 3-е. — М.: Наука, 1978.

Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974.

Пуанкаре А. О науке. — М.: Наука, 1990.

Спивак М. Математический анализ на многообразиях. — М.: Мир, 1971.

Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. В 2-х ч. Изд. 2-е. — М.: Физматгиз, 1962 – 1963.

Успенский В. А. Что такое нестандартный анализ? — М.: Наука, 1987.

Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. I: Современная наука о природе. Законы механики. — М.: Мир, 1965.

Халмош П. Конечномерные векторные пространства. — М.: Наука, 1963.

Шварц Л. Анализ. В 2-х т. — М.: Мир, 1972.

Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Том IV. — М.: Наука, 1967. (В том числе статьи «Мотивы научного исследования» (с. 39 – 41) и «Физика и реальность» (с. 200 – 227).)

Владимир Антонович Зорич

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть I

Директор издательского проекта И. В. Ященко
Технический редактор В. Кондратьев
Верстка: А. Зарубина
Рисунки (с использованием системы METAPOST): Е. Бунина, А. Зарубина

Подписано в печать 19.10.2011 г. Формат 70 × 100/16
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 45
Тираж 2000. Заказ №

Издательство Московского Центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Б. Власьевский пер. 11. Тел. (499) 241-74-83

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»,
филиал «Дом печати — ВЯТКА» в полном соответствии
с качеством предоставленных материалов.
610033, г. Киров, ул. Московская, 122
Факс: (8332) 53-53-80, 62-10-36
http://www.gipp.kirov.ru e-mail: order@gipp.kirov.ru